数理解析研究所講究録
1051巻 1998年 215-225

三次元境界層の不安定に対する非平行性の影響

航技研　伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

1．はじめに

三次元境界層の最も基本的な例はFalkner-Skan-Cooke流である。この相似流では、流れ場の変化する方向に空間座標xを取るとき、それを境界層厚さδで無次元化したものは局所レイノルズ数Rに一致する。流れの安定性を支配する線形攪乱方程式はこの座標 $R=x/\delta$ と壁面に垂直な座標 $\zeta=z/\delta$ に関する偏微分方程式の形に表わされる。本論文では、レイノルズ数が独立変数の役割をするという性質を利用して、偏微分攪乱方程式を常微分方程式列に帰着させる微小パラメター展開法を提案する。

2．基本流と線形攪乱方程式

一様流 Q_∞ 中に後退角Λで置かれた楔上の境界層を考え、壁面に沿って前縁に直角にx、前縁に平行にy、壁面に垂直に

zの直角座標を取る。外部流の流速を $U_E=Ax^m$, $V_\infty=Q_\infty \sin\Lambda$ とするとき、基本流はFalkner-Skan-Cookeの相似解

$$U^*=U_E F'(\zeta),\quad V^*=V_\infty G(\zeta),\quad W^*=-\frac{\nu}{\delta}\left\{\frac{1+m}{2}F-\frac{1-m}{2}\zeta F'\right\} \tag{1}$$

で与えられる。$\delta=\sqrt{\nu x/U_E}$, $\zeta=z/\delta$, 関数FとGは方程式

$$F''' + \frac{1+m}{2}FF'' + m\{1-(F')^2\}=0,\quad G'' + \frac{1+m}{2}FG'=0,$$

$$F(0)=F'(0)=G(0)=0,\quad F'(\infty)=G(\infty)=1 \tag{2}$$

の解である。これに重ねられた攪乱を $\vec{v}^*=(u^*,v^*,w^*)$, p^*とするとき、線形攪乱方程式はつぎのベクトル形に表わされる。

$$\frac{\partial\vec{v}^*}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{v}^*+(\vec{v}^*\cdot\nabla)\vec{V}=-\mathrm{grad}\frac{p^*}{\rho}+\nu\nabla^2\vec{v}^*,$$

$$\mathrm{div}\ \vec{v}^*=0. \tag{3}$$

基本流が時間tとスパン方向座標yに依存しないことを利用すると、上式から容易に圧力p^*とスパン方向速度v^*を消去することが出来て、u^*とw^*に関する二元連立方程式が得られる。いま、攪乱を波動型と仮定して、つぎのように表わす。

$$(u^*,w^*)=(\bar{u},\bar{w})\exp[i(\alpha^* x+\beta^* y-\omega^* t)]. \tag{4}$$

ただし、$\bar{u}$と$\bar{w}$はxとzの関数、α^*, β^*, ω^* は定数である。さらに、境界層厚さδと外部流速を用いて諸量を無次元化する。

$$\frac{x}{\delta}=R,\quad \frac{z}{\delta}=\zeta,\quad \delta\alpha^*=\alpha,\quad \delta\beta^*=\beta,\quad \frac{\delta\omega^*}{U_E}=\omega,$$

$$\frac{U^*}{U_E}=U(\zeta),\quad \frac{V^*}{U_E}=V(\zeta,R),\quad \frac{W^*}{U_E}=\frac{W(\zeta)}{R},$$

$$\frac{\bar{u}}{V_\infty}=u(\zeta,R),\quad \frac{\bar{w}}{V_\infty}=w(\zeta,R),\quad \frac{V_\infty}{U_E}=\gamma(R). \tag{5}$$

以上を二元連立攪乱方程式に代入し、Lを2×2の微分作用素行列、$q=[u,w]^T$を攪乱のベクトル表示として、方程式を

$$Lq=0 \tag{6}$$

の形に表わす。作用素行列Lはレイノルズ数Rの逆数とRに関する微分を含むので、つぎのように展開できる。

$$L=(l_0+\frac{l_1}{R}+\frac{l_2}{R^2}+\ ...\ )+(m_0+\frac{m_1}{R}+\frac{m_2}{R^2}+\ ...\ )\frac{\partial}{\partial R}$$

$$+(n_0+\frac{n_1}{R}+\frac{n_2}{R^2}+\ ...\ )\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\ ....\tag{7}$$

係数行列はu^*-v^*方程式に(4)と(5)を代入し、その結果を上式と比較することによって得られるが、詳細は省略する。

3．偽装級数展開法

線形攪乱方程式$Lq=0$において、作用素マトリックスLは未知パラメターωを線形に、局所レイノルズ数Rを逆数の形で含む。そこで二つの微小パラメター$\varepsilon=1/R$と$\varepsilon_1=1/R^2$を導入し、解がこれらのパラメターを通してRに依存するものと考える。さらに、εとε_1を独立と仮定して、解をε_1のべ

き級数に展開する。これは $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$ の関係が成り立つ本来の問題とは異なる問題を扱うことになるので、偽装級数展開法と呼ぶ。[1)]

いま、級数

$$q = q_0 + \varepsilon_1 q_1 + \ldots + \varepsilon_1^n q_n + \ldots ,$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_1 + \omega_1 \ \ldots + \varepsilon_1^n \omega_n + \ldots \tag{8}$$

と作用素Lの ε_1 に関する展開形

$$L = (L_0 + \varepsilon \varepsilon_1 M_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1})$$

$$+ \varepsilon_1 (L_1 + \varepsilon_1 M_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_1^2 N_1 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_1{}^2} + \omega_1 L_\omega) + \ldots \tag{9}$$

を攪乱方程式に代入し、 ε_1 の各べきの係数を0に等置するとつぎの方程式列が得られる：

$$L_0 q_0 = 0, \quad (L_0 + \varepsilon M_0) q_1 = -(L_1 + \omega_1 L_\omega) q_0 ,$$

$$(L_0 + 2\varepsilon M_0) q_2 = -(L_1 + M_1 + \omega_1 L_\omega) q_1 - (L_2 + \omega_2 L_\omega) q_0 ,$$

$$\ldots . \tag{10}$$

第1式は同次常微分方程式であり、同次の境界条件と共に固有値問題を形成する。それを解くと、複素振動数 ω_0 が α 、β およびRの関数として

$$\omega_0 = \Omega(\alpha, \beta, R) \tag{11}$$

のように定まる。

つぎの非同次方程式を解くには、左辺に含まれるεをε_2で置き換えた偽装問題$(L_0+\varepsilon_2 M_0)q_1=-(L_1+\omega_1 L_\omega)q_0$を導入し、その解を$\varepsilon_2$に関するべき級数

$$q_1 = q_{10} + \varepsilon_2 q_{11} + \varepsilon_2^2 q_{12} + \ldots ,$$

$$\omega_1 = \omega_{10} + \varepsilon_2 \omega_{11} + \varepsilon_2^2 \omega_{12} + \ldots \qquad (12)$$

に置く。これらの級数の係数を支配する非同次方程式列

$$L_0 q_{10} = -(L_1 + \omega_{10} L_\omega) q_0 ,\ L_0 q_{11} = -(M_0 q_{10} + \omega_{11} L_\omega q_0),$$

$$L_0 q_{12} = -(M_0 q_{11} + \omega_{12} L_\omega q_0),\ \ldots \qquad (13)$$

は、固有値問題の同次方程式と同じ微分作用素を持つことになり、右辺の強制項に含まれるパラメターω_{10}、ω_{11}等は方程式の可解条件から順次定まる。以下同様の手続きに従うことで偽装問題のε_1とε_2に関する二重級数解が導かれる。この解においてε_1とε_2をそれぞれε^2とεに等しいと置くと元の厳密方程式のεに関する級数解がつぎの形に表示される。

$$q = q_0 + \varepsilon^2 q_{10} + \varepsilon^3 q_{11} + \varepsilon^4 (q_{12} + q_{20}) + \ldots ,$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \omega_{10} + \varepsilon^3 \omega_{11} + \varepsilon^4 (\omega_{12} + \omega_{20}) + \ldots . \qquad (14)$$

このようにして得られた級数解の特徴は、係数が$\varepsilon=1/R$に緩やかに依存すること、および初項を除く微小項が$1/R^2$から始まることである。したがって、固有値問題から定まる初項にはレイノルズ数の影響、すなわち流体の粘性と流れ場の非平行性が十分に反映されているものと期待される。実際、最

低次近似方程式は元の厳密方程式に含まれる$O(1/R)$項を全て含むために、つぎのような複雑なものになる。

$$
\begin{aligned}
&\Big[(\alpha^2+\beta^2)\Big\{\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)-\frac{\hat{W}}{R}D\\
&\qquad -\frac{1}{R}\Big(mU-\frac{1-m}{2}\zeta U'\Big)\Big\}-\frac{1-m}{R}\alpha(\omega-\alpha U-\beta V)\zeta D\Big]u\\
&+\Big[-i\alpha\Big\{\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)-\frac{\hat{W}}{R}D+\frac{1-3m}{2R}U+\frac{1-m}{2R}\zeta U'\Big\}D\\
&\qquad -\beta(\beta U'-\alpha V')+i\frac{1-m}{2R}(\omega-\alpha U-\beta V)(1+\zeta D)D\\
&\qquad +i\beta\frac{1-m}{2R}(V'+\zeta V'')\Big]w=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2i}{R}\Big[m\alpha(UD+U')-\frac{1-m}{2}\{(\alpha U'+\beta V')(1+\zeta D)+\zeta(\alpha U''+\beta V'')\}\Big]u\\
&+\Big[\Big\{\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)-\frac{1}{R}(\hat{W}D+\hat{W}')+\frac{1-m}{2R}(U-\zeta U')\Big\}\\
&\qquad \times(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\alpha U''+\beta V'')+\frac{m}{R}(U'D+U''+2\alpha^2U)\\
&\qquad +\frac{1-m}{2R}\{2\alpha(\omega-\alpha U-\beta V)\zeta D-(U'+2\zeta U'')D-2U''-\zeta U''\\
&\qquad -2\alpha\zeta(\alpha U'+\beta V')+2(\alpha^2+\beta^2)U\}\Big]w=0. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ただし、$D\equiv d/d\zeta$、$\hat{W}=-\frac{1}{2}(1+m)F(\zeta)$であり、攪乱速度の添字$_0$は省略した。

4. 計算結果と考察

はじめに、級数解(14)において最低次近似の固有解に対する高次微小項の影響がどの程度になるかを調べる。三次元境界層では、T－S不安定のほかに横流れ(C－F)不安定と流線曲率(S－C)不安定が発生する。図1～図3は3種類の不安定性に対する結果を示している。各レイノルズ数Rに対して、波数

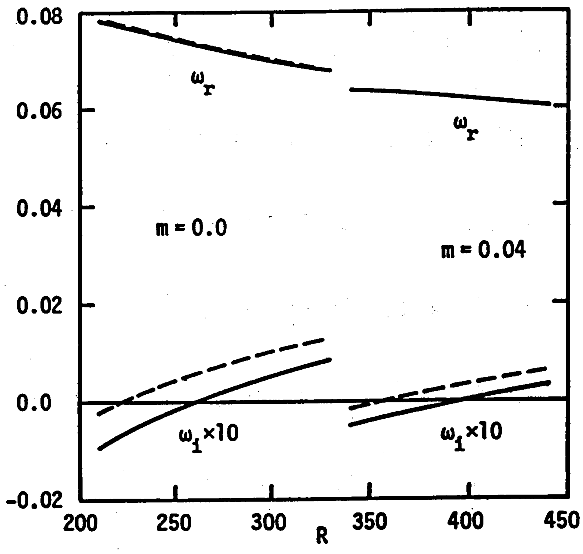

図1．T－S不安定の最大増幅率と補正解 (γ = 1.0)

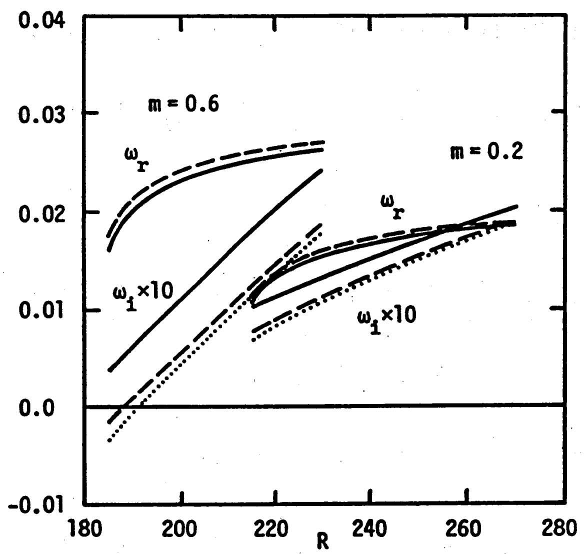

図2．C－F不安定の最大増幅率と補正解 (γ = 1.0)

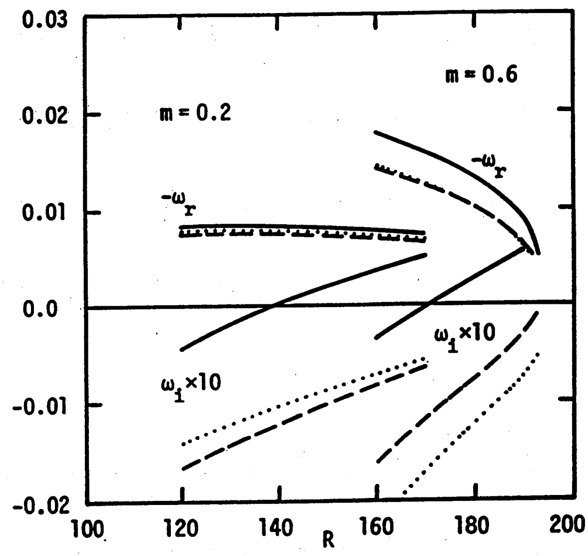

図3．S－C不安定の最大増幅率と補正解 (γ = 1.0)

αとβを実数の範囲で変えて時間増幅率 ω_{01} の最大値を算出し、対応する解のRに対する変化を描いた。実線は最低次近似の固有解で、破線は固有解に補正量 $\Delta\omega = \varepsilon^2 \omega_{10} + \varepsilon^3 \omega_{11} + \varepsilon^4 (\omega_{12} + \omega_{20})$を加えたもの、点線は補正項の初項だけを加えたものである。T－S不安定（図１）に対しては、点線と破線は区別がつかないほど接近しており、補正項の大部分が初項に起因すること、および実線と破線の差も非常に小さいため、固有解が十分良い近似を与えることが判る。横流れ不安定（図２）についても同様な傾向が見られるが、補正項の影響はやや強くなっており、流線曲率不安定（図３）の増幅率においては実線と破線の差が無視できないほど大きくなっている。補正項は、T－S攪乱の増幅率を増す方向に作用するが、C－FとS－Cの攪乱では増幅率を減少させるように働く。安定性の定量的見積りに固有値問題の解を用いる場合には、この傾向を考慮すべきである。

つぎに、ここで導かれた非平行理論の最低次近似固有解と、平行流近似のオル・ゾンマーフェルト方程式および平行流近似に最も重要な曲率項を加えた準平行流近似[2)]の解を比較する。図４は外部流線の角度を $\gamma = 1.0$に選び、３種類の不安定性の臨界レイノルズ数を圧力勾配係数ｍに対してプロットしたもので、実線は非平行方程式、破線はO－S方程式、点線

は準平行流近似方程式の解である。T－S臨界曲線では実線と破線はかなり一致しているが、C－FとS－C不安定に対しては様相が異なる。O－S方程式は、流線曲率項を含まないためにS－C不安定を記述できない代りに、mの広い範囲でC－F臨界曲線を与える。これに対して非平行固有値方程式では、S－C不安定が非常に低い臨界値を持つため、C－F臨界曲線はmの大きい領域にだけ現われる。S－C臨界曲線に対しては、実線と点線の差が大きいので、準平行流近似方程式の有効性には問題があるものと思われる。

これまでの結果から、非平行固有解がT－S不安定に対しては非常に良い近似を与えることが判ったので、最後に二次

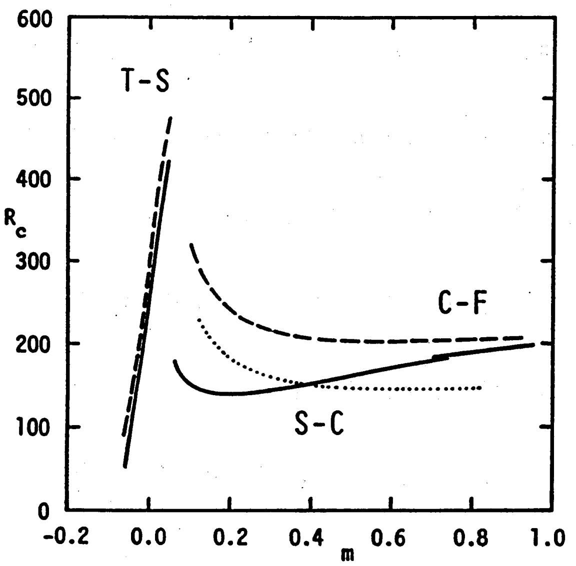

図４．臨界レイノルズ数の方程式依存性（γ =1.0）

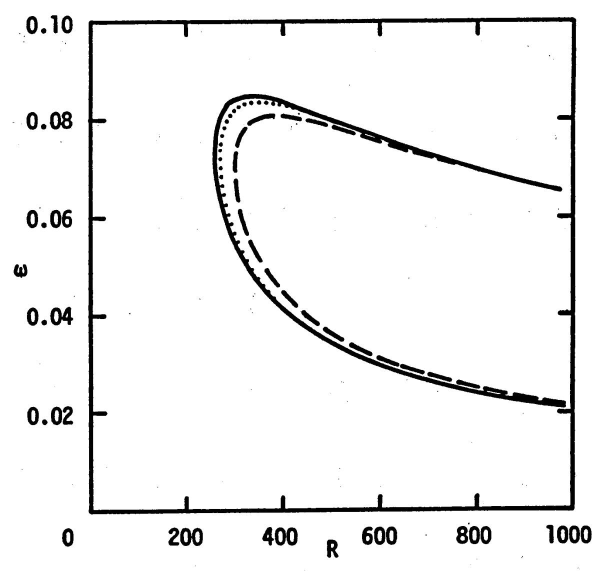

図５．二次元ブラジウス流の中立安定曲線

元ブラジウス流の中立安定曲線を算出した。図5はその結果（実線）とO－S解（破線）および準平行流近似解（点線）を比較したものである。臨界レイノルズ数Rc=260.1は平行流近似のRc=301.6に比べて約14%低くなり、高次補正項を加えればこの値はさらに低くなる。

5．むすび

三次元相似境界層に対する厳密な線形擾乱方程式に偽装級数展開法を適用し、レイノルズ数の逆数に関するべき級数解を導いた。級数解の初項で表わされる最低次近似解は流れ場の非平行性、曲率、粘性効果等を含む常微分方程式の固有値問題から定まる。級数解は1/R 項を含まないので、高次微小項は$1/R^2$から始まり、各係数は非同次常微分方程式の境界値問題の解として定まる。最低次近似解と高次補正項に対する数値計算の結果では、ε^2次項は小数点以下第3桁に、ε^4次項は第4桁に影響する程度であり、したがって級数解の収束性はかなり良いものと推測される。高次補正項は、T－S不安定の増幅率を増加させ、C－FとS－C不安定の増幅率を減少させる方向に働く。

参　考　文　献

1) Itoh, N. (1998) Theoretical description of insta-bility waves in the flow on a rotating disk, I. False-expansion method applied to linear stability equations. Trans. Japan Soc. Aero.Space Sci. 40, 262-279.

2) Itoh, N. (1996) Development of wedge-shaped distur-bances originating from a point source in a three-dimensional boundary layer. Fluid Dyn. Res. 18, 337-354.