数理解析研究所講究録
1055 巻 1998 年 111-116



# Confidence intervals for the difference of means based on two independent samples

筑波大・数学　赤平 昌文 ( Masafumi Akahira )

## 1. はじめに

2 標本問題において, 想定された 2 つの分布の平均の差の信頼区間を求めることは重要であるが, 有名な Behrens-Fisher 型の問題のようにその解決は必ずしも容易ではない場合もある (Lehmann [Le86], Linnik [Li68], Shibata [S81], Weerahandi [W95]). 本論では, 指数分布の場合, ガンマ分布の場合, そして Behrens-Fisher 型の問題において, 2 つの分布の平均の差の信頼区間を 2 標本に基づいて構成する方法について提案する.

## 2. 指数分布, ガンマ分布の場合

確率変数 $X_1$, $X_2$ がたがいに独立で, 各 $i = 1, 2$ について $X_i$は密度

$$f_{X_i}(x, \theta_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i} e^{-x/\theta_i} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布 $Exp(\theta_i)$ に従うとする. ただし $\theta_i > 0$ $(i = 1, 2)$ とする. このとき $X_i$の平均, 分散はそれぞれ $E_{\theta_i}(X_i) = \theta_i$, $V_{\theta_i}(X_i) = \theta_i^2$ $(i = 1, 2)$ になる. そこで, 2 つの指数分布 $Exp(\theta_i)$ $(\imath = 1, 2)$ の平均の差$\theta_1 - \theta_2$ の信頼区間を求めよう. まず, 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して

$$P_{\theta_1, \theta_2}\{b(X_1, X_2) \leq \theta_1 - \theta_2 \leq a(X_1, X_2)\} \geq 1 - \alpha$$

とする. このとき $b(x_1, x_2) = -a(x_2, x_1)$ $\quad a.e.$ とすると

$$P_{\theta_1, \theta_2}\{a(X_1, X_2) < \theta_1 - \theta_2\} + P_{\theta_1, \theta_2}\{a(X_2, X_1) < \theta_2 - \theta_1\} \leq \alpha \tag{2.1}$$

になる. 各 $i$ について $Y_i = X_i / \theta_i$ とおくと, $Y_1$, $Y_2$はたがいに独立にいずれも密度

$$f_{Y_i}(y, \theta) = \begin{cases} e^{-y} & (y \geq 0), \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布 $Exp(1)$ に従う．このとき (2.1) から

$$P_{\theta_1,\theta_2}\{a(\theta_1 Y_1,\theta_2 Y_2)<\theta_1-\theta_2\}+P_{\theta_1,\theta_2}\{a(\theta_2 Y_2,\theta_1 Y_1)<\theta_2-\theta_1\}\le\alpha \tag{2.2}$$

になる．いま，任意の $x_1, x_2$に対して

$$a(x_1,x_2)=x_1\tilde{a}\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)$$

とする．そのとき

$$P_{\theta_1,\theta_2}\{a(\theta_1 Y_1,\theta_2 Y_2)<\theta_1-\theta_2\}=P_{\theta_1,\theta_2}\left\{\theta_1 Y_1\tilde{a}\left(\frac{\frac{\theta_1 Y_1}{Y_1+Y_2}}{\frac{\theta_1 Y_1}{Y_1+Y_2}+\frac{\theta_2 Y_2}{Y_1+Y_2}}\right)<\theta_1-\theta_2\right\} \tag{2.3}$$

となる．ここで$U:=Y_1/(Y_1+Y_2)$, $Z:=Y_1+Y_2$とおくと，$U$ と $Z$ はたがいに独立で，$U$ は一様分布 $U(0,1)$ に従い，$Z$ は密度

$$f_Z(z)=\begin{cases} ze^{-z} & (z\ge 0),\\ 0 & (z<0)\end{cases}$$

をもつガンマ分布 $\Gamma(1,1)$ に従う．(2.3) から

$$\begin{aligned}P_{\theta_1,\theta_2}\{a(\theta_1 Y_1,\theta_2 Y_2)<\theta_1-\theta_2\} &= P_{\theta_1,\theta_2}\left\{\theta_1 UZ\tilde{a}\left(\frac{\theta_1 U}{\theta_1 U+\theta_2(1-U)}\right)<\theta_1-\theta_2\right\}\\ &= P_\delta\left\{UZ\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\delta(1-U)}\right)<1-\delta\right\}\\ &= E_\delta\left[F_Z\left(\frac{1-\delta}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\delta(1-U)}\right)}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.4}$$

になる．ただし $\delta:=\theta_2/\theta_1$ で $F_Z(\cdot)$ は $Z$ の分布関数，すなわち

$$F_Z(z)=\begin{cases} 1-(1+z)e^{-z} & (z\ge 0),\\ 0 & (z<0)\end{cases}$$

とする．また同様にして

$$P_{\theta_1,\theta_2}\{a(\theta_2 Y_2,\theta_1 Y_1)<\theta_2-\theta_1\}=E_\delta\left[F_Z\left(\frac{1-\frac{1}{\delta}}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\frac{1}{\delta}(1-U)}\right)}\right)\right] \tag{2.5}$$

となる．よって (2.2), (2.4), (2.5) から

$$p(\delta):=E_\delta\left[F_Z\left(\frac{1-\delta}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\delta(1-U)}\right)}\right)\right]+E_\delta\left[F_Z\left(\frac{1-\frac{1}{\delta}}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\frac{1}{\delta}(1-U)}\right)}\right)\right]\le\alpha \tag{2.6}$$

になる. そこで, $\delta$ について一様に (2.6) を満たす $\tilde{a}(\cdot)$ を用いれば

$$P_{\theta_1,\theta_2}\{-a(X_2,X_1) \le \theta_1 - \theta_2 \le a(X_1,X_2)\} \ge 1-\alpha$$

より, $\theta_1 - \theta_2$の信頼係数 $1-\alpha$の信頼区間 $[-a(X_2,X_1), a(X_1,X_2)]$ が得られる. ただし $a(x_1,x_2) = x_1\tilde{a}\left(x_1/(x_1+x_2)\right)$ とする.

一方, $\theta_2 = 0$ のとき (2.2) の等号が成り立つためには, $\tilde{a}(1) = -1/\log(1-\alpha)$ になる. いま

$$\tilde{a}(z) = \frac{cz}{1+d(1-z)} \qquad (0 \le z \le 1)$$

の型の関数 $\tilde{a}(\cdot)$ をとると, $\tilde{a}(1) = c = -1/\log(1-\alpha)$ になる. ここで $\alpha = 0.05$ として, $\delta$ について一様に (2.6) を満たす $d$ を求めると $d = -0.9$ になる. このとき

$$a(x_1,x_2) = \frac{c_0 x_1^2}{x_1 + 0.1x_2}$$

になる. ただし $c_0 = -1/\log 0.95$ とする.

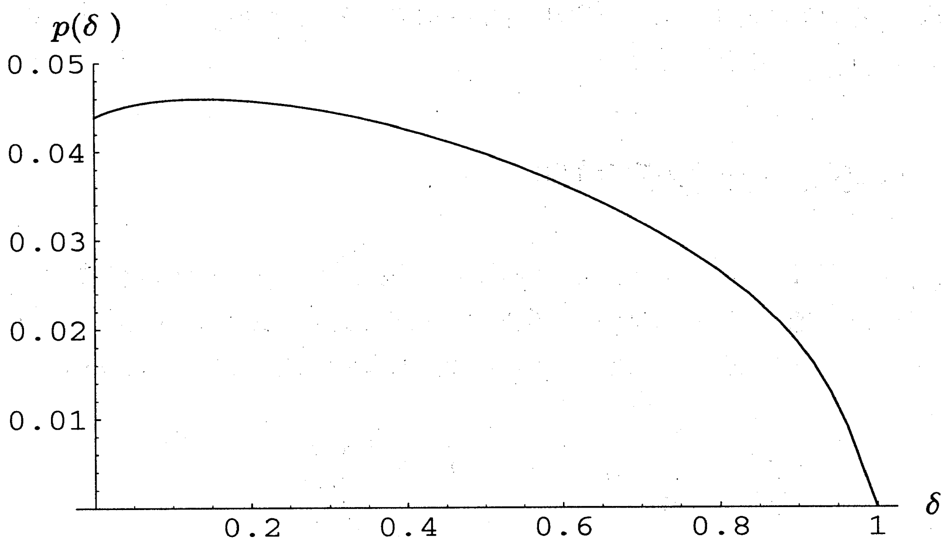


**図 1:** $\alpha = 0.05$, $d = -0.9$ のときの $a(x_1,x_2) = c_0x_1^2/(x_1+0.1x_2)$ の場合に, (2.6) の左辺を $\delta$ の関数 $p(\delta)$ と見たときのグラフ

次に, 確率変数 $X_1$, $X_2$ がたがいに独立で, 各 $i = 1,2$ について $X_i$は密度

$$f_{X_i}(x,\theta_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i^n\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x/\theta_i} & (x \ge 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつガンマ分布 $\Gamma(n,\theta_i)$ に従うとする. ただし $\theta_i > 0$ $(i=1,2)$ で $n>0$ とする. このとき, $X_i$の平均, 分散はそれぞれ $E_{\theta_i}(X_i) = n\theta_i$, $V_{\theta_i}(X_i) = n\theta_i^2$ $(i=1,2)$ になる. そこで, 2つのガンマ分布 $\Gamma(n,\theta_i)$ $(i=1,2)$ の平均の差 $n(\theta_1-\theta_2)$ の信頼区間を求める. 指数分布の場合と同様にして, 任意の $0<\alpha<1$ に対して

$$E_\delta\left[F_Z\left(\frac{n(1-\delta)}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\delta(1-U)}\right)}\right)\right] + E_\delta\left[F_Z\left(\frac{n\left(1-\frac{1}{\delta}\right)}{U\tilde{a}\left(\frac{U}{U+\frac{1}{\delta}(1-U)}\right)}\right)\right] \le \alpha$$

を, $\delta$について一様に満たす $\tilde{a}(\cdot)$ を求めればよい. ただし任意の $x_1, x_2$ について $a(x_1,x_2) = x_1\tilde{a}(x_1/(x_1+x_2))$ とし, $\delta = \theta_2/\theta_1$ とし, また $U$ は密度

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{B(n,n)}u^{n-1}(1-u)^{n-1} & (0<u<1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつベータ分布 $Be(n,n)$ に従う確率変数で, $F_Z(\cdot)$ はガンマ分布 $\Gamma(2n,1)$ に従う確率変数 $Z$ の分布関数とする. そのような $\tilde{a}(\cdot)$ を用いれば

$$P_{\theta_1,\theta_2}\{-a(X_2,X_1) \le n(\theta_1-\theta_2) \le a(X_1,X_2)\} \ge 1-\alpha$$

より, $\mathrm{n}(\theta_1-\theta_2)$ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間 $[-a(X_2,X_1), a(X_1,X_2)]$ が得られる. ただし $a(x_1,x_2) = x_1\tilde{a}(x_1/(x_1+x_2))$ とする.

## 3. Behrens-Fisher 型の問題

確率変数 $X_1,\cdots,X_n$は互いに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu_x,\sigma_x^2)$ に従うとし, 確率変数 $Y_1,\cdots,Y_n$も互いに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu_y,\sigma_y^2)$ に従うとする. ただし $\mu_x$, $\mu_y$, $\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$ は未知とする. また $X_1,\cdots,X_n$, $Y_1,\cdots,Y_n$ も互いに独立とする. いま

$$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad \bar{Y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$
$$S_x^2 := \sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2, \qquad S_y^2 := \sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y})^2$$

とおくと, $(\bar{X},\bar{Y},S_x^2,S_y^2)$は$(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2)$に対して十分統計量になる. そして $S_x^2/\sigma_x^2$, $S_y^2/\sigma_y^2$ はいずれも自由度 $n-1$ のカイ2乗分布に従うことは知られている. このとき2つの正規分布の平均の差 $\mu_x-\mu_y$の信頼区間を求める. これは Behrens-Fisher 型の問題として見なせる.

任意の $\alpha(0<\alpha<1)$ に対して

$$P\left\{h(S_x^2,S_y^2) \le \bar{Y}-\mu_y-(\bar{X}-\mu_x) \le g(S_x^2,S_y^2)\right\} \ge 1-\alpha \tag{3.1}$$

とする．ここで $h(x,y) = -g(y,x)$ $a.e.$ であると仮定する．また任意の定数 $c$ に対して $g(c^2x, c^2y) = cg(x,y)$ であるとし,

$$W_x := \frac{S_x^2}{\sigma_x^2}, \qquad W_y := \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

とおく．このとき, (3.1) より

$$P\left\{-g(\sigma_y^2 W_y, \sigma_x^2 W_x) \le \bar{Y} - \mu_y - (\bar{X} - \mu_x) \le g(\sigma_x^2 W_x, \sigma_y^2 W_y)\right\} \ge 1 - \alpha$$

となるから

$$\begin{aligned} &E\left[\Phi\left(\sqrt{W_x + W_y}\, g\left(\frac{n\delta W_x}{W_x + W_y}, \frac{n(1-\delta)W_y}{W_x + W_y}\right)\right)\right] \\ &+ \ E\left[\Phi\left(\sqrt{W_x + W_y}\, g\left(\frac{n(1-\delta)W_y}{W_x + W_y}, \frac{n\delta W_x}{W_x + W_y}\right)\right)\right] \ge 2 - \alpha \end{aligned} \tag{3.2}$$

になる．ただし $\Phi(\cdot)$ は $N(0,1)$ の分布関数とし, $\delta = \sigma_x^2/(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ とする．ここで $F_T(\cdot)$ を自由度 $2n-2$ の $t$ 分布の分布関数とすれば, (3.2) より

$$\begin{aligned} q(\delta) = E&\left[F_T\left(\sqrt{2n-2}\, g\left(n\delta B, n(1-\delta)(1-B)\right)\right)\right] \\ &+ E\left[F_T\left(\sqrt{2n-2}\, g\left(n(1-\delta)(1-B), n\delta B\right)\right)\right] \ge 2 - \alpha \end{aligned} \tag{3.3}$$

になる．ただし, $B$ はベータ分布 $Be((n-1)/2, (n-1)/2)$ に従う確率変数とする．このとき, 任意の $x > 0$, $y > 0$ に対して

$$g(x,y) = \sqrt{x+y}\, \tilde{g}\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

とする．いま $\tilde{g}(\cdot)$ として, 次の型の関数

$$\tilde{g}(z) = a(z-b)^2 + c \qquad (0 \le z \le 1)$$

を考える．ただし $a \ge 0$, $0 < b < 1$ とする．そこで, $\delta$について一様に (3.3) を満たすように $a, b, c$ を求めれば, (3.1) より

$$P\left\{-g(S_y^2, S_x^2) + \bar{X} - \bar{Y} \le \mu_x - \mu_y \le g(S_x^2, S_y^2) + \bar{X} - \bar{Y}\right\} \ge 1 - \alpha$$

となるから, $\mu_x - \mu_y$の信頼区間$\left[-g(S_y^2, S_x^2) + \bar{X} - \bar{Y}, g(S_x^2, S_y^2) + \bar{X} - \bar{Y}\right]$ が得られる．ただし $g(x,y) = \sqrt{x+y}\, \tilde{g}(x/(x+y))$ とする．

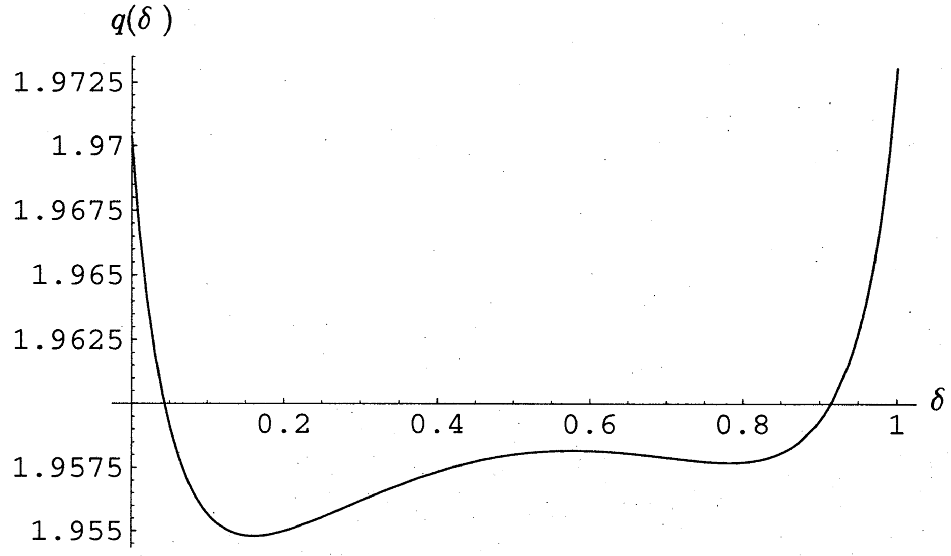


**図 2:** $\alpha = 0.05$, $n = 5$ のとき, $a = 1$, $b = c = 1/2$ の場合に (3.3) の左辺を$\delta$の関数 $q(\delta)$ としたときのグラフ

## 参考文献


[Le86] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses* (2nd ed.), Wiley, New York.

[Li68] Linnik, Y. (1968). *Statistical Problems with Nuisance Parameters.* Translation of Mathematical Monograph **20**, American Mathematical Society, New York.

[S81] Shibata, Y. (1981). *Normal Distributions.* (In Japanese). Tokyo Univ. Press, Tokyo.

[W95] Weerahandi, S. (1995). *Exact Statistical Methods for Data Analysis.* Springer, New York.