数理解析研究所講究録
1059 巻 1998 年 1-8

UNIQUE GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS FOR WAVE EQUATIONS WITH NON-COERCIVE CRITICAL NONLINEARITY

東京大学大学院数理科学研究科　　中西 賢次 (Kenji Nakanishi)

次の半線形波動方程式について、時間大域解の一意存在と、時刻無限大での漸近挙動を考える。

$$(1)\qquad \begin{cases} \Box u + f(u) = 0 & for\ \ (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, n \geq 3, \\ u(0) = \varphi, \quad \dot{u}(0) = \psi, \end{cases}$$

ただし $\Box = \partial_t^2 - \Delta$. f は次の条件を満たすものを考える。(以下、C は全て正定数を表す。)

$$(2)\qquad \begin{aligned} & f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(0) = 0, \\ & {}^{\exists}F : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ s.t.\ \partial_{\bar{z}} F(z) = f(z), F(0) = 0, \quad F(z) \geq -C|z|^2, \\ & L(\lambda) := \sup_{|u|+|v| \leq \lambda} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \leq C(1 + \lambda^{2^*-2}), \quad 2^* := \frac{2n}{n-2}. \end{aligned}$$

これより特に $|F(u)| \leq C(|u|^2 + |u|^{2^*})$ が成り立ち、初期値を $\varphi \in H^1, \psi \in L^2$ と取れば、保存量であるエネルギー

$$E = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 + F(u)}{2} dx$$

はソボレフの埋蔵定理により、有限値になる。

1. 既知の結果

時間大域解の一意存在については、次の二つのクラスの f に対して示されている。この場合、初期値は $\varphi \in H^1_{loc}, \psi \in L^2_{loc}$ として良い。

(i) Subcritical case [2]: f が (2) 及び 次をみたす時。

$$L(\lambda) = o(\lambda^{2^*-2}) \quad (\lambda:\text{大}) \tag{3}$$

(ii) Critical case [6, 4]: f が (2) 及び 次をみたす時。

$$G(u) := \mathrm{Re}(\overline{u}f(u)) - F(u) \geq C|u|^{2^*} \quad (|u|:\text{大}) \tag{4}$$

ここで (3) と (4) は両立せず、上の二つの結果は互いに独立であることに注意。とくに (4) は、非線形項が「大きい」ことを要求する不自然な条件であり、この条件 (4) を省けないかという問題が Kapitanski [4, pp. 220, Remark] により提出された。本講演ではこの問題を解決する。

時刻無限大での漸近挙動についても状況は良く似て、二つの異なるクラスに対する結果がある。この場合は 初期値を $\varphi \in \dot{H}^1, \psi \in L^2$ ($\dot{H}^1$ は homogeneous Sobolev space, $\|\varphi\|_{\dot{H}^1} := \|\nabla\varphi\|_{L^2}$) とすると、$t \to \infty$ で 線形方程式

$$\begin{cases} \Box u_+ = 0, \\ u_+(0) = \varphi_+, \quad \dot{u}_+(0) = \psi_+ \end{cases} \tag{5}$$

の解に エネルギーノルム $\|\nabla u(t)\|_{L^2} + \|\dot{u}(t)\|_{L^2}$ の意味で漸近することが、次の二つの場合に示されている。

(i) Subcritical case [3]: $n \geq 4$ で、f が (2) 及び 次をみたす時。

$$\begin{aligned} &L(\lambda) \leq C\min(\lambda^{p_1}, \lambda^{p_2}), \quad 0 < {}^\exists p_1 < 2^* - 2 < {}^\exists p_2, \\ &G(u) \geq C\min(|u|^2, |u|^{p_3}), \quad 2 \leq {}^\exists p_3. \end{aligned} \tag{6}$$

(ii) Critical case [1]: f が (2) 及び 次をみたす時。

$$\begin{aligned} &L(\lambda) \leq C\lambda^{2^*-2}, \\ &F(u) \geq C|u|^{2^*}, \qquad H(u) := \frac{n-1}{2}G(u) - F(u) \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

以下に述べる定理は、非線形項の条件に関して、上の四つの結果の拡張になっている。

2. 主結果

定理 1 (一意存在). (2) 及び

$$\min(G(u),0)=o(|u|^{2^*})\qquad (|u|:大) \tag{8}$$

を仮定すると、任意の $\varphi\in H^1_{loc},\psi\in L^2_{loc}$ に対し、以下を満たす (1) の解 u が唯一つ存在する。

$$(u,\dot{u})\in C(\mathbb{R};H^1_{loc}\oplus L^2_{loc}),$$
$$u\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^{1+n}),\qquad q=\frac{2(n+1)}{n-2}.$$

定理 2 (漸近挙動). (2) 及び

$$\begin{aligned} &L(\lambda)\le C\lambda^{2^*-2},\\ &G(u)\ge 0 \end{aligned} \tag{9}$$

を仮定すると、任意の $\varphi\in\dot{H}^1,\psi\in L^2$ に対し、u を 定理 1 で与えられる (1) の解とすると ある $(\varphi_+,\psi_+)\in\dot{H}^1\oplus L^2$ に対する (5) の解 u_+ について以下が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} &\|u_+(t)-u(t)\|_{\dot{H}^1}\to 0,\\ &\|\dot{u}_+(t)-\dot{u}(t)\|_{L^2}\to 0. \end{aligned}\right.\quad (t\to\infty)$$

これらの定理は、上に挙げた subcritical case と critical case の結果を両方含んでいるだけでなく、それ以外にもたとえば次のような非線形項に適用できる。

<u>既知の結果に含まれない非線形項の例</u>

(i) $F(u)=|u|^{2^*-4\varepsilon}(1+\cos(1+|u|^2)^\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ 小のとき、f,F,G は subcritical order だが、L は critical order になるため、(3) も (4) も成り立たない。しかし (8) は成り立つ。

(ii) $G(u)=|u|^{2^*}\{1+\cos\log(1+|u|^2)\}$ のときは critical case だが、G が無限に零点を持つので (4) は成り立たない。しかし (8),(9) は成り立つ。

(iii) さらに漸近挙動に関しては、$G(u)=|u|^{2^*}g(u)$ で $g(u)=1/(1+|u|^2)$ または $g(u)=|u|^2/(1+|u|^2)$ とすると、$|u|$ 小で critical, $|u|$

大で subcritical (またはその逆) になるので (6) も (7) も成立しない。しかし (9) は成り立つ。

また、subcritical case の漸近挙動について、[3] の結果を $n=3$ に拡張したことにもなる。なお G, F から f は 次の式で復元される。

$$F(z) = 2|z|^2 \int_0^{|z|} G\left(r\frac{z}{|z|}\right)\frac{dr}{r^3}, \quad f(z) = \partial_{\bar{z}} F(z).$$

3. 証明について

[6], [1] により、定理1,2 の証明は次を示せば良い。

$$\int_{D(t)} |u|^{2^*} dx \to 0. \tag{10}$$

ただし $D(t)$ は light cone K の時刻 t での切断面である。定理1 では K は 解の最大存在時刻 T(が有限であると仮定して) から過去へ向かう backward light cone で、時刻を T に近づけた時を考え、定理2 では K は 任意の未来へ向かう forward light cone で、時刻を無限大にしたときを考える。

従来は、$F(u)$ や $G(u)$ の減衰から (10) を出していたので、(4) や (7) のような仮定が必要となった。私の方法は、線形エネルギー $|\dot{u}|^2+|\nabla u|^2$ の部分的減衰から、Hardy 型不等式を通して (10) を出すので非線形項の条件を緩められる。以下、定理2 で $K=\{(t,x); |x|<t\}$ の場合にもう少し詳しく説明する。そのためにまず記号を導入する。

定義.

$$r = |x|, \qquad \theta = \frac{x}{r}, \qquad \gamma = \frac{r}{t},$$
$$u_r = \theta \cdot \nabla u, \quad u_\theta = \nabla u - \theta u_r, \quad u_H = \frac{x}{t}\dot{u} + \nabla u.$$

次の 新しい Morawetz 型の等式が $|u|^{2^*}$ の評価の出発点である。

補題 1. $\forall u(t,x) \in C^2$, $0 \leq \forall \alpha \leq 1$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int_K \overline{(\Box u + f(u))}\gamma^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\gamma \dot{u} + u_r + \frac{n-1+\alpha-\alpha\gamma^2}{2}\frac{u}{r}\right) dx\, dt \\ = \int_K \gamma^\alpha \Big\{\alpha \frac{|u_H|^2}{r} + (1-\alpha)\frac{|u_\theta|^2}{r} + \frac{|u|^2}{r^2} w(\gamma, n, \alpha) \\ + \frac{n-1+\alpha-\alpha\gamma^2}{2}\frac{G(u)}{r}\Big\} dx\, dt + R_1\end{aligned}$$

ここで $w(\gamma, n, \alpha)$ は非負有界関数。$R_1 = R_1(u, f, n, \alpha)$ は 線形エネルギー $\sup_t \int |\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 dx$ と 線形エネルギーフラックス $\int_{\partial K} |\theta \dot{u} + \nabla u|^2 dS$ で下から評価される。

この式からエネルギークラスの解に対する評価が得られる。$\alpha = 0$ の場合は良く知られた radial Morawetz estimate ([7, (2.27)]) になるが、さらに $n = 3$ で u が x に関して球対称とすると、右辺 K 上の積分は $G(u)$ の項以外すべて 0 になり、非線形項を使わずに評価するという今の目的には役立たない。しかし $\alpha > 0$ とすると $|u_H|^2$ の項から次の Hardy 型不等式によって $|u|^{2^*}$ に対する評価ができる。

補題 2. $(u, \dot{u}) \in C \cap L^\infty(\mathbb{R}; \dot{H}^1 \oplus L^2)$ の時 $-n+1 < \forall \alpha$ に対して次が成り立つ。

$$\int_K |u|^{2^*} \frac{\gamma^\alpha}{r} dx\, dt \leq C \|\nabla u\|_{L_t^\infty L_x^2}^{2^*-2} \int_K |u_H|^2 \frac{\gamma^\alpha}{r} dx\, dt$$

ここで C は n と α だけに依存する正定数である。

この不等式は u が解であるかどうかに関わらず成り立つ。実際は $\alpha = 1$ だけ考えれば十分で、上の二つの補題から

$$\int_K \frac{|u|^{2^*}}{t} dx\, dt < \infty \tag{11}$$

が得られる。この評価は $G(u) \geq C|u|^{2^*}$ を仮定する場合は radial Morawetz estimate から得られていた。(11) は $\int_{D(t)} |u|^{2^*} dx$ が $t \to \infty$ で「ほとんど」0 へ行くことを意味するが、本当に 0 へ収束することを示すために 次の Morawetz 型の等式を使う。

補題 3. $^\forall u(t,x) \in C^2$, $0 < {}^\forall S < {}^\forall T$ に対して次が成り立つ。

$$\frac{1}{T}\mathrm{Re}\int_{K_S^T} \overline{(\Box u + f(u))}\left(t\dot{u} + ru_r + \frac{n-1}{2}u\right) dx\,dt$$
$$= \int_{D(T)} \frac{t-r}{t}\frac{|\dot{u}|^2 + |u_r|^2}{2} + \frac{|u_\theta|^2 + F(u)}{2} + \frac{(n-1)^2}{8}\frac{|u|^2}{tr} + \frac{r}{2t}|d(u)|^2 dx$$
$$+ \int_{K_S^T} \frac{H(u)}{T} dx\,dt + \int_{S<r=t<T} \frac{r}{T}|d(u)|^2 dx$$

ここで $K_S^T = \{(t,x) \in K \mid S < t < T\}$, $d(u) = \dot{u} + u_r + (n-1)u/(2r)$.

$S, T \to \infty, S/T \to 0$ とすると 最後の項はエネルギーフラックスの有界性より 0 に収束し、最後から二番目の項は $|H(u)| \le C|u|^{2^*}$ と (11) より 0 に収束するので、残った $D(T)$ 上の積分が $T \to \infty$ で 0 に収束することが示せる。このアイデアは本質的には [5] によるものだが、彼らはこの後 $\int_{D(T)} F(u)dx$ で $\int_{D(T)} |u|^{2^*}dx$ を評価したために条件 $F(u) \ge C|u|^{2^*}$ が必要となった。ところが実は残りの線形部分の項から $\int_{D(T)} |u|^{2^*}dx$ が評価できることが 次の Hardy 型不等式からわかる。

補題 4. $u(t) \in \dot{H}^1$ の時 次が成り立つ。

$$\int_{D(t)} |u|^{2^*} \le C\|\nabla u\|_{L_x^2}^{2^*-2} \int_{D(t)} \frac{t-r}{t}|u_r|^2 + |u_\theta|^2 + \frac{|u|^2}{tr} dx$$

ここで C は n のみに依存する正定数である。

この不等式も、u が解であるかどうかに関わらず成立し、Sobolev の不等式の精密化と見ることもできる。実際、$\mathbb{R}^n$ が $\partial D(t)$ の一点へ縮むような 縮小変換の列を考えることで、上の不等式から次が従う。

$$\|u\|_{L_x^{2^*}}^{2^*} \le C\|\nabla u\|_{L_x^2}^{2^*-2}\|\nabla' u\|_{L_x^2}^2,$$

ただし ∇' は $x \in \mathbb{R}^n$ の内の $n-1$ 変数についての偏微分を並べたもので、C は上と同じ定数である。

以上の四つの補題より、目標の

$$\int_{D(t)} |u|^{2^*} dx \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

が得られた。

4. Hardy 型不等式について

補題 2,4 は、極座標を取り、r について Hardy 型不等式、θ について Sobolev 型不等式を用いて証明できる。以下、補題 2 の証明の概略を示す。

(補題 2の略証). $\rho^2 = t^2 - r^2, v(\rho, x) = u(t, x)$ と座標変換し、変換後の重みを $w(\rho, r) = r^{\alpha-1}t^{-1-\alpha}\rho$ と置くと、S^{n-1} 上のソボレフ埋蔵定理より、

$$\begin{aligned}\int_K |u|^{2^*}\frac{\gamma^\alpha}{r}dx\,dt &= \int_0^\infty \int |v|^{2^*} w\,dx\,d\rho \\ &\le C\int_0^\infty \left\| \sqrt{\int |v|^{2^*} w\, r^{n-1}dr} \right\|_{W_\theta^{1,p}}^2 d\rho,\end{aligned}$$

ここで $1/p = 1/2 + 1/(n-1)$. この $W_\theta^{1,p}$ ノルムに対しては、部分積分と Hölder の不等式により次の評価が成り立つ。

$$\left\| \sqrt{\int |v|^{2^*} w\, r^{n-1}dr} \right\|_{W_\theta^{1,p}}^2 \le C \left\| r^{\frac{n-2}{2}} v \right\|_{L_r^\infty L_\theta^\beta}^{2^*-2} \int |\nabla v|^2 w\, r^{n-1} dr.$$

ここで $1/\beta = 1/2 - 1/(2(n-1))$. $u_H = \nabla v$ より、座標を元に戻すと、

$$\int_K |u|^{2^*}\frac{\gamma^\alpha}{r}dx\,dt \le C \left\| r^{\frac{n-2}{2}} u \right\|_{L_t^\infty L_r^\infty L_\theta^\beta}^{2^*-2} \int_K |u_H|^2 \frac{\gamma^\alpha}{r} dx\,dt.$$

最後に Hardy 型不等式

$$\left\| r^{\frac{n-2}{2}} u \right\|_{L_r^\infty L_\theta^\beta} \le C \|\nabla u\|_{L_x^2}$$

を適用して目的の不等式を得る。 □

参考文献

1. H. Bahouri and P. Gérard, *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations*, Prépublications 97-34, Université de Paris-Sud , Mai 1997.
2. J. Ginibre, and G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*, Math. Z. **189** (1985), 487–505.
3. J. Ginibre, and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of non-linear wave equations*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 535–573.

4. L. Kapitanski, *Global and unique weak solutions of nonlinear wave equations*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 211–223.
5. J. Shatah and M. Struwe, *Regularity results for nonlinear wave equations*, Ann. of Math. **138** (1993), 503–518.
6. J. Shatah and M. Struwe, *Well-posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth*, IMRN (1994), no. 7, 303–309.
7. W. Strauss, *Nonlinear wave equations*, CBMS Lecture Notes, vol. 73, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1989.