数理解析研究所講究録
1059巻 1998年 89-100

非斉次シュレディンガー方程式の初期値問題の解の SMOOTHING EFFECT

杉本 充 MITSURU SUGIMOTO*

1. 序論

非斉次シュレディンガー方程式の初期値問題の解の smoothing effect を考察した．後に詳述するが，この考察から，フーリエ変換の制限定理を経由する事により，斉次の場合の結果も導かれる．以下，これに関して報告する．

次のシュレディンガー方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} (\partial_t - i\triangle_x)\, u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases} \tag{1.1}$$

但し $u = u(t,x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)$ とする．この問題の解作用素 $e^{it\triangle}$ のユニタリ性から，時刻 t を固定するごとに

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

が成立する．しかし，時刻 t に関して積分を実行することにより，空間変数 x に関する滑らかさの増大を観測する事ができる．たとえば，$n=1$ の場合に，位置 x を固定するごとに

$$\left\| |D_x|^{1/2} u(\cdot, x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} = C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

が成立する．これは Plancherel の定理を用いる事により簡単に導かれる．ここ及びこれ以降において，C は常に（重要ではない）定数をあらわすものとする．

この種の smoothing effect の高空間次元版は，Constantin と Saut [2] により初めて示された．正確には，局所 smoothing effect と呼ばれる評価式

$$\left\| \chi(t,x) |D_x|^{1/2} u \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

を任意の $\chi \in C_0^\infty$ に関して示したのである．

一方，空間次元が $n \ge 3$ の場合に，Kato と Yajima [6] がこの結果の大域化を行った．すなわち，

$$\left\| |x|^{\alpha-1} |D_x|^{\alpha} u \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

を $0 \le \alpha < 1/2$ に対して示したのである．Ben-Artzi と Klainermann [1] も同じ結果を，別の手法を用いて証明している．本稿の第一の目的は，この大域的な結果を $n=2$ の場合にも示す事にある．次は彼らの結果の改良版に相当する．

定理 1.1. $n \ge 2$ 及び $1 - n/2 < \alpha < 1/2$ を仮定する．$\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n_x)$ とする．このとき，初期値問題 (1.1) の解 $u(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}|D_x|^{\alpha} u(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)$ を満たすものがただ一つ存在する．

---

*大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University.

ここでの第二の目的は，同様の結果を，非斉次方程式

$$\begin{cases} (\partial_t - i\triangle_x)\,u = f \\ \qquad\qquad u\,|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

にたいしても示す事である．時刻 t を固定するごとに

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)} \le \int_0^t \|f(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}\,ds$$

が成立する事は，Duhamel の原理や Minkowski の不等式などにより明らかであるが，時間 t に関して積分することにより，何らかの smoothing effect が期待されるはずである．実際，Kenig, Ponce, と Vega [7] は空間次元 $n=1$ の場合に

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \|D_x u(\cdot,x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} \le C\int_{-\infty}^{\infty} \|f(\cdot,x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}\,dx$$

を示している．さらに $n\ge 2$ の場合においても 局所 smoothing effect を示している．本稿では，次の大域的な結果が得られた事を報告する．

定理 1.2. $n\ge 2$, $1-n/2<\alpha<1/2$, 及び $1-n/2<s<1/2$ を仮定する．$|x|^{1-s}f(t,x)\in L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)$ とする．このとき，初期値問題 (1.2) の解 $u(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}|D_x|^{s+\alpha}u(t,x)\in L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)$ を満たすものがただ一つ存在する．

この結果が主張するのは，解は非斉次項 f の減衰度 “s” に応じて滑らかさが増大し，さらには，非斉次項とは無関係に 位数 “$\alpha<1/2$” の滑らかさの増大が観測されるということである．この結果は，$0<\alpha=s<1/2$ の場合を示した Hoshiro [5] の結果の改良版に相当する．Hoshiro が用いた手法は特殊関数論に根差したものであり，$-\triangle_x$ を一般化するには不適切である．この障害を取り除く事も，ここでの第三の目的としたい．

一般的な形での主定理は，第 2 節において述べる事にする．Hoshiro [4], [5] において示されている，球面に沿った方向の滑らかさの増大に関しても，ここでの独自の方法を用いて論じる事にする．波動方程式に関する同種の結果も，同時に示す事ができる．この方面に関しては， Ruiz と Vega [9] の結果を参照していただきたい．

第 3 節において，あるレゾルベント評価を導くが，実はこの評価式から，主定理の証明に必要なものすべてが導出されるのである．主な道具としては Riesz transform の重み付き L^2-評価，極限吸収原理，Green 関数の遠方での減衰評価，等であり，これらは，その一般化とともに独立に構築されてきた理論である．

第 4 節では，このレゾルベント評価から，ある種のフーリエ変換の制限定理を導く．Constantin と Saut [2], あるいは Ben-Artzi と Klainermann [1] 等にも解説されているが，実解析固有の問題でもあるフーリエ変換の制限定理が，斉次方程式 (1.1) の解の smoothing effect を導くための基本的道具である事は，もはや周知の事実である．ここでもその認識にしたがって， 定理 1.1 及びその一般化を証明する．さらに，Hoshiro [4], [5] でも説明されているとおり，レゾルベント評価それ自身から，直接，非斉次方程式 (1.2) の解の smoothing effect が導かれる．ここでもそのアイデアにしたがって 定理 1.2 及びその一般化を示す事にする．

最後に，貴重なご助言を賜りました保城寿彦氏及び堤誉志雄氏にこの場を借りて，感謝の意を表したいと思います．

2. 主な結果

以後，本稿においては常に $n \geq 2$ であるものとする．また $p(\xi) > 0$ は $C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus 0)$ に属する 1 次 positively homogeneous な関数とし，

$$P = p(D_x) = \mathcal{F}_\xi^{-1} p(\xi) \mathcal{F}_x$$

を対応する Fourier multiplier,

$$\Sigma_p = \{\xi; p(\xi) = 1\}$$

を対応する cospher とする．ここで Σ_p はいたるところ Gaussian curvature が消えないものと仮定する．

さらに $q(\xi) > 0$ を $p(\xi)$ と同じ性質を持つ別の関数とし，Λ_q を $\Sigma_q = \{\xi; q(\xi) = 1\}$ の上の Laplace-Beltrami operator とする．$\sigma \in \mathbf{R}$ にたいして，Σ_q 上の楕円型作用素

$$\Omega_q^\sigma = (1 - \Lambda_q)^{\sigma/2}$$

をスペクトル分解を用いて定義する事ができる．これを自然に $\mathbf{R}^n$ 上の作用素とみなす事ができるが，簡単のため，これを同じ Ω_q^σ であらわす事にする．またその formal adjoint $|\nabla q| \Omega_q^\sigma |\nabla q|^{-1}$ を $\left(\Omega_q^\sigma\right)^*$ であらわす事にする．

以下の定理及び系において，常に次を仮定する：

$$1 - n/2 < \alpha < 1/2 - \tilde{\sigma}, \qquad 1 - n/2 < s < 1/2 - \tilde{\eta}$$

ここで $\sigma, \eta \in \mathbf{R}$ に対して $\tilde{\sigma} = \max\{\sigma, 0\}$，$\tilde{\eta} = \max\{\eta, 0\}$ と定義した．なおこれらの仮定から $\sigma < (n-1)/2$ 及び $\eta < (n-1)/2$ が従う事に注意しておく．さらに $n = 2$ の場合には，$\sigma \leq 0$ と $\eta \leq 0$ も仮定する．

このとき序論で述べた定理の一般化として，以下が成立する．

定理 2.1. $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_x^n)$ とする．このとき，初期値問題

$$\begin{cases} \left(\partial_t + iP^2\right) u = 0 \\ u\,|_{t=0} = \varphi \end{cases} \tag{2.1}$$

の解 $u(t, x)$ で $|x|^{\alpha-1} \Omega_q^\sigma |D_x|^\alpha u(t, x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する．

定理 1.1 は，この定理において $p(\xi) = |\xi|$ かつ $\sigma = 0$ とする事により得られる．Hoshiro [4, Theorem 1.2] は，定理 2.1 においては示されていない critical order の場合 $\alpha = 1/2 - \tilde{\sigma}$ $(0 < \sigma \leq 1/2)$ を，$p(\xi) = q(\xi) = |\xi|$ かつ $n \geq 3$ の場合に，特殊関数論を駆使して示している事に言及しておく．彼の結果は，球面に沿った方向のみの滑らかさも考慮すれば，滑らかさの増大度はちょうど $1/2$ $(= \alpha + \sigma)$ となる事を主張するものである．この増大度 $1/2$ は Constantin と Saut [2] の局所 smoothing effect の結果でも示されているものである．なお，定理 2.1 によれば，non-critical な場合 $\alpha < 1/2 - \tilde{\sigma}$ を示すだけならば，$q(\xi)$ と $p(\xi)$ は何ら関連している必要もないことがわかる．この定理が $p(\xi) = q(\xi)$ の場合に限れば critical order $\alpha = 1/2 - \tilde{\sigma}$ に関しても成立する事が予想されるが，今のところ未解決である．

一般化された波動方程式の場合にも，以下の同様の結果が成立する：

定理 2.2. $|D_x|^{1/2}\varphi \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ かつ $|D_x|^{-1/2}\psi \in L^2(\mathbf{R}_x^n)$ とする．このとき，初期値問題

$$\left\{\begin{aligned} \left(\partial_t^2 + P^2\right) w &= 0 \\ w\,|_{t=0} &= \varphi \\ \partial_t w\,|_{t=0} &= \psi \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

の解 $w(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}\,\Omega_q^\sigma |D_x|^\alpha\, w(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する．

Hoshiro [4, Theorem 1.2] は，定理 2.2 の critical order $\alpha = 1/2 - \tilde{\sigma}$ $(0 < \sigma < (n-1)/2)$ の場合を $p(\xi) = q(\xi) = |\xi|$ かつ $n \geq 3$ の場合に示している．
非斉次方程式に関しては，以下の事柄が成立する．

定理 2.3. $|x|^{1-s}\left(\Omega_q^{-\eta}\right)^* f(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ とする．このとき，初期値問題

$$\left\{\begin{aligned} \left(\partial_t + iP^2\right) u &= f \\ u\,|_{t=0} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

の解 $u(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}\,\Omega_q^\sigma |D_x|^{s+\alpha} u(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する．

定理 1.2 は，この定理において $p(\xi) = |\xi|$ かつ $\sigma = \eta = 0$ とする事によって得られる．定理 2.3 の critical order，すなわち $\alpha = 1/2 - \tilde{\sigma}$ かつ $\alpha = 1/2 - \tilde{\eta}$ の場合が，$p(\xi) = q(\xi)$ の場合に限れば成立する事も予想されるが，やはり未解決である．
一般化された波動方程式の場合に関しても，同様の結果が成立する．

定理 2.4. $|x|^{1-s}\left(\Omega_q^{-\eta}\right)^* f(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ とする．このとき，初期値問題

$$\left\{\begin{aligned} \left(\partial_t^2 + P^2\right) w &= f \\ w\,|_{t=0} &= 0 \\ \partial_t w\,|_{t=0} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

の解 $w(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}\,\Omega_q^\sigma |D_x|^{s+\alpha} w(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する．

ここで $p(\xi) = q(\xi) = |\xi|$ の場合に限れば，その回転対称性から $\left[\Omega_p^\sigma, P^2\right] = 0$ や $\Omega_p^\sigma = \left(\Omega_p^\sigma\right)^*$ が導かれる事に注意すれば，定理 2.3 及び 定理 2.4 の系として以下を得る．

系 2.5. $|x|^{1-s} f(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ とする．このとき，初期値問題 (2.3) の $P^2 = -\triangle$ の場合の解 $u(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}\,\Omega_{|\xi|}^{\sigma+\eta} |D_x|^{s+\alpha} u(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する．

系 2.6. $|x|^{1-s} f(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ とする．このとき 初期値問題 (2.4) の $P^2 = -\triangle$ の場合の解 $w(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}\,\Omega_{|\xi|}^{\sigma+\eta} |D_x|^{s+\alpha} w(t,x) \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する．

Hoshiro [5, Theorem 2] は 系 2.5 を $\sigma=\eta$ かつ $0<\alpha=s<1/2-\tilde{\sigma}$ の場合に得ている. ($n=2$ の場合の制限 $\sigma\le 0$ が不要である点に関しては，彼の結果の方が優れている)

定理 2.1 から 定理 2.4 までをまとめると，以下のようになる：

系 2.7. $|x|^{1-s}\left(\Omega_q^{-\eta}\right)^* f(t,x)\in L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)$ かつ $|D_x|^s\varphi\in L^2(\mathbf{R}_x^n)$ とする. このとき，初期値問題

$$\begin{cases} \left(\partial_t+iP^2\right)u=f \\ u\,|_{t=0}=\varphi \end{cases}$$

の解 $u(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}\Omega_q^\sigma|D_x|^{s+\alpha}u(t,x)\in L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する.

系 2.8. $|x|^{1-s}\left(\Omega_q^{-\eta}\right)^* f(t,x)\in L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)$, $|D_x|^{s+1/2}\varphi\in L^2(\mathbf{R}_x^n)$, かつ $|D_x|^{s-1/2}\psi\in L^2(\mathbf{R}_x^n)$ とする. このとき，初期値問題

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2+P^2\right)w=f \\ w\,|_{t=0}=\varphi \\ \partial_t w\,|_{t=0}=\psi \end{cases}$$

の解 $w(t,x)$ で $|x|^{\alpha-1}\Omega_q^\sigma|D_x|^{s+\alpha}u(t,x)\in L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)$ を満たすものがただ一つ存在する.

定理 2.1 から 定理 2.4 までの証明は，以下の節において順次与えられる.

3. レゾルベント評価式

前節の定理の証明において，その根幹となるのが，次のレゾルベント評価式である. この評価から，定理 2.1 から 定理 2.4 までの証明に必要な情報のすべてを抽出する事ができる.

定理 3.1. $1-n/2<a<1/2-\tilde{\sigma}$ 及び $1-n/2<b<1/2-\tilde{\eta}$ を仮定する. 但し $\sigma,\eta\in\mathbf{R}$ かつ $\tilde{\sigma}=\max\{\sigma,0\}$, $\tilde{\eta}=\max\{\eta,0\}$ とする. さらに $n=2$ の場合には $\sigma\le 0$ 及び $\eta\le 0$ も仮定する. このとき

$$\sup_{\operatorname{Im}\lambda>0}\left\| |x|^{a-1}\Omega_q^\sigma|D|^{a+b}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1}\left(\Omega_q^\eta\right)^* v(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\le C\left\| |x|^{1-b}v(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \tag{3.1}$$

が成立する.

定理 3.1 は部分的に Sugimoto と Tsujimoto [12] において示されている. ここでの論法は，本質的にはこれに基づくものである. 以下，ノルム $\|\cdot\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ を簡単のため $\|\cdot\|$ であらわす事にする. まず，次に注意する.

補題 3.1. $l\in\mathbf{R}$ 及び $k\le 0$ を仮定する. このとき

$$\left\||x|^l\Omega_q^k u\right\|\le C\left\||x|^l u\right\|,\qquad \left\||x|^l\left(\Omega_q^k\right)^* u\right\|\le C\left\||x|^l u\right\|$$

が成立する.

補題 3.2. $-n/2 < l < n/2 - k$ 及び $0 \le k \le n^\circ$ を仮定する．ただし n° は n 未満の最大の偶数とする．このとき

$$\left\||x|^l \Omega_q^k |D|^{-k} u\right\| \le C \left\||x|^{l+k} u\right\|, \qquad \left\||x|^l |D|^{-k} \left(\Omega_q^k\right)^* u\right\| \le C \left\||x|^{l+k} u\right\|$$

が成立する．

Ω_q^k 及び $\left(\Omega_q^k\right)^*$ が，負の指数 k に関して $L^2(\Sigma_q)$ 上の有界作用素となる事と，ある定数 $C > 0$ が存在して $C^{-1} \le |x|/q(x) \le C$ となる事を用いれば，補題 3.1 の証明は簡単である．そこで，補題 3.2 の $k = n^\circ$ の場合を示す事にする．一般の $0 \le k \le n^\circ$ に関しては，trivial case の $k = 0$ の場合との補間により得られるし，二番目の評価は，一番目の評価の双対に他ならないからである．そこでまず，$k \in 2\mathbf{N}$ に対する次の表現に着目する．

$$\begin{aligned}\Omega_q^k &= \left(1 - \sum_{i<j} \left(\left(\frac{q}{|\nabla q|} \frac{\partial q}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} - \left(\frac{q}{|\nabla q|} \frac{\partial q}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{k/2} \\ &= \sum_{0 \le |\gamma| \le k} a_\gamma(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\gamma\end{aligned}$$

ここで $a_\gamma(x)$ は，次数 $|\gamma|$ の positively homogeneous な関数である．このとき

$$\begin{aligned}\left\||x|^l \Omega_q^{n^\circ} |D|^{-n^\circ} u\right\| \le& C \sum_{0 \le |\gamma| \le n^\circ} \left\||x|^l a_\gamma(x) D^\gamma |D|^{-n^\circ} u\right\| \\ \le& C \sum_{0 \le |\gamma| \le n^\circ - 1} \left\||x|^{l+|\gamma|} |D|^{|\gamma| - n^\circ} u\right\| + C \left\||x|^{l+n^\circ} u\right\| \\ \le& C \left\||x|^{l+n^\circ} u\right\|\end{aligned}$$

となり，求めたい式が得られる．ただしここで，以下の命題を用いた事に注意しておく．

命題 3.1 ([11], Chapter 11, Theorem 5). $-n/2 < k < n/2$ を仮定する．このとき

$$\left\| |x|^k m(D) v \right\| \le C \sum_{|\gamma| \le n} \sup_{\xi \in \mathbf{R}^n} \left| |\xi|^{|\gamma|} D^\gamma m(\xi) \right| \left\| |x|^k v \right\|$$

が成立する．

命題 3.2 ([10], Theorem B*). $k < n/2,\ l < n/2,\ 0 < m < n,$ 及び $k + l + m = n$ を仮定する．このとき

$$\begin{aligned}\left\||x|^{-l} |D|^{m-n} v\right\| &= \left\| |x|^{-l} \int \frac{v(y)}{|x-y|^m} dy \right\| \\ &\le C \left\| |x|^k v \right\|\end{aligned}$$

が成立する．

さて，評価 (3.1) の $\sigma \leq 0$ や $\eta \leq 0$ の場合は， 補題 3.1 を用いる事により，簡単に $\sigma = \eta = 0$ の場合に帰着される．一方, 評価 (3.1) の $\sigma \geq 0$ や $\eta \geq 0$ の場合もやはり $\sigma = \eta = 0$ の場合に帰着される．実際，補題 3.2 及び 評価 (3.1) の $\sigma = \eta = 0$ の場合から

$$\begin{aligned}
&\left\| |x|^{a-1}\Omega_q^\sigma |D|^{a+b}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1}\left(\Omega_q^\eta\right)^* v\right\| \\
\leq & C\left\| |x|^{(a+\sigma)-1}|D|^{(a+\sigma)+(b+\eta)}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1}|D|^{-\eta}\left(\Omega_q^\eta\right)^* v\right\| \\
\leq & C\left\| |x|^{1-(b+\eta)}|D|^{-\eta}\left(\Omega_q^\eta\right)^* v\right\| \\
\leq & C\left\| |x|^{1-b} v\right\|
\end{aligned}$$

を得るからである．$1-n/2 < a < 1/2-\tilde{\sigma}$, $1-n/2 < b < 1/2-\tilde{\eta}$ からは$\sigma < (n-1)/2$, $\eta < (n-1)/2$ が導かれるが，$n \geq 3$ の場合には $(n-1)/2 \leq n^\circ$ となっている事にも注意しておく必要がある．

さらに, $(3-n)/2 \leq a+b$ を仮定しても一般性を失わない．実際, $a+b < (3-n)/2$ の場合には, $\delta = (3-n)/2-(a+b)$ とおけば $(3-n)/2 \leq (a+\delta)+b$ 及び $1-n/2 < (a+\delta) < 1/2$ が成立する．ここで $0 < \delta < (n-1)/2$ となる事にも注意する．このとき，命題 3.2 と 評価 (3.1) において $\sigma = \eta = 0$ かつ a を $a+\delta$ で置き換えた式から

$$\begin{aligned}
&\sup_{\operatorname{Im}\lambda>0}\left\| |x|^{a-1}|D|^{a+b}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1} v\right\| \\
\leq & C\sup_{\operatorname{Im}\lambda>0}\left\| |x|^{(a+\delta)-1}|D|^{(a+\delta)+b}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1} v\right\| \\
\leq & C\left\| |x|^{1-b} v\right\|
\end{aligned}$$

を得る．これは，まさに一般の場合の評価式である．

かくして，評価 (3.1) の $\sigma = \eta = 0$ の場合を，条件

$$1-n/2 < a < 1/2, \qquad 1-n/2 < b < 1/2, \qquad (3-n)/2 \leq a+b$$

のもとで示せばよい事に帰着された．その際

$$1/2 < 1-a < n/2, \qquad 1/2 < 1-b < n/2, \qquad 0 < a+b-2+n < n$$

に注意しておくが．以下いちいち断る事なく，これらをしばしば用いることにする．さらに scaling argument により，以下の評価を示せばよい事がわかる：

$$\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\ |\lambda|=1}}\left\| |x|^{a-1}|D|^{a+b}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1}(1-\varphi\circ p)(D)\, v\right\| \leq C\left\| |x|^{1-b} v\right\|, \tag{3.2}$$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\ |\lambda|=1}}\left\| |x|^{a-1}|D|^{a+b}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1}(\varphi\circ p)(D)\, v\right\| \leq C\left\| |x|^{1-b} v\right\| \tag{3.3}$$

ここで $\varphi(\rho) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ は $\rho = 1$ の近傍で 1 となる関数である．

評価 (3.2) は 命題 3.1 及び 命題 3.2 からの帰結である．実際,

$$m_\lambda(\xi) = |\xi|^2\left(p(\xi)^2-\lambda^2\right)^{-1}(1-\varphi\circ p)(\xi)$$

とおけば

$$\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\||x|^{a-1}|D|^{(a+b-2+n)-n}m_\lambda(D)v\right\|\le C\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\||x|^{1-b}m_\lambda(D)v\right\|$$
$$\le C\left\||x|^{1-b}v\right\|$$

が成立するが，これはまさに評価 (3.2) である．

評価 (3.3) は，命題 3.1 とつぎの評価から容易に得られる：

$$\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\|\,|x|^{a-1}P^{a+b}\bigl(P^2-\lambda^2\bigr)^{-1}(\varphi\circ p)(D)\,v\,\right\|\le C\left\|\,|x|^{1-b}v\,\right\| \tag{3.4}$$

評価 (3.4) の証明には，以下の命題を用いる：

命題 3.3 ([3], Theorem 14.2.2). $\Psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ とする．$k>1/2$ 及び $l>1/2$ を仮定する．このとき

$$\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\|\,(1+|x|)^{-l}\bigl(P^2-\lambda^2\bigr)^{-1}\Psi(D)\,v\,\right\|\le C\left\|\,(1+|x|)^{k}v\,\right\|$$

が成立する．

命題 3.4 ([8], Theorem 6.3). $\psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ とする．このとき

$$\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left|\,\mathcal{F}^{-1}\left[\bigl(p(\xi)^2-\lambda^2\bigr)^{-1}(\psi\circ p)(\xi)\right](x)\,\right|\le C\,|x|^{-(n-1)/2}$$

が成立する．

ここで Σ_p の曲率に関する条件は，実は命題 3.4 のためにのみ必要である事に注意しておこう．正確には, Matsumura [8] では，命題 3.4 が $|x|$ が十分大きい場合に対してのみ述べられているが, $|x|$ が小さい場合にも成立する．実際

$$\begin{aligned}
&\left|\,\mathcal{F}^{-1}\left[\bigl(p(\xi)^2-\lambda^2\bigr)^{-1}(\psi\circ p)(\xi)\right](x)\,\right|\\
=&\int_{\Sigma_p}\mathcal{F}_\rho^{-1}\left[\frac{\rho^{n-1}\psi(\rho)}{\rho^2-\lambda^2}\right](x\cdot\omega)\,\frac{d\omega}{|\nabla p|}\\
\le& C\left\|\mathcal{F}_\rho^{-1}\left[\frac{1}{\rho^2-\lambda^2}\right]*\mathcal{F}_\rho^{-1}\left[\rho^{n-1}\psi(\rho)\right]\right\|_{L^\infty}\\
\le& C\left\|\mathcal{F}_\rho^{-1}\left[\frac{1}{\rho^2-\lambda^2}\right]\right\|_{L^\infty}\left\|\mathcal{F}_\rho^{-1}\left[\rho^{n-1}\psi(\rho)\right]\right\|_{L1}\\
\le& C
\end{aligned}$$

が $\operatorname{Im}\lambda>0$ かつ $|\lambda|=1$ にたいして成立する．ここで $d\omega$ は，Σ_p の標準的 surface element をあらわしている．また

$$\mathcal{F}_\rho^{-1}\left[\frac{1}{\rho^2-\lambda^2}\right](r)=\frac{i}{\lambda}e^{i\lambda|r|}$$

にも注意した．

さて，評価 (3.4) の証明に移ろう．$\psi(\rho)=\rho^{a+b}\varphi(\rho)$ かつ $\Psi=\psi\circ p$ とおくとき，

$$\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\|(1-\chi)|x|^{a-1}\bigl(P^2-\lambda^2\bigr)^{-1}\Psi(D)\,(1-\chi)\,v\right\|\le C\left\||x|^{1-b}v\right\|$$

が，命題 3.3 により得られる．ここで $\chi(x)$ は集合 $\{x;|x|\le 1\}$ の定義関数である．一方，先に仮定した $(3-n)/2\le a+b$ から $1-a\le b+(n-1)/2<n/2$ をうるので，

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\|\chi\,|x|^{a-1}\bigl(P^2-\lambda^2\bigr)^{-1}\Psi(D)\,v\right\|\\
\le&\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\|\chi\,|x|^{-b-(n-1)/2}\bigl(P^2-\lambda^2\bigr)^{-1}\Psi(D)\,v\right\|\\
\le&C\left\||x|^{-b-(n-1)/2}\int\frac{|v(y)|}{|x-y|^{(n-1)/2}}\,dy\right\|\\
\le&C\left\||x|^{1-b}\,v\right\|.
\end{aligned}$$

が成立する．ここで 命題 3.2 及び 命題 3.4 を用いた．同様に，$(3-n)/2\le a+b$ から $1-b\le(n-1)/2+a<n/2$ をうるので

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\operatorname{Im}\lambda>0\\|\lambda|=1}}\left\||x|^{a-1}\left(P^2-\lambda^2\right)^{-1}\Psi(D)\,\chi v\right\|&\le C\left\||x|^{(n-1)/2+a}\,\chi v\right\|\\
&\le C\left\||x|^{1-b}v\right\|
\end{aligned}$$

が成立する．かくして，評価 (3.4) が示され，定理 3.1 の証明が完成した．

4. 制限定理と SMOOTHING EFFECT

まず最初に，定理 3.1 からフーリエ変換の制限定理が導かれる事を説明しよう．これが，定理 2.1 及び 定理 2.2 を証明するための基本的手段となる．以下の公式に着目する．

$$\begin{aligned}
\left\|\hat f\right\|^2_{L^2(\Sigma_p\,;\,d\omega/|\nabla p|)}&=\int_{\Sigma_p}\left|\hat f(\omega)\right|^2\frac{d\omega}{|\nabla p(\omega)|}\\
&=4(2\pi)^{n-1}\lim_{\substack{\zeta\to1\\\operatorname{Im}\zeta>0}}\operatorname{Im}\left((P^2-\zeta)^{-1}f,f\right)_{L^2(\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

(Hörmander [3, Corollary 14.3.10] を参照せよ．) ここで $d\omega$ は Σ_p の標準的な surface element をあらわす．この公式と 定理 3.1 の $b=a$ 及び $\sigma=\eta$ の場合とから，

$$\begin{aligned}
&\left\|\hat f\right\|^2_{L^2(\Sigma_p\,;\,d\omega/|\nabla p|)}\\
\le&C\limsup_{\substack{\zeta\to1\\\operatorname{Im}\zeta>0}}\left|\left(|x|^{a-1}\Omega_q^\sigma|D|^b\bigl(P^2-\zeta\bigr)^{-1}\bigl(\Omega_q^\sigma\bigr)^*\bigl(\Omega_q^{-\sigma}\bigr)^*|D|^{-a}f,|x|^{1-a}\bigl(\Omega_q^{-\sigma}\bigr)^*|D|^{-a}f\right)\right|\\
\le&C\left\||x|^{1-a}\bigl(\Omega_q^{-\sigma}\bigr)^*|D|^{-a}f\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

を得る．さらに scaling argument から次の制限定理が得られる：

定理 4.1. $1-n/2<a<1/2-\tilde{\sigma}$ を仮定する．但し $\sigma\in\mathbf{R}$ かつ $\tilde{\sigma}=\max\{\sigma,0\}$ とする．さらに $n=2$ の場合には $\sigma\le 0$ も仮定する．このとき

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\rho\Sigma_p\,;\,\rho^{n-1}d\omega/|\nabla p|)}\le C\sqrt{\rho}\left\||x|^{1-a}\left(\Omega_q^{-\sigma}\right)^*|D|^{-a}f\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

が成立する．ここで $\rho>0$, $\rho\Sigma_p=\{\rho\omega;\omega\in\Sigma_p\}$ である．

Hoshiro [4, Theorem 1.1] は，この評価式を，$p(\xi)=q(\xi)=|\xi|$ かつ $n\ge 3$ の場合にではあるが critical order $a=1/2-\tilde{\sigma}$ にたいしても成立する事を示している．

次に, 定理 2.1 及び 定理 2.2 の証明に入る．Ben-Artzi と Klainermann [1], あるいは Hoshiro [4] などでも解説されているが，これらの定理は，本質的に定理 4.1 の双対概念に他ならない．この事を正確に述べよう．

$$T=e^{-itP^2}:\mathcal{S}(\mathbf{R}^n_x)\to\mathcal{S}'(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)$$

とする．このとき，この formal adjoint $T^*:\mathcal{S}(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)\to\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n_x)$ は

$$T^*\left[v(t,x)\right]=\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[(\mathcal{F}_{t,x}v)\left(-p(\xi)^2,\xi\right)\right]$$

で与えられる．実際, Plancherel の定理により,

$$\begin{aligned}
&(T(t)\varphi(x),v(t,x))_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}\\
=&(2\pi)^{-n}\iint e^{-itp(\xi)^2}(\mathcal{F}_x\varphi)(\xi)\overline{\mathcal{F}_x\left[v(t,x)\right](\xi)}\,dtd\xi\\
=&(2\pi)^{-n}\int(\mathcal{F}_x\varphi)(\xi)\overline{(\mathcal{F}_{t,x}v)(-p(\xi)^2,\xi)}\,d\xi\\
=&\left(\varphi(x),\mathcal{F}_\xi^{-1}\left[(\mathcal{F}_{t,x}v)\left(-p(\xi)^2,\xi\right)\right](x)\right)_{L^2(R^n_x)}
\end{aligned}$$

を得るからである．Plancherel の定理, 定理 4.1, 及び変数変換 $\xi\mapsto\rho\omega$ $(\rho>0,\omega\in\Sigma_p)$ と $\rho^2\mapsto\rho$ を用いる事により

$$\begin{aligned}
\|T^*v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}&=C\left\|(\mathcal{F}_{t,x}v)(-p(\xi)^2,\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_\xi)}\\
&=C\int_0^\infty\left(\int_{\rho\Sigma_p}\left|(\mathcal{F}_{t,x}v)\left(-\rho^2,\omega\right)\right|^2\frac{\rho^{n-1}d\omega}{|\nabla p(\omega)|}\right)d\rho\\
&\le C\int_0^\infty\rho\left\||x|^{1-a}\left(\Omega_q^{-\sigma}\right)^*|D_x|^{-a}(\mathcal{F}_tv)(-\rho^2,x)\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}d\rho\\
&\le C\int_{-\infty}^\infty\left\||x|^{1-a}\left(\Omega_q^{-\sigma}\right)^*|D_x|^{-a}(\mathcal{F}_tv)(\rho,x)\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}d\rho\\
&=C\left\||x|^{1-a}\left(\Omega_q^{-\sigma}\right)^*|D_x|^{-a}v(t,x)\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}
\end{aligned}$$

が $1-n/2<a<1/2-\tilde{\sigma}$ にたいして成り立つ．したがって duality argument により

$$\left\||x|^{a-1}\Omega_q^\sigma|D_x|^aT\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}\le C\left\|\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

が証明される．$u=T\varphi$ は初期値問題 (2.1) の解なので, $a=\alpha$ とすれば，定理 2.1 が得られる．また，同様の議論が $T=e^{\pm itP}|D_x|^{-1/2}$ にたいしても成立する．初期値問題 (2.2) の解は $e^{\pm itP}$ 及び $e^{\pm itP}|D_x|^{-1}$ の線形結合で表現されることから，定理 2.2 が得られる．

最後に, 定理 2.3 及び 定理 2.4 を証明しよう. やはり Hoshiro [4], [5] において解説されているように, 非斉次方程式 (2.3) の解 u は

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,x) &= \frac{1}{i}\mathcal{F}_\tau^{-1}\big(P^2+(\tau-i\varepsilon)\big)^{-1}\mathcal{F}_t f_+(t,x) \\ &\quad + \frac{1}{i}\mathcal{F}_\tau^{-1}\big(P^2+(\tau+i\varepsilon)\big)^{-1}\mathcal{F}_t f_-(t,x) \end{aligned}$$

の $\varepsilon \searrow 0$ としたときの weak limit として表現される. ここで $f_\pm$ は, 関数 f に Heaviside 関数 $Y(\pm t)$, すなわち 集合 $\{t; \pm t \geq 0\}$ の定義関数を掛けたものをあらわす. 実際,

$$u_\varepsilon^\pm(t,x) = \frac{1}{i}\mathcal{F}_\tau^{-1}\big(P^2+(\tau\mp i\varepsilon)\big)^{-1}\mathcal{F}_t f_\pm(t,x)$$

は $(\partial_t + iP^2 \pm \varepsilon)u_\varepsilon^\pm = f_\pm$ を満たすので, $u^\pm = \lim_{\varepsilon\searrow 0} u_\varepsilon^\pm$ の weak limit は

$$\big(\partial_t + iP^2\big)u^\pm = f_\pm$$

の解である. さらに,

$$\begin{aligned} u^\pm(0,x) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{P^2+\tau\mp i0}(\mathcal{F}_t f_\pm)(\tau,\xi)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int \mathcal{F}_\tau\left[\frac{1}{P^2+\tau\mp i0}\right](s) f_\pm(s,x)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int e^{isP^2}\left(\mathcal{F}_\tau\left[\frac{1}{\tau\mp i0}\right](s) f_\pm(s,x)\right)ds \\ &= \pm\int e^{isP^2}(Y(\mp s) f_\pm(s,x))\,ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, 初期条件も満足する. 同様に,

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(t,x) &= \mathcal{F}_\tau^{-1}\big(P^2-(\tau-i\varepsilon)^2\big)^{-1}\mathcal{F}_t f_+(t,x) \\ &\quad + \mathcal{F}_\tau^{-1}\big(P^2-(\tau+i\varepsilon)^2\big)^{-1}\mathcal{F}_t f_-(t,x) \end{aligned}$$

の $\varepsilon \searrow 0$ における weak limit は一般化された非斉次波動方程式 (2.4) の解である. 定理 3.1 の $a=\alpha$, $b=s$ の場合からこれらの weak limit の存在も正当化され, 定理 2.3 及び 定理 2.4 の証明が完成した.

References

[1] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, J. Analyse Math. **58** (1992), 25–37.

[2] P. Constantin and J. C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.

[3] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[4] T. Hoshiro, *On weighted L^2 estimates of solutions to wave equations*, J. Analyse Math. (to appear).

[5] ———, *On the estimates for Helmholtz operator*, (preprint).

[6] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.

[7] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré **10** (1993), 255–288.

[8] M. Matsumura, *Asymptotic behavior at infinity for Green's functions of first order systems with characteristics of nonuniform multiplicity*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976), 317–377.

[9] A. Ruiz and L. Vega, *Local regularity of solutions to wave equations with time-dependent potentials*, Duke Math. J. **76** (1994), 913–940.

[10] E. M. Stein and G. Weiss, *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space*, J. Math. Mech. **7** (1958), 503–514.

[11] J. -O. Strömberg and A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces*, Lecture Notes in Math. **1381**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.

[12] M. Sugimoto and K. Tsujimoto, *A resolvent estimate and a smoothing property of inhomogeneous Schrödinger equations*, (preprint).