

バビロニアの数学 ---- 楔形文字で書かれた古代数学

河合塾文理 室井和男 (Kazuo MUROI)

§1. 書記と数学

古バビロニア時代（紀元前20～16世紀）の書記にとって、シュメール語と数学の学習は必須のものであった。当時の学習の一端を伝える粘土板文書に、バビロニア数学でよく使われる術語も見られる。（資料1参照）また、掛算表と逆数表は一対となり、計算に役立てられた。（資料2,3参照）

§2. 遺産相続問題

古バビロニア時代の数学文書には「遺産相続問題」と言われる一群の問題がある。これは、土地や銀（当時のお金である）を兄弟間に分配するものである。ハンムラピ法典のように兄弟に均等に分けたのでは、数学の問題とはならない。多くの場合、長男から末弟への配分が等差数列となるように問題が作られていた。なお、相続される銀は1マナ（約500g）程度であり、ハンムラピ法典が規定する労働者の賃金（日給）の約2000倍である。（資料4参照）

VAT 8522, obverse II には次のような方程式が出てくる。

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 59 \text{ (gín, 1 gín} = 0;1 \text{ ma-na)}$$

$$a_i = b_i + c \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

$$(1/2) \cdot b_1 = b_5, \quad c = 45/5 = 9 \text{ (gín)}$$

$$(1/3)(b_1 - b_2) = b_2 - b_3 = b_3 - b_4 = b_4 - b_5.$$

粘土板上の計算メモによると a_i は次のようにして求められた。 b_i の値として、仮りに

$$5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

とおく。上の最後の式を考えて

$$7 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

とする。さらに、 $(1/2) \cdot b_1 = b_5$ とするため、各人に 5 を加えて

$$12 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6$$

とする。これらの和は 42。59 gín のうち 45 gín を 5 人で分けるから、残りは 14 gín。上で求めた和 42 はこの 14 gín に相当するものだから

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 : 12 + 9 + 8 + 7 + 6 = 14 : 42$$

より、12, 9, 8, 7, 6 にそれぞれ $14/42 = 1/3 = 0;20$ を掛けて

$$b_1 = 4, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 2;40, \quad b_4 = 2;20, \quad b_5 = 2$$

を得る。さらに $c = 9$ を加えて

$$a_1 = 13, \quad a_2 = 12, \quad a_3 = 11;40, \quad a_4 = 11;20, \quad a_5 = 11$$

となる。(資料 5 参照)

§3. 数列の和の計算

紀元前3世紀ごろの数学文書AO 6484から、数列の和に関する問題を2題取り上げる。この時代の数学の術語は、古バビロニア時代のものと異なることが多い。(資料6参照)

第1問の内容は

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^9 - 1 + 2^9 = 17,3.$$

これは一般に

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことが知られていたということになるだろう。同様の公式は中世のインドでも知られていたという。(林隆夫「インドの数学」(中公新書) P. 274 ~ 277.)

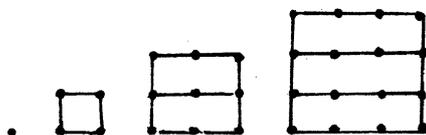
第2問の内容は

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = (1 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{2}{3}) \cdot 55 = 6,25.$$

これは

$$\sum_{k=1}^n k^2 = (1 \cdot \frac{1}{3} + n \cdot \frac{2}{3}) \sum_{k=1}^n k \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と解釈できる。なお、 $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ は、古バビロニア時代の数学文書の中で使われている。 $\sum_{k=1}^n k^2$ の公式は、次のようにして得られたと推定されている (Neugebauer)。 $n=4$ の場合の下図などより



$$\begin{aligned} 1+2+3+4 &- (1+2+3) \\ 1+2+3+4 &- (1+2) \\ 1+2+3+4 &- 1 \\ 1+2+3+4 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k - 1 + \sum_{k=1}^n k - (1+2) + \dots \\
&\quad + \sum_{k=1}^n k - \{1+2+3+\dots+(n-1)\} \\
&= n \sum_{k=1}^n k - \{1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots \\
&\quad + (1+2+3+\dots+n)\} + (1+2+3+\dots+n) \\
&= n \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} + \sum_{k=1}^n k \\
&= (n + \frac{1}{2}) \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 \\
\therefore \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{2n+1}{2} \sum_{k=1}^n k \\
\therefore \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{2n+1}{3} \sum_{k=1}^n k
\end{aligned}$$

ところで、古バビロニア時代の数学文書に、数字 1 を形容する、または数字 1 と並置される術語に

wāṣium , wāṣitum

がある。これらは、動詞 waṣûm (出て行く) の派生語であり、直訳すれば「出て行くもの、出て行く…」となる。これらを Thureau-Dangin は、「単位」と訳している。つまり、数を単位から構成されるものと考え、そこから「出てくる」ものが単位ということである。もし、これが正しいとすれば、wāṣium , wāṣitum は上図の黒丸・に相当するものと考えられ、ユークリッドの原論第 7 巻の定義と関係がありそうに思われる。Neugebauer は、この解釈に反対し、一変数の 2 次方程式に現れる特徴的な表現である点を重視している。用例も少な

く、数学的な手がかりも多くないため解釈は難しい。私は、数学以外の文書も調べて、この問題に対する自分なりの解答を出したい。今のところ、私は暫定的に、Thureau-Danginの解釈を支持しておきたい。(資料7は、古バビロニア時代の羊の内臓による占い文書)

バビロニアの数学---楔形文字で書かれた古代数学

1998年5月12日 京都にて

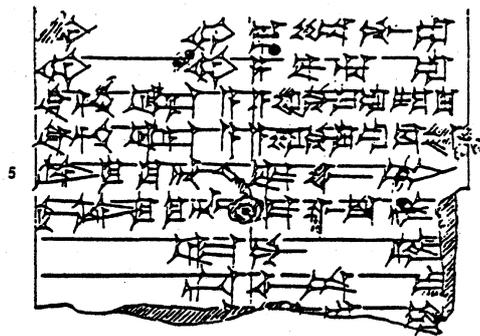
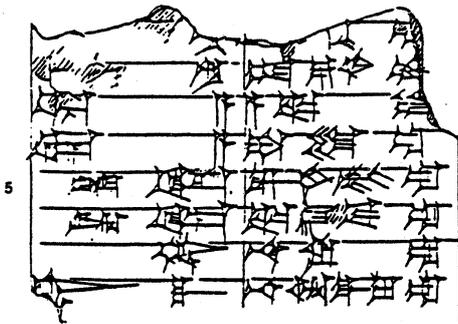
室井和男

資料1(単語帳)

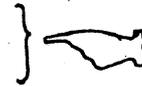
OBVERSE

CBS 10194

REVERSE



A. Poebel,
Historical and
Grammatical Text
(1914), No. 141.



Obverse

1. [šur]
2. [igi-zal]-šur
3. kú-a
4. nag-a
5. ma-ma ma₅
6. tuk-ri túkur
7. nar
8. nar-gal

- [š_i-a]-hu-u[m] (笑う)
 še-e-eh-tum (笑い)
 a-ka-lum (食べる)
 ša-tu-um (飲む)
 qa₄-mu-um (粉にする)
 ka-sa-su-um (かむ)
 na-ru-um (音楽家)
 na-ar-gal-lu-um (「大」音楽家)

Reverse

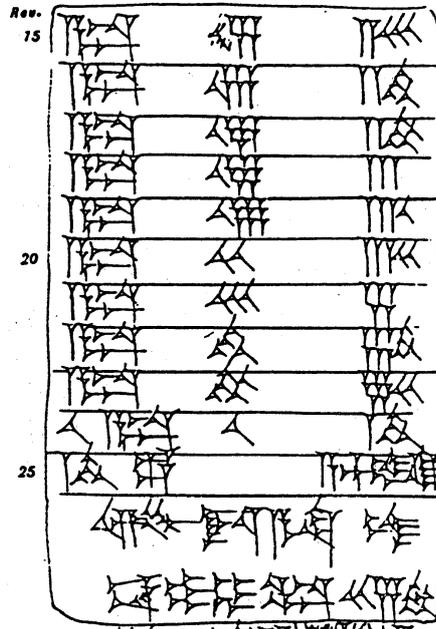
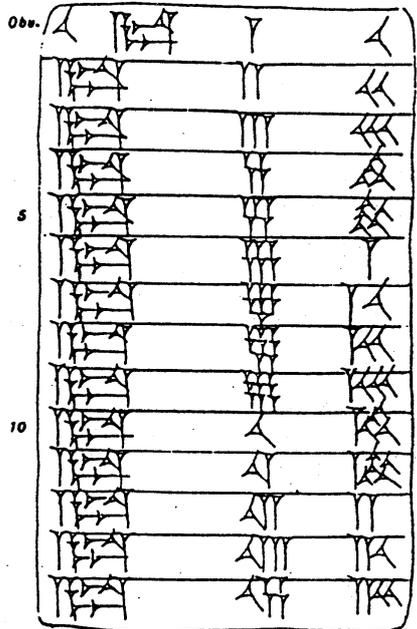
1. ru₅-ru₅
2. du₇-du₇
3. ki-máš-kú-a
4. ki-máš-nag-a
5. 'ú₆túg-túg-bal
6. mí 'ú₆túg-túg-bal
7. sag
8. uš

- e-le-pu-um (発芽する)
 sa-ba-'u₅-um (波が高くなる)
 a-šar bu-lu-um i-ku-lu
 (家畜が食べた場所)
 a-šar bu-lu-um iš-tu-ú
 (家畜が飲んだ場所)
 ka-pi-šum (「服装を変える人」)
 ka-pi-iš-tum (「服装を変える女」)
 pu-tum (幅)
 š_i-du-um (長さ)



資料 2 (掛算表)

MLC 117



 く を書き落す

 粘土板の底部に
書かれた文字

A.T. Clay, *Epics Hymns Omens and Other Texts* (1923).
No. 38.

Obverse

1. 10 a-rá 1 10

2-14. a-rá n 10n (n=2, 3, ..., 14)

Reverse

15-23. a-rá n 10n (n=15, ..., 19, 20, 30, 40, 50)

24. 10 a-rá 10 1, 40

25. 1, 40-e <10>-àm íb-si₃ (!)

Colophon

im(!)-gíd-da A-na-tum (一欄の粘土板. アナートゥム)

' ' gan-gan-è <u₄>-25-kam (第9月25日)

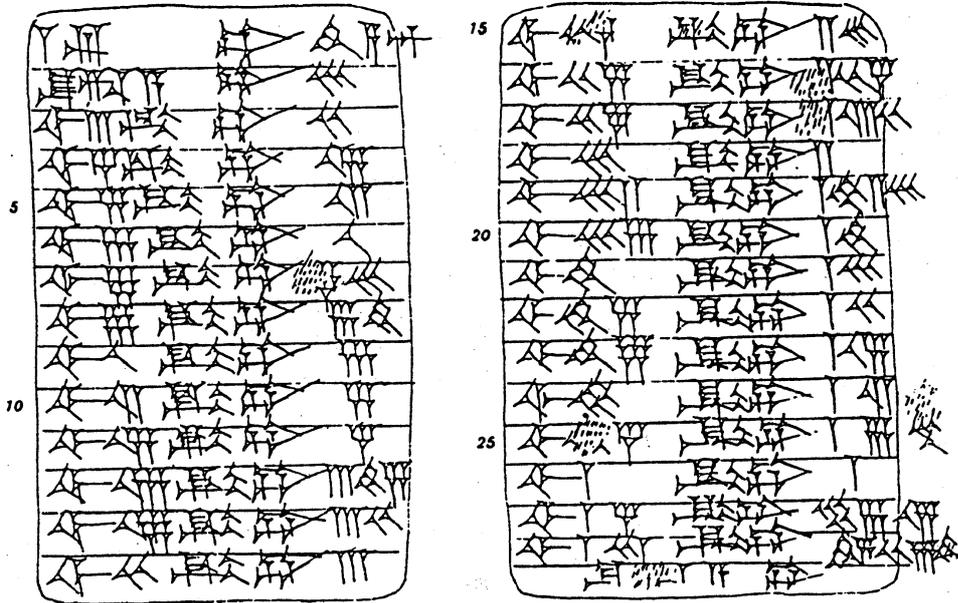
mu Sa(!)-am-sú-i-l[u-n]a lugal-e

(年、サムスイルナ、王は)

Ša-ág é^d [En]-líl-la (...エンリル神の神殿)

資料3 (逆数表)

MLC 1670



45 26 40 は
44 26 40 の
書き誤り

Clay, 同上書, No. 37.

Obverse

1. 1 šanabi-bi 40-àm (1, その3分の2は0;40である)
2. šu-ri-a-bi 30 (その2分の1は0;30)
3. igi-3-gál-bi 20 (その3分の1は0;20)
- 4-28. igi-n-gál-bi \bar{n} (そのn分の1は \bar{n})

n=	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	27	30
	32	36	40	45	48	50	54	1, 0	1, 4	1, 21					
\bar{n} =	0;15	0;12	0;10	0;7, 30	0;6, 40	0;6	0;5	0;4							
	0;3, 45	0;3, 20	0;3	0;2, 30	0;2, 24										
	0;2, 13, 20	0;2	0;1, 52, 30	0;1, 40	0;1, 30										
	0;1, 20	0;1, 15	0;1, 12	0;1, 6, 40	0;1										
	0;0, 56, 15	0;0, 44, 26, 40													
29. šu-[r]i-a-bi

Ha-am-mu-ra-pi
資料4 (~~孫~~ ~~法~~ ~~典~~ ~~法~~ 法典)

ハンムラピ法典 第165条

šum-ma a-wi-lum
a-na ibila-šu
ša i-in-šu maḥ-ru

a-ša¹⁵ kiri. ū é
iš-ru-ku
ku-nu-kam iš-ṭur-šum
wa-ar-ka a-bu-um
a-na ši-im-tim
it-ta-al-ku
i-nu-ma aḥ-ḥu
i-zu-uz-zu
qī-iš-ti a-bu-um
id-di-nu-šum
i-le-qé-ma
e-le-nu-um-ma
i-na níg-GA é-a-ba
mi-it-ḥa-ri-iš
i-zu-uz-zu

もしも、人が
彼の跡取りへ
彼の目に留まる
（彼の跡取りへ）
土地、果樹園と家を
贈り、
遺言状を彼に書いてやり、
その後、父（人）が
運命へ
赴き（死亡し）、
兄弟たちが
（遺産を）分けるとき、
父が彼に与えた贈り物を

彼は受け取り、
その上に、
父の財産を
均等に
彼ら（兄弟たち）は分ける。

ハンムラピ法典 第273条

šum-ma a-wi-lum
¹⁶ḥun-gá i-gur
iš-tu re-eš ša-at-tim
a-na ḥa-am-ši-im
itu-im
6 še kū-babbar
i-na u₄-l-kam
i-na-ad-di-in
iš-tu ši-ši-im
itu-im
a-di ta-aq-ti-it
ša-at-tim
5 še kū-babbar
i-na u₄-l-kam
i-na-ad-di-in

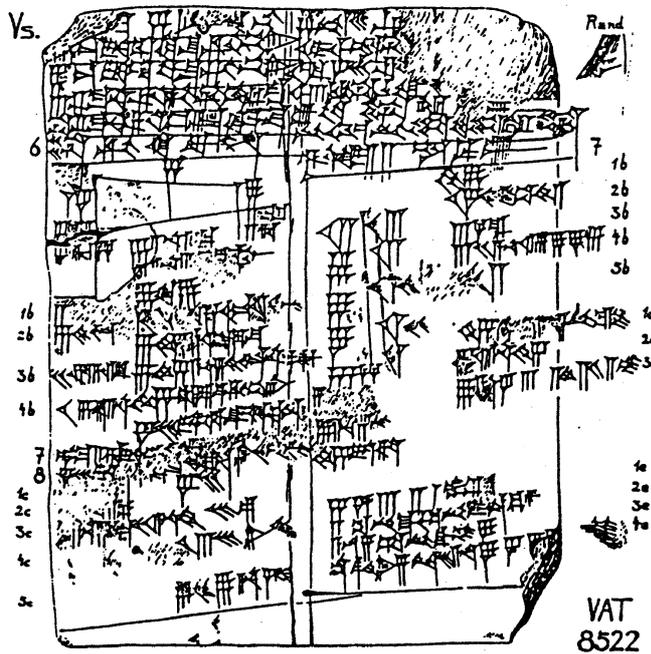
もしも、人が
労働者を雇うならば、
年の初めから
第5月まで

銀6 sheを
1日につき
彼は支払う。
第6月から

年末までは

銀5 sheを
1日につき
彼は支払う。

資料5 (遺産相続問題)



問題文, 以下は計算のメモ.
3行目にある $\text{𒀭} \lll$ は $\text{𒀭} \text{𒀭}$ の
書き誤り

𒀭 45 [kù-babbar a-na] 5 šeš
zu-u[z]

𒀭 45 i-na kù-babbar

VAT 8522, Obverse II

1. 5 šeš-meš 5/6 [ma-na 9 gín kù-babbar]
2. mi-ši-il ša [šeš gal šeš tur il-qé]
3. ū 4,30 (sic) kù-ba[bbar 5 šeš-meš i-zu-zu-ú]
4. igi-3-gál ša šeš gal u[gu šeš ús-s]a
5. ú-te-le-el-l[u]-ú
6. šeš ugu šeš li-te-le-el-le
7. kù-babbar ki-ia-a il-qú-ú

1. 5人兄弟。5/6 ma-naと9 gínの銀。
2. 長男の半分を末弟は受け取り、
3. そして45(!)gínを5人兄弟は(均等に)分けた。
- 4, 5. 長男が次男を越える分の3分の1を
6. 兄弟は兄弟を越えよ。
7. 銀を彼らはどれだけ受け取ったか。

O. Neugebauer, Mathematische Keilschrift Texte I, II, III
(1935-1937)

K. Muroi, Inheritance Problems of Babylonian Mathematics,
Historia Scientiarum No.34 (1988) pp. 11-19.

資料 6 ($\Sigma 2^k$, Σk^2 の計算)

AO 6484



F. Thureau-Dangin,
Tablettes d'Uruk
(1922), No. 33.

(注)
分離記号 δ はピリオドの役目をしている。

Upper edge

ina a-mat ʿAnu u An-tum liš-li[m]

アヌ神とアントゥム女神の指図により、(私が行なうすべてのことが私の両手に) 完成しますように。

数字0として使われることもあった。

Obverse

1. *ta 1 en 10 gar a-na 2-ma bal-it (šubalkit)*

[gar-gar-ma 8,32: 1 ta 8,32 lal-ma]

2. *re-ḫi 8,31: 8,31 a-na 8,32 tab-ma 1.,3*

[šid-tú (minūtu)]

1. 1から10までを置け。2へ次々と進めよ。

[加えよ、そして8,32。1を8,32から引け、そして]

2. 残り8,31。8,31を8,32に加えよ、そして17,3。

計算(は、このようである)。

3. *tam-ḫar-tum šá ta 1 GAM 1: 1 en 10*

GAM 10: 1,40 *ki-i en šid-tú (minūtu)*

1 GAM 20: [1/3]

4. *du-ma 20: 10 GAM 40: 2-ta (šitta)*

šum-meš (qātāti) *du-ma 6,40: 6,40 ù 20 7*

5. *7 GAM 55 du-ma 6,25: 6,25 šid-tú (minūtu)*

3. $1 \cdot 1 = 1$ から $10 \cdot 10 = 1,40$ までの平方数(の和)。

計算は、どのようか。 $1 \cdot 0;20$ [つまり1/3]

4. を掛けよ、そして $0;20$ 。10と $0;40$ つまり3分の2を掛けよ、そして $6;40$ 。 $6;40$ と $0;20$ で7。

5. 7と55を掛けよ、そして $6,25$ 。 $6,25$ (が和)。計算(は、このようである)。

資料7 (占い文書)

YOS 10, 36 III 3-5

3. *šumma* (DIŠ) *i-na á-zi ur₅ š₁i-pu-um ú* (sic)
pi-iṭ-ru-um i-na á-gùb
4. *š₁i-ip-ka a-na ma-a-at ¹⁶kúr ur-ra-ad-ma*
5. *wa-ši-a-am i-le-eq-qé*

3. もしも、肺の右に「足」そして「割れ目」が左に（あるならば）、
4. あなたの足は、敵の国土へ降り、そして
5. 出て来る人を捕まえるであろう。

YOS 10, 46, V 37-39

37. *šumma* (DIŠ) *¹³*tukul i-mi-tim i-na*
i-mi-it-ti ká(!) é-gal ša-ki-im-ma
38. *bu-da-a-šu a-na ka(!) é-gal pa-nu-šu*
ši-it re-š₁i-im iṭ-ṭù-lu
39. *wa-ši a-bu-ul-li-ia ¹⁶kúr-am i-da-a-ak*

37. もしも、右の「武器」が「宮殿の門」の右に置かれてあり、そして
38. その「両肩」が「宮殿の門」に、その正面が「頭のはれもの」（に）向いているならば
39. 私の城門を出て行く人は、敵を殺すであろう。

A. Goetze, *Old Babylonian Omen Texts* (=YOS 10)
 (1945), Nos. 36, 46.