

低レイノルズ数域での二次元回転チャネル乱流の速度分布と乱れ性

名古屋工業大学 鬼頭修己 (Osami Kitoh)

名古屋工業大学 中林功一 (Koichi Nakabayashi)

1. はじめに

回転チャネル乱流の研究は、1960年代に始まったターボ機械の内部流れに及ぼすコリオリの力の研究から本格的に始まった。平均せん断成分がない一様乱流と異なり、チャネル流では壁の存在により平均速度のせん断成分が存在する。このせん断成分とコリオリの力との相互作用により、回転チャネル特有の流れが現れる。その一つは、低アスペクト比のチャネル流で、せん断成分による渦度が回転ベクトル Ω と直交する場合に現れる二次流れである。他の一つは、二次元チャネル流で、渦度が Ω と平行な場合に現れる乱れの促進及び抑制効果である。いずれも流体機械の特性に関連があるが、ここでは後者のみについて平均速度分布と乱れ特性について述べる。

2. 管摩擦係数および速度分布則⁽¹⁾

2. 1. 次元解析による速度分布の相似則

図1に示すような回転二次元チャネル乱流を考える。流れは、完全に発達しているとする。このとき、速度 U は y のみの関数となり、次式のように与えられる。

$$U = f_1(D, y, u_*, \nu, \Omega), \quad (1)$$

ここで u_* は摩擦速度である。 u_* と ν を用いて式(1)を無次元化すると、

$$U/u_* = f_2(yu_*/\nu, u_*^2/\Omega\nu, u_*D/\nu). \quad (2)$$

粘性長さスケール $\delta_\nu = \nu/u_*$ とコリオリ長さスケール $\delta_c = u_*/\Omega$ を用いると式(2)は、

$$U^+ = U/u_* = f_2(y/\delta_v, \pm\delta_c/\delta_v, D/\delta_v), \quad (3)$$

と表現される。式(3)より、速度分布を規定するパラメータは3つの長さスケール δ_v 、 δ_c 、 D の比として作られるコリオリパラメータ $\Omega\nu/u_*^2$ とレイノルズ数 $D u_*/\nu$ である。ここで現れる3つの長さスケールはそれぞれ流路の中の特定の領域で乱れに対して影響を持っている。K1、K2、K3を定数とすると、その影響領域は、次式で表される。

$$\begin{aligned} y < K_1 \delta_v & \quad (\text{viscous length scale } \delta_v), \\ y > K_2 \delta_c & \quad (\text{Coriolis length scale } \delta_c), \\ y > K_3 D & \quad (\text{outer length scale } D), \end{aligned} \quad (4)$$

図2はこれを概念的に示したものである。この図より、長さスケールの影響の現れ方により種々の領域が存在することがわかる。長さスケールの大小関係は、式(3)で示したように流れのパラメータに依存するので、図2に示した境界線の位置もパラメータにより上下に変化する。この様子をパラメータ平面上で表したのが図3の流れ領域線図である。座標軸a,bには、それぞれコリオリパラメータとレイノルズ数が対数目盛でとってある。座標cは、 $\ln(y/D)$ である。図中には、 $y/D=K_3$ 、 $y/\delta_v=K_1$ 、 $y/\delta_c=K_2$ の三つの面が描かれている。それぞれの面は、図2の各境界線に対応している。 $y/\delta_c=K_2$ の面をとくにK2平面と呼び、この面より上の領域でコリオリの影響が現れることを示す。K2平面の式は次式で与えられる。

$$\ln(y/D) + \ln(\delta_v/\delta_c) = \ln(K_2) - \ln(Re^*). \quad (5)$$

図3より、コリオリの力が影響する領域がパラメータによりどのように変化するかを知ることができる。例えば、コリオリパラメータ $\Omega\nu/u_*^2$ を一定にしたまま Re^*

を増加させてもコリオリ影響領域の下限の y^+ は一定である。逆に、 Re^* を一定に保ち $\Omega\nu/u_*^2$ を大きくすると、コリオリの効果は y^+ の小さい領域に侵入することが知られる。

図2の各境界線で区切られた領域には、それぞれ特有の長さスケールがあるので、それらを用いて速度分布の相似則を求める。始めに図2で、 $K1\delta_v$ より上かつ $K3D$ より下の領域を考える。回転していないチャンネルでは、この領域で代表長さスケールが無いので通常対数則

$$\begin{aligned} d(U/u_*)/d(y/\delta_v) &= 1/(\kappa y/\delta_v) \\ U^+ &= (1/\kappa)\ln y^+ + C_1. \end{aligned} \quad (6)$$

が成立する。回転チャンネルで、 $K3D > K2\delta_v$ の条件下では、コリオリ長さスケールのみが現れる領域が存在することになる。よって、ここをコリオリ領域と呼ぶことにする。この領域では次式が成立する。

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+} - 2\beta \frac{\Omega\nu}{u_*^2} \quad (7)$$

ここで β は定数で Monin-Oboukov 係数である。これを y^+ で積分すれば、

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ - 2\beta \frac{\Omega\nu}{u_*^2} y^+ + C_2, \quad (8)$$

通常対数則との差をとると、

$$\Delta U^+ = -2\beta \frac{\Omega\nu}{u_*^2} y^+ + (C_2 - C_1). \quad (9)$$

ここでの相似則をコリオリ長さスケールを用いて別の形で表現すれば、以下のように書ける。

$$dU^+/dy_c^* = f_s(y/\delta_c). \quad (10)$$

つぎにコア領域の速度分布則を考察する。式(1)を D と u_* を用いて無次元化する

と、

$$d(U/u_*)/d(y/D) = f_6(y/D, \nu/u_* D, \Omega D/u_*). \quad (11)$$

コリオリのパラメータは $\Omega D/u_*$ となる。回転が速く $\Omega D/u_*$ が著しく大きい場合、乱れ運動は壁面摩擦よりもコリオリ力に強く依存するようになるため、速度スケールとして u_* を用いるのは不適當である。ゆえに上式で、 ν と u_* が入らない関数形を求めると、

$$\frac{d(U/u_*)}{d(y/D)} = f\left(\frac{\Omega D}{u_*}\right)$$

よって、

$$dU/dy = A\Omega. \quad (12)$$

すなわち、 U は直線分布となる。係数 A の値は、相似則からは求まらないが、実験⁽²⁾ や DNS⁽³⁾ の結果より $A=2$ となることが分かっている。これは、コア部（流路中央部）において絶対渦度が零であることに対応している。 $\Omega D/u_*$ の値が、式(12) が成立するほど大きくない場合には、速度分布式として式(12)からのずれを考え

$$dU/dy - 2\Omega = u_*/D f_7(y/D, \Omega D/u_*). \quad (13)$$

を導入する。これを y で積分して

$$(U_c - U - 2\Omega y)/u_* = f_7(y/D, \Omega D/u_*), \quad (14)$$

を得る。ここで $s = D - y$, $U_c = U(s = D)$.

2. 2 管摩擦係数

ここでは実験により得られた管摩擦係数の結果を示す。図4は、管路長 Δx で生じる圧力降下 Δp から求められる管摩擦係数 λ の Re に対する関係を示す。

図中の R_Ω は回転レイノルズ数で、 $R_\Omega = 4 D^2 \Omega / \nu$ である。層流域では、回転チャネル流の λ は、コリオリ力の影響により $\Omega=0$ の場合に比べ増大する。しかし乱流域では、回転による λ の増加はほとんどない。これは、乱流域において流路の圧力側と負圧側で壁面摩擦がそれぞれ増大、減少するため全体として変化がないようにみえるためである。

図5は、圧力側と負圧側の摩擦速度比をJohnston ら⁽²⁾にならひ、 $Ro = 2\Omega D / Um$ に対してまとめたものである。回転による摩擦速度の増減は、一本の曲線上に乗らず、流れのレイノルズ数ごとに異なった変化をする。式(2)で導いたように、壁面摩擦に関係するような壁近傍流れに対する回転の効果は、コリオリパラメータ $\Omega \nu / u_*^2$ で表現される。よって、これを用いて図5のデータを整理しなおすと図6になる。レイノルズ数によるバラツキは小さくなり、すべての条件のデータがうまくまとまるようになる。

2. 3 速度分布

図7は、測定した速度分布の例である。流れは全体的に圧力側に寄り、圧力側での壁近くでの速度勾配は大きく、負圧側で小さく（層流化の方向）なる。壁変数を用いて速度分布を表示すると、図8のようになる。回転の効果により圧力側で通常の壁法則より下へ、負圧側で上へずれる。その程度は、コリオリパラメータ $\Omega \nu / u_*^2$ に依存している。これを確かめるため、通常の壁法則より ΔU が1%ずれる y^+ の位置を求め、これを $y_{1\%}^+$ とし、種々の条件でこの量がどのように変化するかを調べた。図9がその結果である。 $y_{1\%}^+$ は、コリオリの効果が見れる下限とみなせるので、 K_2 平面に対応する。図より、 $y_{1\%}^+$ はレイノルズ数によらず、 $\Omega \nu / u_*^2$ のみに依存しており、傾きが-1の直線上に分布している。これより、式(4)のコリオリ影響領域が $y > K_2$ であることが実験的に証明された。係数 K_2 は0.008~0.015である。コリオリ領域の速度分布則を確かめるため、式(9)の関係を調べた。図10より ΔU^+ はコリオリ領域で y^+ に対し直線関係となり、式(9)の正しさが示される。定数 β は、4~6の値となる。なお負圧側のデータで直線分布に乗らないものは再層流化が起こっている場合のものである。

コア領域の速度分布を式 (14) に従って整理すると、図 11 のようになる。
 $\Omega D/u_*$ が小さい場合、コリオリの効果は小さく通常の数欠損則に一致する。このパラメータが大きくなるに従い、この欠損則から下にずれ、 $\Omega D/u_* > 1.6$ で縦軸の値が零となる ($1-\delta/D > 0.1$)。これは、絶対渦度が零となる式 (12) の速度分布に対応している。

3. 乱れ特性⁽⁴⁾

コリオリ力の作用により、乱れは圧力側で促進され、負圧側で抑制されることが知られている。ここではこれをレイノルズ応力輸送方程式を用いて調べる。壁変数を用いるとこれらの式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt^+} \left(\frac{u^2}{u_*^2} \right) &= -2 \underbrace{\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \frac{dU^+}{dy^+}}_{\text{生成項}} + 4 \underbrace{\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \frac{\Omega\nu}{u_*^2}}_{\text{コリオリの項}} \\ &+ \Phi_{u^2}^+ + D_{u^2}^+ - \frac{2}{3} \epsilon^+ \\ \frac{D}{Dt^+} \left(\frac{v^2}{u_*^2} \right) &= -4 \underbrace{\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \frac{\Omega\nu}{u_*^2}}_{\text{コリオリの項}} + \Phi_{v^2}^+ \\ &+ D_{v^2}^+ - \frac{2}{3} \epsilon^+ \\ \frac{D}{Dt^+} \left(-\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \right) &= \frac{v^2}{u_*^2} \frac{dU^+}{dy^+} + 2 \underbrace{\frac{\Omega\nu}{u_*^2} \frac{u^2-v^2}{u_*^2}}_{\text{コリオリの項}} \\ &+ \Phi_{-uv}^+ + D_{-uv}^+ \end{aligned}$$

ここで Φ 、 D 、 ϵ はそれぞれ圧力・歪相関、拡散、散逸の各項である。コリオリの作用は、 $\overline{u^2}$ と $\overline{v^2}$ の間のエネルギーの交換とレイノルズせん断応力 $-\overline{uv}$ の生成に寄与する。図 12 に上式中の乱れ生成項、コリオリの項、さらに Launder ら⁽⁵⁾ のモデルによる圧力・歪相関項の分布を示す。 $\overline{u^2}$ 、 $\overline{v^2}$ へのコリオリの項の直接的な寄与は他の項と比べ非常に小さい。一方、 $-\overline{uv}$ へのコリオリの項の寄与は比較的大きい。

以上の結果より、コリオリの力は、 $-\overline{uv}$ に直接働きかけレイノルズせん断応力を変化させ、その結果速度分布 $U^+(y^+)$ や乱れ強さ分布に間接的に影響しているといえる。

4. おわりに

ここでは、回転チャンネル乱流の平均速度分布則について次元解析に基づいて速度の相似則を導いた。回転チャンネル乱流の理解の現状は、数少ない実験とDNSで得られた結果をもとに平均量や乱れ統計量に関するものにとどまっている段階である。静止チャンネル乱流研究で行なわれているようなストリークや乱れ渦の詳細な構造がコリオリの力によりどのように影響を受けるかについては、今後おもにDNSのデータを基に調べられるだろう。回転場の均質乱流で確認されている乱れの二次元化（テラー・プラウドマンの定理）が、三次元構造（ストリーク構造）が本質的に重要である壁乱流にどのように現れるか流体力学的にみて興味ある問題である。

文献

- (1) Nakabayashi, K., & Kitoh, O., 1996 Low Reynolds number fully developed two-dimensional turbulent channel flow with system rotation, *J. Fluid Mech.*, 315, 1-29.
- (2) Johnston, J.P., Halleen, R.M. & Lezius, D.K., 1972 Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 56, pt.3, 533-557.
- (3) Kristofferesen, R. & Andersson H.I., 1993 Direct simulation of low-Reynolds number turbulent flow in a rotating channel, *J. Fluid Mech.*, 256, 163-197.
- (4) 中林鬼頭小西、1994、完全に発達した回転チャンネル内乱流の乱れ特性、*機論*, B, 60-571, 849-856.
- (5) Launder, B.E., Tselepidakis, D.P. & Younis, B.A., 1987 A second moment closure study of rotating channel flow, *J. Fluid Mech.*, 183, 63-75.

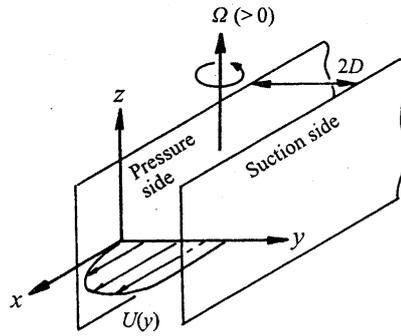


FIGURE 1. Flow geometry and coordinate system. Pressure and suction sides in the figure are for $\Omega > 0$.

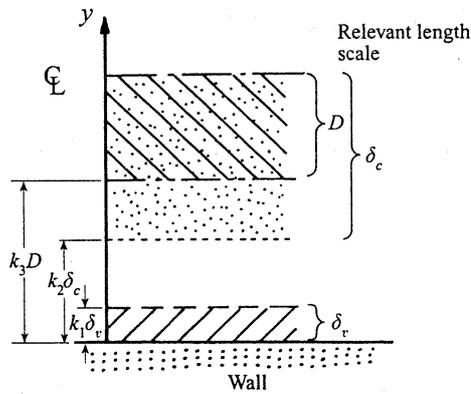


FIGURE 2. Ranges of each length scale.

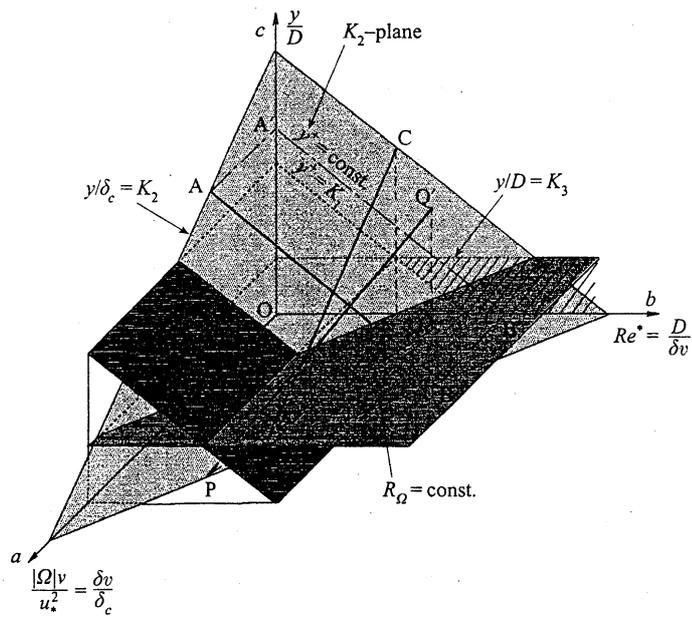


FIGURE 3. Flow regime diagram.

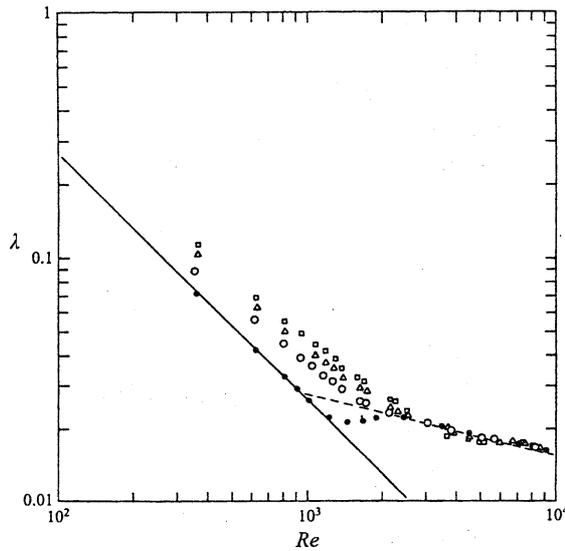


FIGURE 4 Friction factor: —, $\lambda = 26.1/Re$ (theoretical line for aspect ratio 8 in laminar flow); ----, $\lambda = 0.154 Re^{-1/4}$ (Blasius formula); ●, $R_D = 0$; ○, 27; △, 74; □, 145.

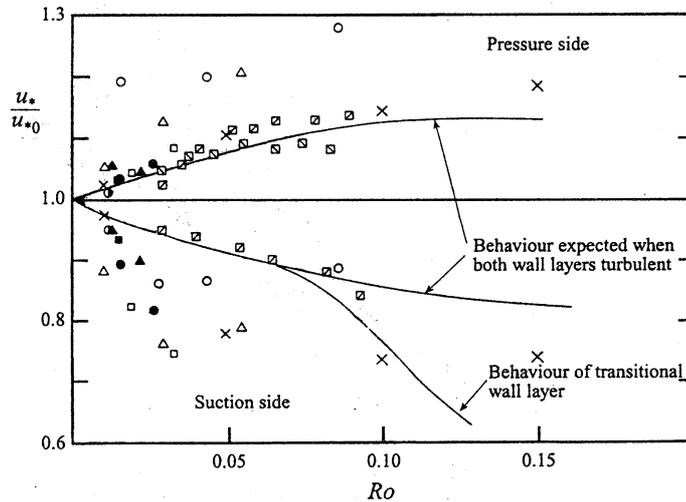


FIGURE 5 Friction velocity ratio versus rotation number. Johnston *et al.* (1972): —, $Re = 10000$; ▣, 25700; ▤, 33100. Kristoffersen & Andersson (DNS, $Re = 5800$): ×. Present: ○, $Re = 1700$; △, 2500; □, 3700; ●, 4500; ▲, 5500; ■, 8000; ◐, 10000.

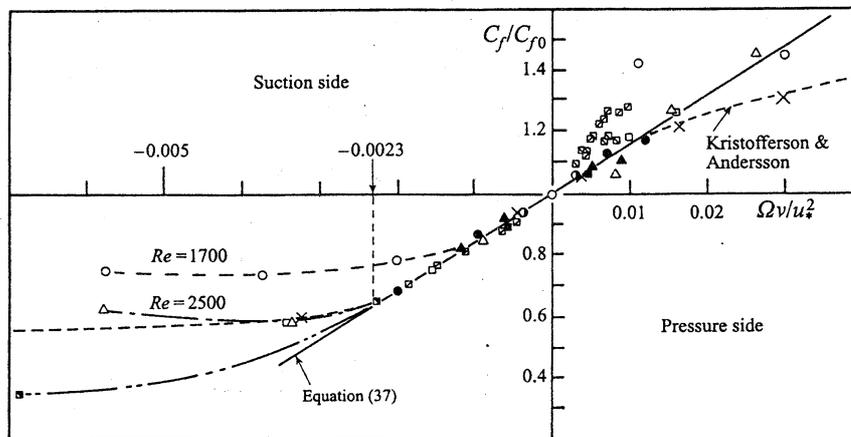


FIGURE 6 Skin friction coefficient ratio against $\Omega\nu/u_*^2$. For symbols see figure 5. Additional data from Johnston *et al.* (1972): ▤, $Re = 11400$.

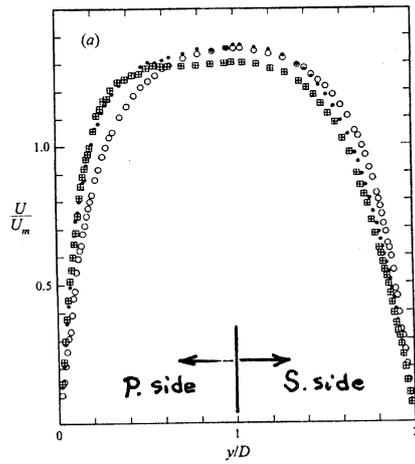


Figure 7

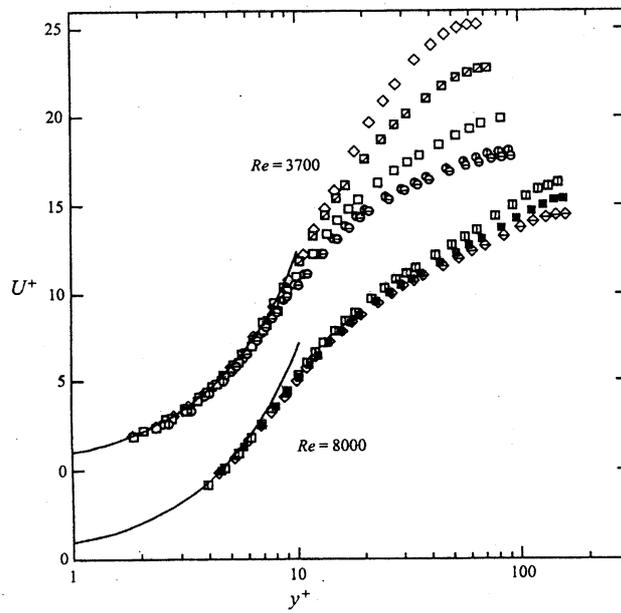


FIGURE 8 Velocity profile for rotating channel flow. Solid lines show $U^+ = y^+$.

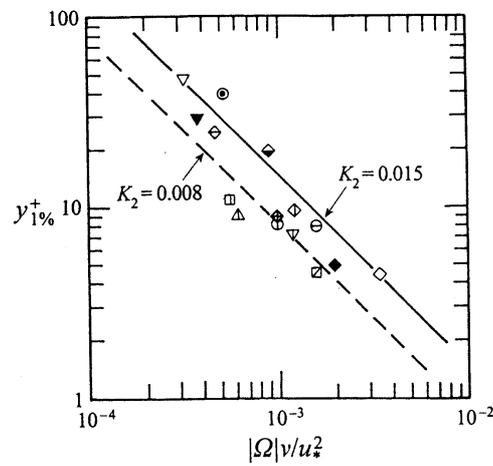


FIGURE 9 Coriolis force penetrating distance.

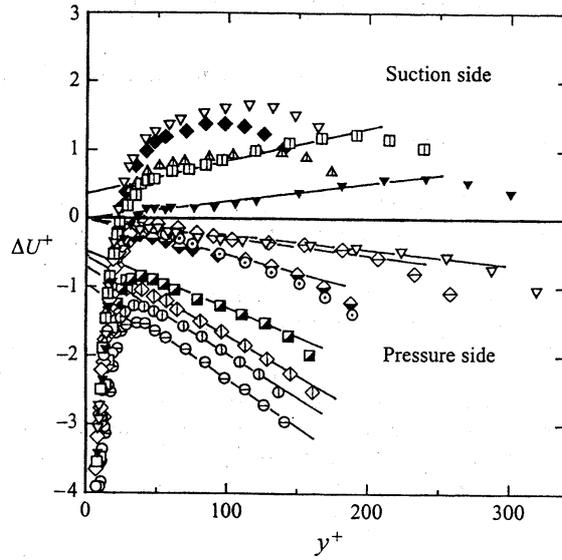


FIGURE 10 Velocity deviation from conventional log-law ΔU^+ .

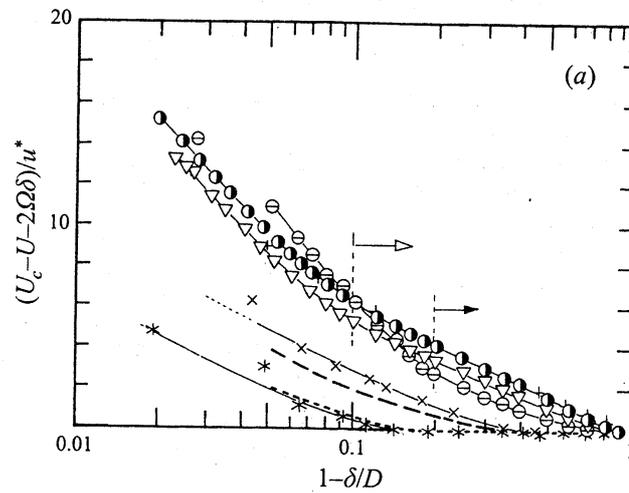


FIGURE 11 Velocity defect law. See table 1 for symbols. (a) Pressure side. Kristoffersen & Andersson: ---, $\Omega D/u_* = 0.95$; - - - - - , 3.16. Johnston *et al.*: +, $\Omega D/u_* = 0$; x, 0.55; *, 1.57.

