数理解析研究所講究録
1085 巻 1999 年 21-24

Simple K3 特異点分類定理のプログラム化

神戸大学総合人間科学研究科
門脇 圭治 (Keiji KADOWAKI) *

神戸大学発達科学部
高橋　正 (Tadashi TAKAHASHI) †

概　要

In the theory of two-dimensional singularities, simple elliptic singularities and cusp singularities are regarded as the next most reasonable class of singularities after rational singularities. What are natural generalizations in three-dimensional case of those singularities. They are purely elliptic singularities.

The notion of a simple K3 singularity is defined as a three-dimensional isolated Gorenstein purely elliptic singularity of (0,2)-type. Yonemura calculate the weights of hypersurface simple K3 singularities by nondegenerate polynomials and obtained examples.

We consider the programing of their classification theorem and show the Mathematica programs.

1 はじめに

3 次元超曲面孤立特異点の理論において、次の二つは同値である。この条件を満たすとき、3 次元特異点 (X,x) は Simple K3 singlarity である。

- (X,x) : $(0,2)$-Type, Gorenstein purelly elliptic sigularity
- $\forall Q$-factorial terminal modification $\delta : (Y,D) \to (X,x)$, D :normal K3 surface

Simple K3 singularity は、3 次元孤立 $(0,2)-Type$ の Gorenstein purelly elliptic sigularity として特徴づけることができる。

超曲面 Simple K3 singlarites は、その非退化定義方程式によって分類され、95 個の存在が確認されている ([1])。この分類を証明するには、初等的な代数演算を繰り返すことが必要である。

*kadowaki@maiko.h.kobe-u.ac.jp
†takahasi@kobe-u.ac.jp

そこで、上記の初等的代数演算を行う証明に対し、その手法を分析し、より多数の分類証明を可能にするプログラム群を作成した。

今回示すプログラムは、Simple K3 singlarites の分類定理として用いられている、米村([1]) における Prop.2.1 及び Prop.2.3 の結果を得るためのプログラムである。

定義

- $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_i \in Q_+$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$,
  $1 > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 > 0$
- $\nu := (z_1, z_2, z_3, z_4)$, $z_i' \in Z_0$
- $T(\alpha) := \{\nu | \sum \nu \cdot \alpha = 1\}$

Prop.2.1

- $W' := \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in {Q_+}^4 | \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1\}$
- $< T(\alpha) > := \{\nu | \sum \nu \cdot t_\nu \in R^4 \quad s.t. \quad t_\nu \in R_0\}$
- $W_4 := \{\alpha \in W' | (1,1,1,1) \in Int < T(\alpha) > \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4\}$

  これから W_4 は 95 個である。

Prop.2.3

1) *For any* $i = 1, 2, 3, 4$, *one of the following is satisfied :*
   $\alpha_i = \frac{P_i}{P}$, $P = LCM(P_1, P_2, P_3, P_4)$
   a) $P_i | P$,
   b) $P_i | (P - P_j)$, *for some* $j \neq i$.
2) $GCD(P_i, P_j, P_k) = 1$, *for all distinct* i, j, k
3) *Let* $\alpha_{ij} := GCD(P_i, P_j)$, $(i \neq j)$, *then* $\alpha_{ij} | P$.
4) *If* $P_i | P$ *and* $P_i | (P - Pj)$, *then* $\alpha_{ij} = P_i$ *and* $\alpha_{ik} = \alpha_{ij} = 1$, *where we set* $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

2 プログラム群

condition プログラムで使う変数の初期化及び設定

asort *Solve* で得た解の中で数値解を取り出す

dele *Solve* で得た解の中で方程式の物を得る

futougo 擬似的に不等式の物を$\$MachineEpsilon$を使って方程式に置き換える

dtoe $Solve$で得た解の代入式から $Solve$で使える方程式へと変形する

step1 米村論文での step1

step2 米村論文での step2

printtool step1・step2 の結果を画面に出力・保持する

Step1.

$$
\begin{array}{ll}
(A) & \alpha_1 = \alpha_2 \ (i.e., \nu(2,0,1,1) \in T(\alpha)) \\
(B) & \alpha_1 = 1/3 \ (i.e., \nu(3,0,0,0) \in T(\alpha)) \\
(C) & 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \ (i.e., \nu(2,1,0,0) \in T(\alpha)) \\
(D) & 2\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \ (i.e., \nu(2,0,n,0) \in T(\alpha)) \\
(E) & 2\alpha_1 + n\alpha_4 = 1 \quad n \geq \ (i.e., \nu(2,0,0,n) \in T(\alpha))
\end{array}
$$

(B) における、Step2.

$$
\begin{array}{ll}
(B-1) & \mu = (0,4,0,0) \ and \ \alpha_1 = 1/3 \ , \ \alpha_2 = 1/4 \\
(B-2) & \mu = (1,3,0,0) \ and \ \alpha = (1/3, 2/9, 2/9, 2/9) \\
(B-3) & \mu = (0,3,1,0) \ and \ 3\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\
(B-4) & \mu = (0,3,0,1) \ and \ 3\alpha_2 + \alpha_4 = 1 \\
(B-5) & \mu = (0,3,0,0) \ and \ \alpha_1 = \alpha_2 = 1/3 \\
 & \mu = (1,2,1,0) \ and \ \alpha = (1/3, 2/9, 2/9, 2/9) \ \ \text{(Cace(B-2))} \\
(B-6) & \mu = (1,2,0,1) \ and \ \alpha_2 = \alpha_3 \\
 & \mu = (1,2,0,0) \ and \ \alpha_1 = \alpha_2 = 1/3 \ \ \text{(Case(B-5))} \\
(B-7) & \mu = (0,2,2,0) \ and \ \alpha_2 + \alpha_3 = 1/2 \\
 & \mu = (0,2,1,1) \ and \ \alpha_1 = \alpha_2 = 1/3 \ \ \text{(Case(B-5))} \\
(B-8) & \mu = (0,2,0,n) \ with \ n \geq 2 \ and \ 2\alpha_2 + n\alpha_4 = 1
\end{array}
$$

(B) における、Step3.

$(B-1)$ $\alpha = (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 1/4, 2/9, 7/36), (1/3, 1/4, 5/24, 5/24)$

$(B-3)$ $\alpha = (1/3, 4/15, 1/5, 1/5), (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 7/27, 2/9, 5/27)$

$(B-4)$ $\alpha = (1/3, 4/15, 1/5, 1/5), (1/3, 7/24, 1/4, 1/8), (1/3, 2/7, 5/21, 1/7),$
$(1/3, 5/18, 2/9, 1/9)$

$(B-5)$ $\alpha = (1/3, 1/3, 1/6, 1/6), (1/3, 1/3, 1/5, 2/15), (1/3, 1/3, 2/9, 1/9),$
$(1/3, 1/3, 1/4, 1/12)$

$(B-6)$ $\alpha = (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 2/9, 2/9, 2/9)$

$(B-7)$ $\alpha = (1/3, 1/4, 1/4, 1/6), (1/3, 1/3, 1/6, 1/6), (1/3, 5/18, 2/9, 1/6)$

$(B-8)$ $Case(B-1), \cdots, (B-7)$ に帰着される。

参 考 文 献

[1] Takashi Yonenura: Hypersurface Simple K3 Singularities, Tôhoku Math.J. 42, 351-380, 1990.