数理解析研究所講究録
1091巻 1999年 103-111



# イェスマノヴィッチの予想の一般化について

足利工業大学　寺井伸浩　( Nobuhiro Terai )
学習院大学D3　高桑　圭　( Kei Takakuwa )

1956年、Jeśmanowicz[J]は指数型不定方程式に関して次の様な予想(Jeśmanowiczの予想と呼ぶ)を提出した。

[予想1]. 正の整数$a, b, c$がピタゴラス数、即ち方程式

$$a^2+b^2=c^2, \ (a, b)=1$$

を満足するとする。この時、$x, y, z$を変数とする不定方程式

$$a^x+b^y=c^z$$

の正の整数解は$(x, y, z)=(2, 2, 2)$のみである。

Sierpiński[S1]は$(a, b, c)=(3, 4, 5)$の場合を、Jeśmanowicz自身も$(a, b, c)=(5, 12, 13)$、$(7, 24, 25)$、$(9, 40, 41)$、$(11, 60, 61)$の場合を証明しており、Lu[Lu]は$(a, b, c)=(4n^2-1, 4n, 4n^2+1)$($n$は自然数)の場合を証明して、上の予想が成立する$a, b, c$が無限に存在する事を示した。そして、いくつかの特別な$(a, b, c)$に対して上の予想が成立する事が証明されているが(Ko[Ko]、Guo and Le[GL]、Le[Le1]、[Le2]、Takakuwa and Asaeda

[TA1], [TA2], Takakuwa [Ta1]、[Ta2]、Cao and Dong [CD])、未だ完全には解決されていない。その論文の多くは、合同式等の初等的な方法や2次体、3次体等の理論によって予想を扱っている。

ここでは、上のJeśmanowiczの予想を含む次の予想について考察する。

[予想2]. 正の整数$a, b, c, d$が、方程式

$$a^2+db^2=c^2,\ (a, b)=1$$

を満足するとする。この時、$x, y, z$を変数とする不定方程式

$$a^x+db^y=c^z$$

の正の整数解は$(x, y, z)=(2, 2, 2)$のみである。

今回、我々は、Laurent, Mignotte 及び Nesterenko [LMN] の対数の一次形式の評価に関する結果([LMN]、Corollary 2 及び 320 頁の表2。Le [Le1] 参照。)を使って次の定理を証明した。

[定理]. $l=1$ 又は $l\equiv 3 \pmod{8}$ である素数とし、$l<23865310019$ とする。正の整数$a, b, c$は$a^2+lb^2=c^2$, $(a, b)=1$を満たすとし、

$$a\equiv 3 \pmod{8}、4\|b、\left(\frac{b}{a}\right)=-1、a\geq \lambda b、$$

但し、

$$\lambda=\sqrt{l}\left\{\exp\left(2\left(\frac{\log l+2}{\log 5}+3231\right)^{-1}\right)-1\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

かつ$\left(\frac{*}{*}\right)$はJacobi記号、と仮定する。その時、不定方程式

$$a^x+lb^y=c^z \tag{1}$$

の正の整数解は$(x, y, z)=(2, 2, 2)$ のみである。

［注意］. $l$ に対する$\lambda$の値を表にしていくつか挙げておく。

| $\lambda$ | $l$ |
|---|---|
| 40.19479… | 1 |
| 69.62677… | 3 |
| 133.34177… | 11 |
| 175.25463… | 19 |
| 263.67018… | 43 |

そして、上の定理の系として、

［系］. $l\equiv 3 \pmod{8}$ である素数とし、$l<23865310019$ とする。そして、$a=lv^2-u^2>0$、$b=2uv$, $c=u^2+lv^2$ とし、$u, v$ は $2\|v$, $(u, v)=1$、$u\equiv -1 \pmod{l}$、$a\geq \lambda b$を満足するとする。その時、不定方程式

$$a^x+lb^y=c^z$$

の正の整数解は$(x, y, z)=(2, 2, 2)$ のみである。

［注意］. 系より、$l$ が $l\equiv 3 \pmod{8}$ かつ $l<23865310019$ であるような素数の時、定理の条件を満たす正の整数 $a, b, c$ が無限に存在する事が分かる。

定理の証明は２つの部分に分かれる。即ち下に示す補題１と補題２を合わせると定理の証明が完成するのである。

［補題1］. $a, b, c, l$ は定理と同じとする。もし方程式(1)が正の整数解$(x, y, z)$を持つならば、

(i) $x$は偶数、$y=1$、$z$は奇数

又は

(ii) $x$は偶数、$y=2$、$z$は偶数

となる。

(証明) $y=1,2$の時は、仮定から容易に扱える。$y>2$の時は、(詳細は省略するが) $4|x, z, 2|y$が言えて、(1) は次の様な形に帰着される。

$$(c^{\frac{z}{4}})^4-(a^{\frac{x}{4}})^4=l(b^{\frac{y}{2}})^2.$$

すると次のNagellの結果

[補題](Nagell[N]、定理117). $l$は$l\equiv 3 \pmod{8}$である素数とする。その時、不定方程式

$$x^4-y^4=lz^2$$

は正の整数解を持たない。

より($l=1$の場合はFermatの結果である。Ribenboim[R], 36, 38 頁参照。)、これは解を持たず矛盾である。(補題1 証明終)

[補題2]. 正の整数$a, b, c, d$は$a^2+db^2=c^2$, $(a, b)=1$, $a>b>1$, $d\leq 23865310019$、$a\geq\lambda b$, 但し

$$\lambda=\sqrt{d}\left\{\exp\left(2\left(\frac{\log d+2}{\log 5}+3231\right)^{-1}\right)-1\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

を満足すると仮定する。もしも、$x\geq 2$で$y=1$又は2であるなら、不定方程式

$$a^x+db^y=c^z \tag{2}$$

の正の整数解は$(x,y,z)=(2,2,2)$のみである。

(証明) $x=2$であるなら、$y=2, z=2$である事は容易に分かる。そこで$x\geq 3$とする。

$a^2+db^2=c^2$及び$a^x+db^y=c^z$から得られる、次の対数の一次形式について考える。

$$\Lambda_1=2\log c-2\log a\ (>0),$$

$$\Lambda_2=z\log c-x\log a\ (>0).$$

この時、$\log(1+t)<t\ (t>0)$及び$y\leq 2$より、

$$0<\Lambda_2=\log\left(\frac{c^z}{a^x}\right)=\log\left(1+\frac{db^y}{a^x}\right)<\frac{db^y}{a^x}\leq\frac{db^2}{a^x}$$

であるから、

$$\log\Lambda_2<\log d+2\log b-x\log a \tag{3}$$

を得る。一方、前述の[LMN]の結果を用いて、

$$\log\Lambda_2\geq -32.31\,H^2(\log a)(\log c) \tag{4}$$

但し、$H=\max\left\{\log B+0.18,\ 10\right\}$, $B=\frac{x}{\log c}+\frac{z}{\log a}$, という$\log\Lambda_2$の下からの評価を得る。

(i) $B\leq e^{9.82}$の場合. この時、$H=10$なので、(3)、(4)より

$$\frac{\log d}{\log a}+2\cdot\frac{\log b}{\log a}+3231\log c>x$$

を得る。そして、$a>b>1$だから、

$$\log d+2+3231\log c>x$$

となる。又$\Lambda_1, \Lambda_2$の定義から$a$を消去して、

$$x\Lambda_1-2\Lambda_2=(2x-2z)\log c$$

となり、$x-z>0$がすぐに言えるので、$\Lambda_1, \Lambda_2>0$ より、

$$x=\frac{2x-2z}{\Lambda_1}\cdot\log c+\frac{2\Lambda_2}{\Lambda_1}>\frac{2}{\Lambda_1}\cdot\log c$$

となる。すると、

$$\log d+2+3231\log c>\frac{2}{\Lambda_1}\cdot\log c,$$

つまり

$$\Lambda_1=\log\left(1+\frac{db^2}{a^2}\right)>\frac{2\log c}{\log d+2+3231\log c}=\frac{2}{\frac{\log d+2}{\log c}+3231}\geq\frac{2}{\frac{\log d+2}{\log 5}+3231}$$

($c\geq 5$ より) を得る。故に

$$\frac{db^2}{a^2}>\exp\left(2\left(\frac{\log d+2}{\log 5}+3231\right)^{-1}\right)-1\ ,$$

つまり、

$$a<\sqrt{d}\left\{\exp\left(2\left(\frac{\log d+2}{\log 5}+3231\right)^{-1}\right)-1\right\}^{-\frac{1}{2}}b=:\lambda b$$

となる。それ故、もし$a\geq\lambda b$であるならば、(2) は正の整数解 $x$, $y$, $z$ ($x\geq 3$) を持たない。

(ii) $B>e^{9.82}$ の場合. この時は$H=\log B+0.18$ である。(3)、(4)より、

$$\frac{\log d+2\log b}{(\log a)(\log c)}-\frac{x}{\log c}>-32.31H^2$$

を得る。そして$\Lambda_2$の定義より $B=\frac{2x}{\log c}+\frac{\Lambda_2}{(\log a)(\log c)}$ であるから、

$$\frac{2(\log d+2\log b)}{(\log a)(\log c)}-B+\frac{\Lambda_2}{(\log a)(\log c)}>-64.62H^2$$

となる。条件から、$a\geq 2\lambda$, $c\geq 2\sqrt{\lambda^2+1}$, $\Lambda_2<\frac{d}{2\lambda^3}$ がすぐに分かるので、

$$B<\frac{2\log d}{(\log a)(\log c)}+\frac{4\log b}{(\log a)(\log c)}+\frac{\Lambda_2}{(\log a)(\log c)}+64.62H^2$$
$$<\frac{2\log d}{(\log 2\lambda)(\log 2\sqrt{\lambda^2+1})}+\frac{4}{\log 2\sqrt{\lambda^2+1}}+\frac{d}{2\lambda^3(\log 2\lambda)(\log 2\sqrt{\lambda^2+1})}+64.62H^2$$

$$< 0.10392\log d + 0.91175 + 0.0000005d + 64.62H^2 \quad (\lambda > 40.19479 \text{ より})$$

$$< 11936.05 + 64.62(\log B + 0.18)^2 \quad (d \leqslant 23865310019 \text{ より})$$

となる。すると $B < 18398.05$ を得るが、これは $B > e^{9.82} = 18398.050741\cdots$ と言う仮定に矛盾している。（補題2証明終）

補題1と補題2より定理の証明は完成した。

## 参考文献


[CD] Z.-F. Cao and X.-L. Dong: On Terai's Conjecture, (to appear).

[GL] Y.-D. Guo and M.-H. Le: A note on Jeśmanowicz' Conjecture concerning Pythagorean Numbers, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 44 (1995), pp. 225 - 228.

[J] L. Jeśmanowicz: Kilka uwag o liczbach pitagorejwkich (Some remarks on Pythagorean numbers)、Wiadom. Mat., Ser. 2, 1(2)(1956), pp. 196-202.

[Ko] C. Ko: On Pythagorean numbers (in Chinese), Acta Sc. Nat. Univ. Sichuan, 1(1958), pp. 73 - 80.

[Le1] M.-H. Le: On Jeśmanowicz' Conjecture concerning Pythagorean Numbers, Proc. Japan Acad., 72, Ser. A (1996), pp. 97 - 98.

[Le2] M.-H. Le: A note on Jeśmanowicz' Conjecture, Colloq. Math., 69 (1995), pp. 47 - 51.

[Le3] M.-H. Le: A note on the Diophantine equation $(m^3 - 3m)^x + (3m^2$

$-1)^y = (m^2+1)^z$, Proc. Japan Acad., 73, Ser. A (1997), pp. 148-149.

[LMN] M. Laurent, M. Mignotte et Y. Nesterenko: Formes linéairies en deux logarithmes et déterminants d'interpolation, J. Number Theory, 55(1995), pp. 285-321.

[Lu] Lu Wen-Twan: On Pythagorean numbers $4n^2-1$, $4n$, $4n^2+1$ (in Chinese)、Acta Sc. Nat. Univ. Sichuan, 2(1959), pp. 39-42.

[N] T. Nagell: Introduction to number theory, Chelsea Publishing Company, 1981.

[S1] W. Sierpiński: O rownaniu $3^x+4^y=5^z$ (On the equation $3^x+4^y=5^z$)、Wiadom. Mat., Ser. 2, 1(2)(1956), pp. 194-195.

[S2] W. Sierpiński: Elementary Theory of Numbers, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1988.

[TA1] K. Takakuwa and Y. Asaeda: On a Conjecture on Pythagorean Numbers, Proc. Japan Acad., 69, Ser. A (1993), pp. 252-255.

[TA2] K. Takakuwa and Y. Asaeda: ditto. II, ibid., 69, Ser. A(1993), pp. 287-290.

[Ta1] K. Takakuwa: ditto. III, ibid., 69, Ser. A (1993), pp. 345-349.

[Ta2] K. Takakuwa: A remark on Jeśmanowicz' Conjecture, Proc. Japan Acad., 72, Ser. A(1996), pp. 109-110.

[Te1] N. Terai: A note on certain exponential Diophantine equations, (to appear in Proceeding of Number Theory Conference in Eger, Hungary).

[Te2] N. Terai: Application of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations, (to appear in Acta Arith.).

[Te3] N. Terai: The Diophantine Equation $a^x + b^y = c^z$, Proc. Japan Acad., 70, Ser. A (1994), pp. 22-26.

[Te4] N. Terai: ditto. II, ibid., 71, Ser. A (1995), pp. 109-110.

[Te5] N. Terai: ditto. III, ibid., 72, Ser. A (1996), pp. 20-22.

[TT1] N. Terai and K. Takakuwa: A note on the Diophantine Equation $a^x + b^y = c^z$, Proc. Japan Acad., 73, Ser. A (1997), pp. 161-164.

[TT2] N. Terai and K. Takakuwa: On a generalization of the conjecture of Jeśmanowicz, (to appear in Tokyo J. Math.).

[R] P. Ribenboim: 13 Lectures on Fermat's Last Theorem, Springer-Verlag, 1979.