数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 119-127



# 自然数解をもつ方程式について

森川　良三　( Ryozo Morikawa )
（現在　フリー）

1．序言　いろいろの方程式を解くことは、数学の各分野において基本的である。　いま、我々は数の解をもつ方程式を考える。　この場合、数の範囲をまづ決める必要がある。　標準的には、次のような数集合が考えられる。

$$\mathbf{P} \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

ただし $\mathbf{P}$ は素数の集合、それ以外は通常の意味である。
この内、数論で扱うのは左の４つのいづれかである。　そして、$\mathbf{Q}$ の中で分母が１のものが $\mathbf{Z}$ 、その中で正のものが $\mathbf{N}$ だから、有理数解を求めてそのなかから、順次制限していけば良いかというと中々そうはいかない。　にも拘らず従来とくに自然数解は整数解の一部という取り扱いをされてきたという感が強い。　”そうではない！　自然数解問題と整数解問題にはかなり深い断絶がある。　つまり、自然数解問題に固有の原理、固有の方法があるべきで、それを探そう”というのが、本講演のテーマである。

といっても、この問題意識から考察をスタートさせたわけではなく、いくつかの固有の原理・方法が見えてきたから、それでは体勢を立て直してきちんと考えて見ようというのが、実際の順序である。　今の場合は、源泉となる２つの結果［１］，［２］がある。　以下では、これらの結果（［２］については、現在進行中の考察結果も含めて）を引用しながら、自然数解問題のいくつかの原理（セル原理、over-system 構成の原理、場所の原理）について説明する。　これらは一部は整数解の問題に、また場所の原理は素数解のまじった問題にも適用される。

2．ビーツィ数列の理論から　まづ［１］について述べる。　ビーツィ数列とは、正数 $\alpha$ と実数 $\beta$ について

$\{ [\alpha n + \beta] : n$ 自然数 $\}$　　　[ ] はガウス記号

としたものである。 この数列は、５０年以上にわたって数論の片隅で、細く長く生き続けかつ今も現役の数列である。 ここで、本筋からはややずれるが、ビーツィ数列の理論について一言する。 $\alpha$が有理数と無理数とで、数列の役割も理論も全くといって良いほど異なる。 有理数のときは、周期数列で上の数列の代わりに、q, a, b が自然数で (q, a) = 1 として

$\{ [ (qn + b)/a ] : n$ 整数 $\}$

を取り扱うほうが、非本質的なゴタゴタがでてこない。 これについては2つ基本的な問題がある。 (イ) いくつかのビーツィ数列が互いに素である為のクライテリオンを求める。 (ロ) これらの和集合が整数を丁度一重にカバーするものを決定する。 上述のように、周期数列だから簡単な問題かというとそうではない。 例えば (ロ) について、フランケルの予想というのがあるが、まだ片付いていない。 [１] は、(イ) を扱った一連の論文のうち、４つのビーツィ数列が互いに素になる条件を調べたものである。 そこで、次の関係 (＊) をみたすシステムを構成する必要がでてくる。

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x_2 & y_1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & y_3 & z_2 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & y_4 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & z_4 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q \\ q \\ q \\ q \\ q \end{pmatrix}$$

ここで、すべての数は自然数である。 次の２点を注意する。

(イ) x, y, z, w 達が整数でよいとするとこの問題は意味を失う。

(ロ) q にくらべて $a_i$ 達が大きいときが、問題の中心である。 といっても大きさに限界があって、x 達のオーダーが１次とすると a が２次、q が３次というところが限界である。

この問題について [１] で一つの数値例から出発して、その上に４つのパラメータをもつ over-system を構成する方法を開発した。 １つ例示する。

$$\begin{pmatrix} 448 & 171 & 0 & 0 \\ 485 & 0 & 184 & 0 \\ 0 & 543 & 68 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 268 \\ 0 & 383 & 0 & 97 \\ 0 & 0 & 125 & 231 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6673 \\ 7079 \\ 5237 \\ 15348 \end{pmatrix} = (4200013)$$

から出発して、行列の部分はパラメータ p, q, r, s, t をつかって

$$\begin{pmatrix} (55r - 66s + 50t)/15 & p & 0 & 0 \\ (-48q + 121r + 110t)/30 & 0 & r & 0 \\ 0 & (-11p + 12q)/5 & (10r - 12s)/5 & 0 \\ (40q - 121s)/15 & 0 & 0 & (-4p + 11r)/5 \\ 0 & q & 0 & t \\ 0 & 0 & s & (-4p + 11r + 10t)/10 \end{pmatrix}$$

ここで関係式　$10t = -8p + 8q + 11r - 22s$ を付加する。 以下は p q, r, s で表示する。 そこで

$a_1 = ( - 2ps + 2qr - pr )/10,$

$a_2 = ( -40pr + 8ps + 40qs + 110r^2 - 77rs - 110s^2 )/150,$

$a_3 = ( -44p^2 - 12pq + 121pr + 40q^2 - 22qr -110qs )/150,$

$a_4 = ( 10qr - 11ps - 5qs )/15,$

$q = ( 88p^2 s - 120pqr - 40pqs - 121prs + 242ps^2 + 80q^2 r$
$\quad + 220qr^2 - 352qrs )/150.$

これらの値が（＊）を充たすことは、簡単に分る。 整数系にするためには p, q, r, s に合同関係を課せば良い。さらに自然数の系にするには、量的関係を課す必要がある。 これらを実行して例えば、次のシステムを得る。

$$\begin{pmatrix} 5168 & 1701 & 0 & 0 \\ 5215 & 0 & 1804 & 0 \\ 0 & 5493 & 788 & 0 \\ 783 & 0 & 0 & 2608 \\ 0 & 3848 & 0 & 1117 \\ 0 & 0 & 1175 & 2421 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 681763 \\ 780009 \\ 717712 \\ 1655033 \end{pmatrix} = (4850146493) .$$

これについていくつかの注意を述べる。

（イ）一つの解からはじめてそれから解のシステム（over-system)を構成することは、ディオファンタス方程式の理論では重要である。 たとえば単数に付随したノルム方程式の理論、楕円曲線上の有理点などがその典型例である。（このほかにもいくつか散発的な結果がある。）

（ロ）この構成は、［１］では７ステップにわけて行なわれる。 そこでは５つの連分数、とくに１つの部分商をパラメータにとったものが主役を演じる。 それらにさらに１つの関係が必要になる。 それが、４つのパラメータがでてくる理由である。

（ハ）まず恒等的に（＊）を充たすシステムが出来て、整数解、自然数解とすすむのは、序言の所説に反する様であるが、しかし上の構成の本質は自然数解にあると考えている。 （たとえば連分数がきいてくること、また後述のセル原理の適用例にもなっている。）

（ニ）上の構成原理はかなり広い範囲で成り立つのであるが、［１］では全体がビーツィ数列の理論に組み込まれているという事情もあって、その全容をクリアーにするには、もう一働きする必要がある。

３．<u>フロベニウスの問題から</u> こっちのほうが講演の主題なのであるが、まづ「フロベニウスの問題」とは：

最大公約数１の自然数の組 $a_1, a_2, ,, a_k$ をとる。 この時自然数係数の１次形式 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + ,,, + x_k a_k$ で表示できない最大数 $F(a_1, a_2, ,, a_k)$ を求めよ。

この問題も、整数係数では無意味になる。 この問題の来歴を講演者は知らないのだが、フロベニウスがかなり頻繁に問題提起していたこと、またみかけによらず難しいことが知られている。 事実［３］には当時数十篇の論文があるとかいてある。 現在では百を優に越えているだろう。 考察の方向は難しい問題であるという議論（例えばアルゴリズムがＮＰか？というような）を別にすると、特別のタイプの数列についての議論とｋを決めた議論の２つになる。 後者について、ｋ＝２は簡単。 しかしｋ＝３ですでに難しい。 これについて、［２］でほぼ満足すべき結論が得られた。 といっ

ても、実は１９６２年のブラウアー・ショックレイ［４］と１９９４年のダビソン［５］に必要な材料はすべて揃っていて、［２］ではそれを並べかえたに過ぎないというべきかも知れない。 ただし、つぎの２点で進歩している。 ３つの自然数を a, b, c としよう。

（１）［２］は a. b, c に関する対称性をもつ理論になっている。 問題自身は勿論対称性をもつ。 といって、その理論が対称性をもつように構成できるとは限らない。 しかし、そうできればより強力になるのも確かなことである。

（２）［２］の理論構成は、ｋが４以上への展望をふまえてできている。

ところがｋ＝４のときは、ｋ＝３では表れなかった新しい現象が雲のように沸きでてきて、それだけ面白いという見方もできるが長い長い議論になる。その上、細部にまだ詰め切れていない点がある。 従ってここでは、［２］の内容に沿って話をすすめて、それがｋ＝４ではどうなるかをコメントし、かつ講演の本来のテーマとの関わりを説明する。

a, b, c を自然数、$(a, b, c) = 1$. $F(a, b, c)$を上述の最大数とする。これはよく知られたことだが、a, b, c は互いに素でかつどれも他の２つの自然数係数の１次和でないと仮定して良い。 以下ではその条件の下に議論をすすめる。 ここで

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : xa + yb + zc = 0 \}$$

とおく。 W の元を０－形式とよび、ベクトルのようにかく。この W の中から 次の３つのベクトル **a, b, c** をとりだす。

$\mathbf{a} = (-a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, -b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, -c_3)$

ここですべての数は自然数。 **a** は $a_1$ が W のなかで最小のもの。 **b** については $b_2$ が、**c** については $c_3$ が最小条件を充たすものをとる。

ここで、つぎの４つの性質が成り立つ。

（１） **a, b, c** はこの条件で唯一にきまる。

（２） **a, b, c** の任意の２つが W の底となる。

（３） $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

（４） $a = b_2 c_3 - b_3 c_2$, $b = b_1 c_3 + b_3 c_1$,

$$c = b_1 c_2 + b_2 c_1 .$$

ここで（４）は一見対称性に反するようだが、$b = c_3 a_1 - c_1 a_3$ ，$c = a_1 b_2 - a_2 b_1$ という巡回的な関係がある。（３）から、９つの要素のうち、６つがフリー。以下の議論では（４）の形が便利である。ところで、ｋ＝４の場合には、

$$\mathbf{a} = (-a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ), \quad \mathbf{b} = (b_1 , -b_2 , b_3 , b_4 ),$$

$$\mathbf{c} = (c_1 , c_2 , -c_3 , c_4 ), \quad \mathbf{d} = (d_1 , d_2 , d_3 , -d_4 )$$

で $a_1$ , $b_2$ , $c_3$ , $d_4$ が最小条件を充たすものを考えるのだが、まず $a_i$ , $b_j$ , $c_k$ , $d_m$ が０であるものも許す必要がある。そして、（１）－（４）のすべてに修正を要する。まず（１）の唯一性がくずれる。もっとも殆どはＯＫ。しかしその場合でも、（２）はだめ。（実は”適当な３つをとれば底になる”という命題の成立を半年間ほど信じてやっていたが、これすら不成立。）（３）は、自然数または０を係数にする関係式が成り立つという命題になる。この関係式を基本関係式とよび、理論全体で重要な役割をもつ。（４）については、次の形の命題になる。いま３行４列の行列

$$\begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & -c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -d_4 \end{pmatrix}$$

について、各列を除いた小行列式を考えると、$-sa$, $sb$, $-sc$, $sd$ が得られる。ｋ＝３のときは、常に $s=1$ だが、ｋ＝４ では $s$ として自然数や０もとり得る。

ｋ＝３の場合にもどって、つぎの定理を得る。

定理１．$F(a, b, c) = \mathrm{Max}\ \{ F_1 , F_2 \}$. ここで

$$F_1 = b_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 c_3 + c_1 b_2 c_3 - b_1 c_2 b_3 ,$$

$$F_2 = b_1 b_2 c_3 + c_1 b_2 b_3 + c_1 b_2 c_3 - c_1 c_2 b_3 .$$

ｋ＝４では標準的ケースでは６個の数の最大値が $F$ となる。しかし、４個、または色々な個数の数の最大値となることがある。（一般のｋでは、

（k－1）！個の数を比べるのが標準。）

ところで **b, c** は最小性によって定義されたが、これはつぎの等式と不等式によって特徴づけられる。

定理２．$\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_1, -\hat{b}_2, \hat{b}_3)$, $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, -\hat{c}_3)$ が次の条件を充たすとする。

$\hat{b}_i$, $\hat{c}_i$ は自然数 $(\hat{b}_i, \hat{c}_i) = 1$, $\hat{b}_2 > \hat{c}_2$, $\hat{c}_3 > \hat{b}_3$

$a = \hat{b}_2\hat{c}_3 - \hat{b}_3\hat{c}_2$, $b = \hat{b}_1\hat{c}_3 + \hat{b}_3\hat{c}_1$, $c = \hat{b}_1\hat{c}_2 + \hat{b}_2\hat{c}_1$.

このとき $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$.

この定理は簡単だけれども、いろいろの意味をもっている。

（１）定理１では a, b, c から出発して、**b, c** を経由して F に到達する。 しかし定理２の条件をみたす６つの自然数から出発して、a, b, c と F に到達することもできる。 この方針で、［２］で $F/(abc)^{1/2}$ の値の分布を調べている。

（２）ダビソン［５］は a, b, c から **b, c** を求めるアルゴリズムを与えている。 それによると $b \equiv tc \pmod{a}$, $1 < t < a$ の t について t/a の連分数からある方式によって、ペアーの列（G）をつくる。

$$\text{(G)} \qquad \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \cdots - \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \end{pmatrix} - \cdots\cdots - \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{t} \end{pmatrix}$$

ここで $t\hat{t} \equiv 1 \pmod{a}$ $1 < \hat{t} < a$ にとる。

（G）のなかに、$(c_3/c_2) > b/c > (b_3/b_2)$ である場所がただ１つ必ず存在するから、その両側のペアーから **b, c** をつくれば良い。 これをあわせて、本講演のテーマに沿ったつぎの結論を得る；

方程式 $xy - zw = a$ の自然数解のうち $x > z$, $y > w$ であるものは t を mod a の剰余類をうごかしたとき、（G）のなかに全部通常２回（t と $\hat{t}$ で）づつあらわれる。 $t = \hat{t}$ のときは１回。

つまり、方程式の自然数解が（G）のペアーのあいだの<u>線分</u>と対応している。 この性質をとりだして、自然数解についてのセル（cell）原理と名付ける。 上の例はあまりに他愛無いが、k＝４のときはある平面上の三角形

（または四角形）領域がセルとしてでてくる。　（さらにフロベニウスの問題自身についても同じセルが対応していて、多くの性質がセルによって決まってしまう。）　また§２の数値例では、後のほうの行列は前のもののほぼ１０倍になっている。　これはセル原理の反映である。　余談だが、一般に組合せ論的数論では非常に多数のものがでてくる。　それらにうまく名前をつけることが理論の出発点になることが多い。　ちなみに日本のサル学は猿たちに名前をつけることからはじめたのが、成功の一因である。

４．場所の原理と全体のまとめ　まづ大風呂敷をひろげると、場所の原理というのは数論のいろんな問題を、”いくつかの場所に数（や式）を分配して、それらの相互関係を調べる問題”ととらえることによって、かなりの部分を整理しようという考え方である。　もっとも典型的なのは、シュミットのノルム方程式の理論である。　各係数を場所と考える。　彼の理論はごく大雑把にいえば、いくつかの場所に０をおくときは、（有限個の例外解を除いて）部分体のノルム方程式の解しかありえないというものである。　つまり場所の間に非常に強い相関があるということである。

本講演にでてきた方程式は行列（または行列式）タイプのものである。そしてｍ行ｎ列の行列のｍｎ個の場所、その相関、とくに０をいくつかの場所においたときが中心問題になる。　事実、ｋ＝４　のときの困難の半分位は、**a ,b, c, d**　の要素に０がでてくることに起因する。　そして逆にいうと、この理論がほかのいくつかの数論の問題に応用をもつ（そのはづと思っているのだが）のは、０のかなりはいった方程式についてである。　そしてこれはまだ憶測にすぎないのだが、行列の場合の場所の相関は、ノルム方程式ほど強くないだろう。　ノルム方程式、又は単数の構造性は非常に強い。それは、ジーゲルの有名な結果でも、無限個の解をもつもので非自明なのは単数に対応するケースしかないことでも判る。　しかし、行列の場合も自然数解までいくとかなり強い構造性が出てくるのではないかというのが（期待もこめた）予想である。

脱線ついでにもうひとついえば、私はエルデスの（ストラウスも？）”数学の問題は、ひとつひとつの問題がバラバラのままでそれで意味があるので

、それで良いのだ”という意見かとも思える行き方は承服しがたい。 ただしエルデスは実はいくつかのベーシックな問題意識をもち、それらを一貫して追求していたと考えるべきではないかとも思っている。 例えば、彼は数列のあいつづくものについての問題を沢山だして、（勿論あっというような良い定理も沢山証明している）、これは私の好みの問題でとコメントしている。 我田引水にすぎると叱られるかもしれないが、これこそ場所の問題の一典型ではあるまいか。

一方自然数解固有の方法としては、まとまったものはいまのところ連分数しか出てこない。 $k=4$ でもいわば２次元の連分数というべきものが出てくる。 ただし、色々の点で通例とちがった現象がある。 もっとも、これも異論がでるかもしれないが、高次元の連分数については決定版というものは出ていないのではないか。リトルウッドの $n\|n\theta\|\|n\varphi\|$ の予想すらまだ解けていないのがその証拠である（というのがわが偏見である。）

REFERENCES

[1] R. Morikawa : Disjoint sequences generated by the bracket function VI (1993) Bull. Fac. Lib. Arts, Nagasaki Univ. 34, 1-23.

[2] R. Morikawa : On the linear diophantine problem of Frobenius in three variables (1997) ibid. 38, 1-17.

[3] Erdős - Graham : *Old and new problems and results in combinatorial number theory* (1980) Geneve

[4] A. Brauer - E. Schockley : On a problem of Frobenius (1962) Crelle's J. 211, 215-220.

[5] J. L. Davison: On the linear diophantine problem of Frobenius (1994) J. Number Theory 48, 353-363.