数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 128-134

指標和の平均値の評価について

村田　玲音（明治学院大学）

Dirichlet 指標 χ と二つの自然数M、Nによって定まる和

$$S(\chi;M,N)=\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)$$

のことを指標和(charcter sum)と呼び、この大きさを χ の modulus q と区間の長さ N によって評価する問題を考える。この和自身も周期 q の周期関数になるので、$N\leqslant q$ としてよい。

§1　これまでに知られていること

『指標和の評価』は古くから研究されているので、多くのことが知られている。その代表的なものを挙げてみよう。

1)　自明な評価：　$|S(\chi;N,M)|\leqslant N.$

2)　Pólya-Vinogradov の不等式：

$$|S(\chi;M,N)|\ll\sqrt{q}\log q.$$

3)　Burgess の Bound：

定理A (Burgess, 1963 [1])　r は任意の自然数、ε は任意の正数とする。

$$|S(\chi;M,N)|\ll_{r,\varepsilon}N^{1-\frac{1}{r}}q^{\frac{r+1}{4r^2}+\varepsilon}.$$

以上の三つの Bound の強弱を比較してみると、すぐに分かることだが、N が q^(3/8)程度より長くなると、Pólya-Vinogradov が一番良く、N が q^(1/4)程度より短くなると trivial Bound が一番よくなってしまう。この中間域では Burgess's Bound が最良になっている（ただし Burgess の不等式では r=2 と取った)。Burgess's Bound が短い区間で有効であることは良く

知られているが、ある程度以上区間が短くなると、Burgess's Bound も trivial Bound より悪くなってしまうことに注意しておこう。

4) 予想

次に挙げる予想は Burgess[2] の文中に述べられているもので、根拠や蓋然性については特に言及されていない（しかも q=p となっている)。

$$|S(\chi; M, N)| \ll \sqrt{N}\, p^{\varepsilon}.$$

5) 指標和の平均値

Burgess は 1986 年から "Mean values of character sums" という表題で 4 編の論文を発表し、その 3 番目にあたる [3] の中で、次の結果を証明した。

$$\mathfrak{B} = \{ \chi \ ; \ \text{mod } p^3 \text{ の Dirichlet character}, \ \chi^{p^2} = \chi_0 \ \}$$

とする。勿論 χ_0 は、p^3 を法とする principal character である。

定理B (Burgess, 1995 [3]) $\mathfrak{B}$ の中で、o(p^2)個の例外を除いて、次が成り立つ：

$$|S(\chi; M, N)| \ll \sqrt{N}\, p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

更に Burgess は、この続編ともいうべき論文 [4] を書いている。そこで証明されている結果を一部引用しよう。$\mathfrak{B}$ は上と同じ集合である。

定理C (Burgess, 1997 [4])

① $N \leqslant p^{\cancel{\frac{7}{8}}\frac{3}{2}}$ なら $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathfrak{B},\, \chi\neq\chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 N^{\frac{1}{4}} p^{\frac{3}{4}}$,

② $N \geqslant p^{\cancel{\frac{7}{8}}\frac{3}{2}}$ なら $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathfrak{B},\, \chi\neq\chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 N^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{8}+\varepsilon}$,

③ $p < N \leqslant p^{\frac{6}{5}}$ なら $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathfrak{B},\, \chi\neq\chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 p^{1+\varepsilon}$,

④ $N \geqslant p^{\frac{6}{5}}$ なら $\displaystyle\sum_{\chi\in\mathfrak{B},\, \chi\neq\chi_0} |S(\chi; M, N)| \ll p^2 N^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{5}+\varepsilon}$.

一方、私は p^2 を法とする原始根の分布を調べる過程で、Heath-Brown の結果 [8] を利用して次の結果を得た（[9] も参照)。

定理D　(Murata, 1998 [10])

$$\frac{1}{p-1}\sum_{\substack{\chi:\ \mathrm{mod}\ p^2\\ \chi^p=\chi_0,\ \chi\neq\chi_0}} S(\chi;M,N) \ll p^{\frac{11}{12}}\log p.$$

これも Burgess の定理同様、指標和の平均値を計算したものだが、まず平均を取った集合が違っている。私の結果では「 p^2 を法とする指標群の中の p 次の巡回部分群」を考えてそこで平均を考えた。Burgess が modulus を p からすぐ p^3 に上げてしまって、p^2 を飛び越した理由は良く分からない。又私の結果では指標和の絶対値の平均ではなく、生の値の平均を取ってある。更に私の得た式の右辺には N が出てきていない。その意味では、定理Dは「Pólya-Vinogradov の不等式は平均値の意味でまだ改良の余地がある」ことを言っていると解釈する方がよいと思われる。

§2　今回の結果について

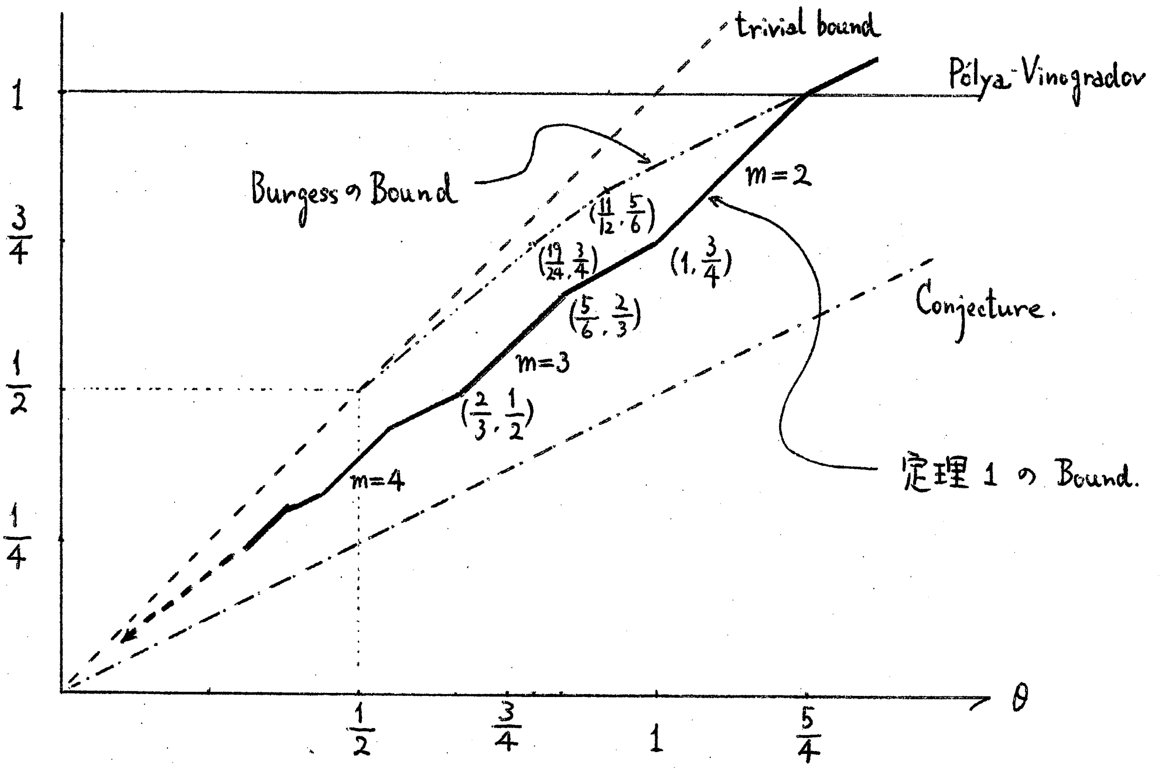
以下、指標の modulus q として、主に p^2 あるいは p^3 の場合を考える。もっと一般的な場合も取り扱えるのだが、このようにqを具体的に取った方が結果が分かりやすいし、Burgess の平均型の結果と比較もできるので都合がよい。

定理１　　q=p^2, m は任意の自然数とする。この時、高々 p-1 個の例外を除いて次が成立する：

$$N \geqq p^{\frac{2}{m}} \quad のとき、\quad |S(\chi;1,N)| \ll_m N p^{-\frac{1}{2m}} (\log p)^{\frac{2^m-1}{2m}},$$

$$N < p^{\frac{2}{m}} \quad のとき、\quad |S(\chi;1,N)| \ll_m N^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{m}} (\log p)^{\frac{2^m-1}{2m}}.$$

この結果と従来までの結果の強弱を、簡単に図示してみた。このグラフでは、横軸に区間の長さ（N=p^θ と表示した時のθ）を取ってある。指標和の評価式の右辺は、すべて $p^{\alpha}N^{\beta}(\log p)^{\gamma}$ の形をしていた。この中でまず log part や ε–part を無視すると、従来の結果は『N=p^θ のとき、個々の指標和や平均値は p^($\alpha+\beta\cdot\theta$)で押えられる』という形に統一できる。そこでこの（θ，$\alpha+\beta\theta$）をプロットしたのが下図である。『個々の指標和の評価』と『almost all の結果』を同じグラフに描いてあるが、不等式の強弱を比較するのが目的なので、その点に注意して頂きたい。



この図から分かるように、我々の結果は「個々の指標和に関する結果でない」「指標和を作る始点が M=$\overset{0}{\cancel{1}}$ と固定されている」といった欠点を抱えているが、一方、

i) m を上げてゆくことによって、どんなに短い区間に対しても非自明な評価が得られている。

ii) ほとんどの区間で、Pólya-Vinogradov の不等式、Burgess の評価式より良い評価を与えている。

といった利点のあることが分かる。

§ 1 で平均値に関する Burgess の仕事を紹介した。その関連で、同じ平均値を我々の方法で評価計算してみたのが次の結果である。

定理 2　　m は任意の自然数とし、$\mathfrak{D}$ は、p^3 を法とする Dirichlet character の集合で、$|\mathfrak{D}|$ | = p^2 とする。このとき、

$$N \geqq p^{\frac{3}{m}} \text{ のとき、} \sum_{\chi\in\mathfrak{D}} |S(\chi; 1, N)| \ll p^2 N p^{-\frac{1}{m}} (\log p)^{\frac{2^m-1}{2m}},$$

$$N < p^{\frac{3}{m}} \text{ のとき、} \sum_{\chi\in\mathfrak{D}} |S(\chi; 1, N)| \ll p^2 N^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2m}} (\log p)^{\frac{2^m-1}{2m}}$$

この場合も、上と同じ欠点はあるが、一方、どんな短い区間に対しても、平均値に対して非自明な評価を与えているし、Burgess の場合、$\mathfrak{D}$ として特殊な集合 $\mathfrak{B}$ だけを取り扱っていたが、我々の場は、$|\mathfrak{D}|$ = p^2 さえ満たしていれば、どんな集合に対しても同じ評価が得られる、という大きな利点がある。そして得られた評価式は Burgess の平均値より良くなっている。M=0 となっているため、我々の結果は short interval の問題には使いにくいが、ある種の問題、例えば次節でふれる $L(\frac{1}{2}+it,\chi)$ の q-estimate では、$S(\chi;1,N)$の評価が必要になる。

§ 3　$L(\frac{1}{2}+it,\chi)$ の q-estimate

$|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|$ を χ の modulus q によって評価する問題を考える。これも歴史の長い有名な問題で、多くの結果が得られている。

i)　『Burgess の評価』の帰結(1962)：　$L(\frac{1}{2}+it,\chi) \ll q^{\frac{3}{16}+\varepsilon}$.

ii)　§ 1 で挙げた『予想』の帰結：　$L(\frac{1}{2}+it,\chi) \ll q^{\varepsilon}$.

ii)の式は『L 関数の Lindelöf 予想』に対応するもので、いわば『Lindelöf 予想の q-analogue』である。これを見ても、『予想』の解決は非常に困難であろうと思われる。

iii)　次の 3 つの定理は結論の式に共通した点がある。

文献[6]の Theorem 4 (p.43),
文献[7]の Corollary 3 (p.150),
文献[5]の Corollary 2 (p.296).

詳しくは原論文を読んで頂くことにして要点を記すと、「『ある特殊な条件』を満たす合成数の無限集合を Q とする。この Q に属する q を法とする Dirichlet characters χ_q を考えると、これらに対して次が成立する：

$$L(\frac{1}{2}+it,\chi_q) \ll q^{\frac{1}{6}}$$ 」

というものである。結論の式の右辺に q^(1/6) が出てきており、これがこの定理群の面白い点であろう。Burgess の universal bound によれば、任意の指標に対して q^(3/16) で評価でき

るわけだが、ちょっと特殊な指標を考えると、 q^(1/48) だけ節約できてもっと良い評価が得られるのである。

これに関して、今回我々が得た結果は次の二つである：

定理３

$$\frac{1}{p-1}\sum_{\substack{\chi:\,\mathrm{mod}\ p^2\\ \chi^p=\chi_0,\,\chi\neq\chi_0}} L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) \ll p^{\frac{5}{16}}(\log p)^{\frac{7}{8}}.$$

定理４　　r を自然数とする。p^r を法とする Dirichlet 指標全体の、任意の部分集合 $\mathfrak{F}$をとり、$|\mathfrak{F}|$ = p^s が成り立っているとする（s は必ずしも自然数でなくてもよい）
この時、次が成立する：

$$\frac{1}{|\mathfrak{F}|}\sum_{\chi\in\mathfrak{F}} \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right| \ll p^{\frac{r}{4}-\frac{s}{8}}\times(\log\text{-part}).$$

定理３は Burgess の universal bound より $p^{\wedge}\left(\frac{1}{16}\right)$ だけ良い評価を与えているが、Ｌ関数の絶対値を考えていない点、そして何より平均値である点が欠点である。

定理４の結論の式において、r と s を接近させたまま（例えば s=r–1 ととって）r を大きくしてゆくと究極的には $|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|$ の平均値を q^(1/8) で評価できることになる。

これまでに得られた一群の結果を見ても分かるとおり、Ｌ関数の q-estimate では、 q^(1/6) のところに一つの壁があったように思われる。今回の我々の結果によれば、大部分の指標に対するＬ関数は(1/6)を下回って、指数は(1/8)程度まで下げられるらしい。

参考文献

[1]　Burgess D.A.:　On character sums and L-series II,
Proc. London Math. Soc. (3), Vol.13 (1963) pp. 524 – 536.

[2]　Burgess D.A.:　Mean values of character sums,
Mathematika, Vol. 33 (1986) pp.1 – 5.

[3]　Burgess D.A.:　Mean values of character sums III,
Mathematika, Vol. 42 (1995) pp.133 – 136.

[4]　Burgess D.A.:　On the average of character sums for a group of characters,
Acta Arithmetica, Vol.79 (1997) pp.313 – 322.

[5] Friedlander J.-Iwaniec H. : A Note on Character Sums,
Contemporary Mathematics, Vol. 166 (1994) pp.295 - 299

[6] Fujii A.-Gallagher P.X.-Montgomery H.L. : Some hybrid bounds for character sums and Dirichlet L-series,
Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, Vol. 13 (1974) pp. 41 – 57.

[7] Heath-Brown D.R. : Hybrid Bounds for Dirichlet L-Functions,
Inventiones math., Vol.47 (1978) pp.149 – 170.

[8] Heath-Brown D.R. : An Estimate for Heilbronn's Exponential Sum,
Progress in Mathematics, Vol.136 (1996) pp.451 – 463 (Birkhäuser).

[9] Heath-Brown D.R. : New Bounds for Gauss Sums Derived From k-th Powers, and for Heilbronn's Exponential Sum, (pre-print).

[10] Murata Leo : On characters of order p (mod p^2),
to appear in Acta Arithmetica, Vol. 87 (1998).

以上