数理解析研究所講究録
1091巻 1999年 157-171

Topics in Waring's problem for fourth powers.

岩手大学教育学部 川田 浩一
(Koichi KAWADA)

一．序

ここに記す結果は，筆者がミシガン大学に滞在させていただいた1997年の4月から6月の間になされたTrevor D. Wooley氏との共同研究のうちの一つである。滞在中ご親切にして下さり，その費用をもご負担下さったWooley氏ならびにDavid and Lucile Packard Foundationに対し，深く感謝申し上げます。

この節では$G^{\#}(4)$という数について記しておくことにする。2以上の自然数kに対し，「十分大きい自然数は必ずs個のk乗数の和で表せる」といえるようなsのうちで最小のものを$G(k)$と表すが，それがWaring問題において最も注目されている研究対象であろう。この$G(k)$の値が決定されているのは今のところ$k=2,4$の2つの場合のみであり，$k=4$，即ち4乗数の場合は$G(4)=16$であることがDavenport [1]によって示されている。そこで，16個より少ない個数の4乗数の和についても，どの自然数は表せてどの自然数は表せないかを決定しようとする方

向から，$G^{\#}(4)$なる量が定義され（この記号はVaughan[6]によるが，今のところ$G(k)$のように一般に広く通用してはいないようである），4乗数のWaring問題に関して重要な研究対象となっている。$G^{\#}(4)$は次のように定義される；

「自然数nが十分大きく，かつnを16で割った余りrが$1 \leq r \leq s$をみたすならば，必ずnはs個の4乗数の和で表せる」といえるようなsのなかで最小のものを$G^{\#}(4)$とする。

4乗数を16で割ると余りは0か1だから，nを16で割った余りがsより大きければ，nはs個の4乗数の和で表せないことがすぐわかる。さらに，sが16未満でnが16の倍数のとき，nがs個の4乗数の和で表せたとすると，その4乗数たちはすべて偶数でなければならないことがわかり，したがって，$n=16^{l}\cdot m$（$l \geqq 1$，$16 \nmid m$）と表せばnがs個の4乗数の和で表せることとmがs個の4乗数の和で表せることは同値となる。このことから「$G^{\#}(4) \leq s$」が示されれば，ある定数以下の自然数を一つ一つしらみつぶしに検査することによって，s個の4乗数の和で表せる自然数，表せない自然数を決定できる，ということがわかる。

$G^{\#}(4)$に対しては$G^{\#}(4)=5$であろうという予想があるが，現在知られている最良の評価は$G^{\#}(4) \leq 12$で，Vaughan[7]による。残

念ながら我々はこの結果を改良して$G^{\#}(4)\leq 11$を示すことは今までのところできていないが，ある意味でそれに近いことを示すことができる（最終節，定理3）。しかも，今までの常識からするとむしろそれより非常に難しく感じられることをも証明することができるのである（同，定理2）。我々のこの方向の研究について以下に記していくが，詳しい証明については[5]を，また関連する話題などについては[2]，[4]および[5]を参照されたい。なお，この[4]と[5]の順番に関しては，[5]が先に投稿され，その後で[4]が投稿されるという順番であったことを記しておきたい。

二、5個の4乗数の和で表せる自然数の個数について。

1以上の実数Xに対し，X以下の自然数のうち5個の4乗数の和で表せるものの個数を$N(X)$としよう。前節で述べた$G(4)$および$G^{\#}(4)$に関する研究との関連もあって，$N(X)$に対する

$$N(X)\gg X^{\theta} \tag{1}$$

という形の下からの評価がDavenport [1]以来研究対象とされてきていた。もちろんできるだけ大きい正の実数θに対して(1)を示したいわけである。Davenport [1]以前にもHardy-LittlewoodやHuaらによって本質的には同系統の問題が考えられていたと言って良いが，はっきりと$N(X)$という量を定義したのは[1]

が最初であり，その中でDavenportは $\theta<\frac{5539}{6268}=0.8836\ldots$ なる θ に対して(1)を示した。その結果は半世紀近く改良されなかったが，1980年代半ば過ぎからThanigasalamやVaughanらによって改良され，現在までの文献の中で明示されているうちで最良のものは，$\theta<\frac{103-9\sqrt{5}}{88}=0.9417\ldots$ であれば(1)が成立する，というVaughan[7]の結果で，それが彼の $G^{\#}(4)\leq 12$ の証明の重要な部分となっている。ただしWooley氏によれば，Wooley[9]の方法を使ってこの θ の限界を0.956程度まで引き上げることは可能で，しかしその程度では $G^{\#}(4)\leq 12$ を改良することはできないのでその結果は発表していないとのことである。

因みに，ラフに言って，今まで知られていたような方法で，$\frac{31}{32}$ よりちょっとでも大きい θ に対して(1)が証明できたとすれば，$G^{\#}(4)\leq 11$ が証明できる。また，$X\to\infty$ のとき $N(X)\sim\frac{1}{3}X$ と予想されるが，この予想が証明できるということと，$G^{\#}(4)\leq 10$ が証明できるということとは，サークル・メソッドを使う限りは，ほとんど同じことと言える。

ところで，X 以下の自然数 n のうち，

(2)　$n=2p^2+l^4+m^4$　（ただし p は3で割ると1余る素数，l, m は自然数）

と表すことができる n の個数を $N_0(X)$ とし，また，n に対して(2)の形の表現のし方の数を $r(n)$ としよう。すると，

(3) $$\sum_{n\le X} r(n) \geqslant \sum_{\substack{p\le\sqrt{X}/2 \\ p:\text{素数} \\ p\equiv 1\ (\mathrm{mod}.3)}} \sum_{l\le\frac{\sqrt[4]{X}}{2}} \sum_{m\le\frac{\sqrt[4]{X}}{2}} 1 \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X}\cdot(\sqrt[4]{X})^2 \gg \frac{X}{\log X}$$

を得る。また不定方程式

$2p_1^2+l_1^4+m_1^4=2p_2^2+l_2^4+m_2^4$ （ただし，$j=1,2$に対し，p_jは3で割って1余る$\sqrt{X}$以下の素数，l_j, m_jは$\sqrt[4]{X}$以下の自然数）

の解の個数を$R(X)$とすると，そのうち$p_1\neq p_2$なる解の個数は，その場合(p_1-p_2)と(p_1+p_2)が，0でない自然数$|l_1^4+m_1^4-l_2^4-m_2^4|$の約数になっていることから，任意の正数$\varepsilon$に対して$O((\sqrt[4]{X})^4\cdot X^{\varepsilon})=O(X^{1+\varepsilon})$であり，一方$p_1=p_2$であれば$l_1^4+m_1^4=l_2^4+m_2^4$となるから，そうなる解の個数は$O(\sqrt{X}\cdot(\sqrt[4]{X})^2\cdot X^{\varepsilon})=O(X^{1+\varepsilon})$であり，したがって，

(4) $$\sum_{n\le X} r(n)^2 \le R(X) \ll X^{1+\varepsilon}$$

を得る。Cauchyの不等式により，

$$\Bigl(\sum_{n\le X} r(n)\Bigr)^2 \leqslant \Bigl(\sum_{\substack{n\le X\\ r(n)>0}} 1\Bigr)\Bigl(\sum_{n\le X} r(n)^2\Bigr)$$

であるから，(3), (4)より，

(5) $$N_0(X)=\sum_{\substack{n\le X\\ r(n)>0}} 1 \geqslant \Bigl(\sum_{n\le X} r(n)\Bigr)^2\Bigl(\sum_{n\le X} r(n)^2\Bigr)^{-1} \gg \Bigl(\frac{X}{\log X}\Bigr)^2\cdot(X^{1+\varepsilon})^{-1} \gg X^{1-2\varepsilon}$$

となる。

さて，代数的整数論において知られている通り，3で割って1余る素数pはある整数x, yによって$p=x^2+xy+y^2$と表わされる。大したことではないが，pは素数だから$xy(x+y)\neq 0$であることに注意しておく。すると，

$$(6) \qquad 2(x^2+xy+y^2)^2 = x^4+y^4+(x+y)^4$$

だから，$2p^2$は3個の4乗数の和で表され，よって(2)の形で表されるnは5個の4乗数の和で表されることがわかる。即ち

$$N(X) \geqslant N_0(X)$$

である。これと(5)から，不等式(1)は1未満の任意のθに対して成立することが証明された。

この議論を精密に行うことにより，実際次の評価を得る。

> $\boxed{\text{定理 1}}$ 任意の正数εに対し，
> $$N(X) \gg X(\log X)^{-1}\exp\left(-(2+\varepsilon)\sqrt{\log X \log\log X}\right).$$

これは，$N(X) \gg X(\log X)^{-1-\varepsilon}$と書いた方が，少し弱くはなるが，見易いだろう。大きいXに対する$N(X)$の挙動についての予想を上述したが，定理1の$N(X)$に対する下からの評価は，少なくとも今まで知られていたものと比べれば，真実にかなり近いものと言って良いであろう。そしてこのことが次節の定理2や3に限らず，[5]にあるような4乗数に関わる多くの加法的問題に対して我々が従来よりも強い結果を得ることができた原因に他ならない。

少なくとも$N(X) \gg X^{1-\varepsilon}$という形の評価の証明は，上でみた通り恒等式(6)に気付けばすごく簡単であるわけだが，ここで，数学的には不要なことではあるが，(6)についての私的な感想などを少し述べさせていただきたい。

$G(3) \leq 7$ を最初に証明したのはLinnikだが，それに関しては，Watson[8]による有名な，非常に短い別証明がある。筆者もその素晴らしさに深い感銘を受けた者の一人である。そこで使われている特異な恒等式の発見は，$(x+y)^3+(x-y)^3=2x^3+6xy^2$ という式の観察によるのではないかと推察して，

(7) $$(x+y)^4+(x-y)^4=2x^4+12x^2y^2+2y^4$$

を眺めてみる。これは x^2，y^2 についての2次形式である。この形をいくつか組み合わせてうまく平方式などをつくったりすれば，そんなに強いことはいえないだろうけど，DeshoillersとDressによる $g(4)=19$ の証明（この主要部は4編の論文から成り，したがって非常に長い）を単純化することぐらいはできるかもしれないなあ，という着想は以前から持っていた。が，そんなに簡単にはうまいものは見付からないだろうし，まあできても高々証明の一部を簡略化するぐらいのことだし，と思って，いつか時間に余裕ができたときにでも考えてみるか，という感じでほったらかしておいたのである。

Ann Arborに滞在中の1997年5月19日の夜に（正確には日付が変わって20日になっていたと思うが）ベッドの中で横になりながら，いつもと同じようにいろいろ考えながら眠るとしよう，と思って，そのときに前述の着想について考えてみることにした。まずは手始めに(7)の右辺を x^2 の2次式とでも思っ

て平方完成をしてみることにした。いうまでもなく文字通り目を瞑っていてもできる作業である。

$$2x^4+12x^2y^2+2y^4=2(x^4+6x^2y^2)+2y^4$$
$$=2\left((x^2+3y^2)^2-9y^4\right)+2y^4=2(x^2+3y^2)^2-16y^4$$

16って2の4乗だよなあ…と思って，ぞわっと身の毛がよだつような感じがした。書き変えれば，

(8) $$2(x^2+3y^2)^2=(x+y)^4+(x-y)^4+(2y)^4$$

である。大変雑な言い方をすれば，たった3つの4乗数で平方数が作れる――その頃には加法的整数論についてそれなりの知識があったので，そんなことが本当だったらものすごいことになるってことがすぐにわかる。例えば本稿の定理1,2などは一瞬にして簡単に得られることがわかる（正確に言えば次節の定理2にある合同式条件に気付くのは数時間後であったが）。

数学のことを考えていて「ぞわっ」となったのは初めてではなかった。それはこれをお読みの多くの方もご経験がおありだろうし，ご理解いただけることと思う。双子素数が無限個あることになったり，$\mathrm{Re}\, s>\frac{3}{4}$ぐらいの範囲で$\zeta(s)$が0にならなかったり…そういったすごいことを証明して，自分の誤りに気付くまで数時間あるいは数日かかる，というのは恐らくそれほどは珍しくないことなのだろう。ここに例に挙げたもの

ほど我々の定理達はすごくはないけれども，それにしても，「どっか間違ってんだろうなあ」とすぐに感じた。学習する，とはつまりそういうことである。

さて，どこが違うのか考えてみる。加法的整数論に精通していれば，(8)以降の議論なんかほとんどないようなものだから，間違っているとしたら(8)自身しかない。なにぶんこっちは半分寝ていたわけで，途中の計算に間違いがあっても何の不思議もない。頭の中で何度も平方完成をやり直してみる。遡って $(x+y)^4$ も展開してみる。間違いが見付からないから，とうとう起き上がって紙に書いて確かめることとなり，結局そのまま眠らずに，翌朝大学に向かうころには，もしかしたら自分の人生の中で一番いい結果になるかもしれない，と思っていました。(そうならないよう今後も努力していくつもりではありますが。)

$x-y$ と $2y$ をたすと $x+y$ になるから，(8)と(6)は，結局同じことである。数日後にDicksonの本[3]のXXII章の脚注227に，式(6)はF. Prothという人が1878年に発見したと書いてあるのが見付かった。そのときは正直なところ少々がっかりした気分になったが，考え直してみれば(6)のような綺麗な式が発見されていなかったらそっちの方がよっぽど不思議，ともいえる。多分，記録は残っていないにせよ，Diophantusの時代にだって，もち

ろん彼自身も含めて，誰かが(6)に気が付いていたんじゃないか…とすら思えるのである。ただしいずれにしても，(6)が，あるいは上記の定理1が，次節の定理2などの加法的問題に対する結果につながるためには，1920年頃からHardy–Littlewoodによって開発が始められるサークル・メソッドが不可欠である。逆にHardy–Littlewood以降，そのサークル・メソッドのあまりの強力さのため，少なくとも加法的整数論の研究者の間では，(6)のような恒等式に対する注意が急激に弱まっていったのではないか，と推察できる。今回の発見は，そういう意味でも，とても幸運だった——と思う。

三、10個の4乗数と1個のk乗数の和について。

サークル・メソッドに慣れている方であれば，前節の定理1ぐらい強い結果を証明できるような技術（本質的に，かつより直接的に言えば，不等式(4)）があれば，次のような定理が証明できることが容易に納得できることと思う。

定理2 kが4の倍数でない自然数であれば，十分大きい自然数は10個の4乗数と1個のk乗数の和として表せる。kが4の倍数であれば，16で割った余りが1以上9以下となるような十分大きい自然数は10個の4乗数と1個のk乗数の和として表せる。

定理の前半は完璧である。kは4の倍数でなければいくら大きくても良いわけである。言うまでもなくkが大きくなるにつれk乗数の密度は薄くなっていくから，「$G^{\#}(4)\leq 11$」よりも難しく感じられることを証明できる，と序の中で書いたのは，この点を指している。

定理の後半，kが4の倍数であるときは，k乗数は4乗数でもあるわけだから，序の中にあるような理由により，16を法とした剰余類についての条件が「16で割った余りが1以上11以下」となっていたら完璧であったと言って良い。つまり，16で割って余りが10や11となる自然数も，それが十分大きければ10個の4乗数と1個のk乗数の和として表されると期待されるが，以下にみるように我々の方法ではそれは証明できないのである。

kが4で割り切れるにしろそうでないにしろ，我々は自然数nの次のような表現を考える。

$$(9)\qquad n=2(x_1^2+x_1y_1+y_1^2)^2+2(x_2^2+x_2y_2+y_2^2)^2+z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4+w^k,$$

ただし右辺の変数はすべて自然数とする。もしnをそのように表現できたとすれば，(6)によりnは10個の4乗数と1個のk乗数の和で表されることがわかる。サークル・メソッドで，nが十分大きいときは(9)の形の表現ができることを示そう，というのが定理2の証明の方針である。それが可能かどうかは劣弧(minor arcs)上の積分がうまくおさえられるかどうかで決まる，

と言っていい。今の場合，本質的に(4)のおかげで，優弧(major arcs)をかなり“狭く”しておいても劣弧上の積分は簡単におさえられるので，全体がうまくいく。優弧上の積分はさほどの困難なく計算できるのである。しかしながら，kが4の倍数でなければ「w^k」の項のおかげで次のような問題が現れないのだが，kが4の倍数のときは16を法とする次のような問題が生じ，そしてそれは優弧上の積分を計算する際の特異級数(singular series)の部分に現われてくる。

前にも述べた通り，4乗数を16で割ると余りは0か1だから，例えばkが4の倍数のとき16で割って余りが11となる自然数が10個の4乗数と1個のk乗数の和で表せたとすると，それらの4乗数とk乗数はすべて奇数でなければならない。ところが(6)の右辺の3つの4乗数は同時に全部奇数となることはできない。よって16で割って11余る数は，十分大きければ10個の4乗数と1個のk乗数の和で表されると予想されるにも拘らず，(9)の形では表すことができないことがわかる。

実際x, y, zが自然数を動くとき，$x^4+y^4+z^4$を16で割った余りは0, 1, 2および3になり得るのに対し，$x^4+y^4+(x+y)^4$を16で割った余りは0か2でしかない。とくに後者が3になれないのが痛く，そのため(6)の形を1回使うたびに16を法とする剰余類を一つ欠くことになるのである。定理2の後半で本来「1以上

11以下」となっていてほしい条件が「1以上9以下」となって2つ欠けているのは，その証明が(6)の形を2回使っている(9)に基づくからである。この点が我々の方法の本質的な欠点であり，(6)を使う限りそれは避けようがない。

さて，定理2において最も興味深いのは$k=4$の場合，つまり11個の4乗数のWaring問題の場合であろう。この場合は，(9)の代わりに

$$n=2(x^2+xy+y^2)^2+z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4+w_1^4+w_2^4+w_3^4+w_4^4$$

の形の表現を考える，ただしx,y,z_iは自然数，w_iは"小さい"素因数しか持たない自然数（いわゆる滑らかな数(smooth numbers)）とする。すると我々の方法とVaughan[7]の方法を合わせることにより，そういう表現を扱うことが可能になるが，今度は(6)の形を1回しか使っていないので，欠ける剰余類を一つに留め，定理2の後半の条件に加えて，16で割って余りが10となる数をもカバーすることができる。即ち次の定理を得る。

> **定理3** 16で割った余りが1以上10以下であるような，十分大きい自然数は11個の4乗数の和として表せる。

$G^{\#}(4)$の定義から明らかなように，あとは16で割って余りが11となる数さえ定理3に含めることができれば$G^{\#}(4)\leq 11$を結論できるわけで，したがって本質的には11個の4乗数の和で

表せる数，表せない数を決定できることになるわけであった。その意味で我々は「$G^{\#}(4) \le 11$ にかなり迫った」と言ってもいいと思う。しかしながら，繰り返しになるが，(6)を1回でも使う以上剰余類を一つは損することを避けられない。そしてその(6)を使うことこそが，今回の我々の方針なのである。

参考文献

[1] H. Davenport, On Waring's problem for fourth powers, Ann. Math. 40(1939), pp. 731–747.

[2] J.-M. Deshoillers, K. Kawada and T. D. Wooley, On the sum of sixteen biquadrates (仮題), in preparation.

[3] L. E. Dickson, "History of the Theory of Numbers, vol. II," Chelsea, New York, 1934.

[4] K. Kawada and T.D. Wooley, Sums of fifth powers and related topics, Acta Arith. 87 (1998), pp. 27–65.

[5] K. Kawada and T.D. Wooley, Sums of fourth powers and related topics, to appear in J. Reine Angew. Math.

[6] R.C. Vaughan, On Waring's problem for smaller exponent, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), pp. 445–463.

[7] R.C. Vaughan, A new iterative method in Waring's problem, Acta Math. 162 (1989), pp. 1–71.

[8] G.L. Watson, A proof of the seven cube theorem, J. London Math. Soc. 26 (1951), pp. 153-156.

[9] T.D. Wooley, Breaking classical convexity in Waring's problem: sums of cubes and quasi-diagonal behaviour, Invent. Math. 122 (1995), pp. 421-451.