数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 218-225

Non-vanishing に関する Stefanicki の定理について

名大多元数理　神谷諭一　(Yuichi Kamiya)

N は自然数とする。$\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ は

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0\ (N) \right\},\quad \Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{matrix} a \equiv d \equiv 1\ (N) \\ c \equiv 0\ (N) \end{matrix} \right\}$$

なる $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群とする。自然数 k, 上半平面上の正則関数 $f(z)$, $GL_2^+(\mathbb{Q})$ の元 γ に対し, $f|[\gamma]_k$ を

$$(f|[\gamma]_k)(z) := (\det \gamma)^{k/2} (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),\quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で定義する。$S_k(\Gamma_1(N))$ は $\Gamma_1(N)$ に対する重さ k の cusp form のなす空間とし, $S_k(N, \psi)$ は

$$S_k(N,\psi) := \left\{ f \in S_k(\Gamma_1(N)) \,\middle|\, f|[\gamma]_k = \psi(d) f,\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

なる $S_k(\Gamma_1(N))$ の部分空間とする。但し ψ は mod N の Dirichlet 指標とする。

次に, $s = \sigma + it$ は複素変数, χ は mod q の Dirichlet 指標, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_f(n) e^{2\pi i n z} \in S_k(\Gamma_1(N))$ とするとき, L 関数を

$$L(f,\chi,s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^s},\quad a_f(n) := \hat{a}_f(n) n^{-(k-1)/2},\quad \sigma > 1$$

で定義する。特に, $f \in S_k(N,\psi)$, $(N,q)=1$, かつ χ が原始的ならば $L(f,\chi,s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続され、関数等式

$$\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{-s}\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right)L(f,\chi,s)=\mu\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{s-1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-s\right)L(f|H_N,\bar{\chi},1-s) \tag{1}$$

を持つ。但し $\mu := i^k\psi(q)\chi(N)W(\chi)^2q^{-1}$ ($W(\chi)$ は Gauss 和), $f|H_N := f\left|\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{pmatrix}\right]_k\right. \in S_k(N,\bar{\psi})$ である。

さて，表題にある Stefanicki の定理 ([2] 参照) について述べよう。

Stefanicki の定理 (の一部)　q は $(N,q)=1$ なる十分大きな自然数とする。$f\in S_k(N,\psi)$ は normalized newform とする。$s=\sigma_0$ $(1/2\leqq\sigma_0<1)$ で $L(f,\chi,s)$ が零にならないような mod q の原始指標の数は

$$\gg\begin{cases}\phi^*(q) & , \quad 1/2<\sigma_0<1\\ \dfrac{\phi^*(q)^2}{2^{\nu(q)}q\log q} & , \quad \sigma_0=1/2\end{cases} \tag{2}$$

で下から押えられる．但し $\phi^*(q)$ は mod q の原始指標の数，$\nu(q)$ は q の相異なる素因子の数とする。

上記の定理の証明方法について簡単に述べよう。まず，

$$\sum_{\chi \bmod q}{}^{*} L(f,\chi,\sigma_0)\sim\phi^*(q), \qquad 1/2\leqq\sigma_0<1 \tag{3}$$

を示す。ここで $\displaystyle\sum_{\chi \bmod q}{}^{*}$ は原始指標にわたる和を意味する。次に，

$$\sum_{\chi \bmod q}{}^{*}|L(f,\chi,\sigma_0)|^2\sim\left(\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{|a_f(n)|^2}{n^{2\sigma_0}}\right)\phi^*(q), \quad 1/2<\sigma_0<1$$

$$\sum_{\chi \bmod q}{}^{*}|L(f,\chi,1/2)|^2\ll 2^{\nu(q)}q\log q \tag{4}$$

を示す。これらと不等式

$$\left|\sum_{\chi \bmod q}{}^{*}L(f,\chi,\sigma_0)\right|^2\leqq\left(\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ L(f,\chi,\sigma_0)\neq 0}}{}^{*}1\right)\left(\sum_{\chi \bmod q}{}^{*}|L(f,\chi,\sigma_0)|^2\right) \tag{5}$$

を用いれば上記の定理を得る。

そこで，(4)における評価を良くすれば，直ちに(2)も改善されることがわかる。以下，(4)より少し良い評価を得るために，Balasubramanian と Ramachandra の方法（[1]参照）に従い $\sum_{\chi \bmod q}^{*} |L(f,\chi,1/2)|^2$ を上から評価する。(*)

<u>補題1</u>　$a_n \in \mathbb{C}$，$n=1,2,3,\cdots$ は次の条件を満たすとする。

：$\sum_{n \le x} |a_n|^2 \ll x$ が $x \ge 1$ なる x について一様に成り立つ。

(i) $x_2 > x_1 > 0$，$\sigma < 1/2$ とすると

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x_1 < n \le x_2} \frac{\chi(n) a_n}{n^s} \right|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{[x_2]-[x_1]-1}{q}\right) x_2^{1-2\sigma}$$

が q，x_1，x_2 について一様に成り立つ。（$\phi(q)$ は Euler 関数）

(ii) $y \ge 1$，$\sigma > 3/2$ とすると

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n > y} \frac{\chi(n) a_n}{n^s} \right|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q}\right) y^{1-2\sigma}$$

が q，y について一様に成り立つ。

(iii) x について一様に

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \le x} \frac{\chi(n) a_n}{n^{1/2}} \right|^2 \ll \phi(q) \left(1 + \frac{x}{q}\right) \log(x+1)$$

が成り立つ。

(*) 私がこの内容について講演させて頂いたときには、この二乗平均を独自の方法で評価できたと思っていたのですが，その後，[1]にほとんど同じ方法が使われていることがわかりました。従って以下の内容に私自身のアイデアはありません。

(証明) (i) 若干の計算により

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{x_1 < n \leq x_2} \frac{\chi(n) a_n}{n^s} \right|^2 \leq \phi(q) \left(1 + \left[\frac{[x_2]-[x_1]-1}{q} \right] \right) \sum_{x_1 < n \leq x_2} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \qquad (6)$$

を得るので $\sum_{x_1<n\leq x_2} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \ll x_2^{1-2\sigma}$ と合わせて主張を得る。

(ii) $\sigma > 3/2$ ならば $\sum_{n>y} \chi(n) a_n n^{-s}$ は絶対収束するので足す順序をかえられる。そこで

$$\sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n>y} \frac{\chi(n) a_n}{n^s} \right|^2 \leq \sum_{\chi \bmod q} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{jy < n \leq (j+1)y} \frac{\chi(n) a_n}{n^s} \right| \right)^2$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \log^2(j+1)} \sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{jy<n\leq(j+1)y} \frac{\chi(n) a_n}{n^s} \right|^2$$

となる。ここで (i) を用いると

$$\ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q}\right) \sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{jy<n\leq(j+1)y} \frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}} \qquad (7)$$

となる。$\sum_{jy<n\leq(j+1)y} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \ll (jy)^{-2\sigma}(j+1)y$ であるから

$$\ll \phi(q) \left(1 + \frac{y}{q}\right) y^{1-2\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} j^{2(1-\sigma)} \log^2(j+1)$$

となり主張を得る。(要するに多少 σ の条件が強くなったが (i) と同じ評価を得た。)

(iii) (6) と $\sum_{n\leq x} |a_n|^2 n^{-1} \ll \log(x+1)$ から主張は従う。//

補題 2　$f \in S_k(N, \Psi)$, $(N, q) = 1$, χ は mod q の原始指標, $x \geq 1$, $y \geq 1$ とする。このとき

$$L(f, \chi, 1/2+it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-\left(\frac{n}{x}\right)^2} + \mu \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{2it} \frac{\Gamma(k/2-it)}{\Gamma(k/2+it)} \sum_{n\leq y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it}}$$
$$- \frac{\mu}{2\pi i} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{2it} \left\{ \int_{(1/4)} \left(\frac{4\pi^2 x}{N q^2}\right)^w \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n\leq y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right.$$
$$\left. + \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{N q^2}\right)^w \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n>y} \frac{\bar{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right\}$$

(証明) メリン逆変換により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-\left(\frac{n}{x}\right)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1)} L(f, \chi, 1/2+it+w) x^w \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} dw$$

を得る。右辺の積分路を移動させて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-\left(\frac{n}{x}\right)^2} = L(f, \chi, 1/2+it) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(-3/2)} L(f, \chi, 1/2+it+w) x^w \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} dw \quad (8)$$

を得る。(この積分路の移動で，被積分関数の $w=0$ における留数のみを考えるために $\Gamma(1+w/2)/w$ を導入している。積分路を $\mathrm{Re}\, w = -3/2$ まで移動させる理由は，もう少し後でわかる。) ここで関数等式(1)を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{(-3/2)} L(f, \chi, 1/2+it+w) x^w \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} dw \\
&= \frac{\mu}{2\pi i} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{2it} \left\{ \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2}\right)^w \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n\le y} \frac{\overline{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right. \\
&\qquad \left. + \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2}\right)^w \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n>y} \frac{\overline{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw \right\}
\end{aligned}$$

となる。上式の1番目の積分の積分路を $\mathrm{Re}\, w = 1/4$ まで移動させ，これを(8)へ代入すると補題の主張を得る。//

さて，補題2と同じ記号のもとで

$$I(x, \chi) := \sum_{n>x} \frac{\chi(n) a_f(n)}{n^{1/2+it}} e^{-\left(\frac{n}{x}\right)^2}$$

$$J(x, y, \chi) := \int_{(1/4)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2}\right)^w \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n\le y} \frac{\overline{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw$$

$$K(x, y, \chi) := \int_{(-3/2)} \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2}\right)^w \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \sum_{n>y} \frac{\overline{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} dw$$

とおき，これらの原始指標に関する二乗平均を評価する。最初に，$\sum_{n\le x} |a_f(n)|^2 \ll x$，$\sum_{n\le x} |a_{f|H_N}(n)|^2 \ll x$ となることに注意しておこう。

(7) 式により

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} |I(x,\chi)|^2 \ll \phi(q)\left(1+\frac{x}{q}\right)\sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{jx<n\le (j+1)x} \frac{|a_f(n)|^2}{n} e^{-2\left(\frac{n}{x}\right)^2}$$
$$\ll \phi(q)\left(1+\frac{x}{q}\right)\sum_{j=1}^{\infty} j \log^2(j+1) \sum_{jx<n\le (j+1)x} |a_f(n)|^2 \cdot \frac{x^4}{n^5}$$
$$\ll \phi(q)\left(1+\frac{x}{q}\right)\sum_{j=1}^{\infty} j^{-3} \log^2(j+1)$$
$$\ll \phi(q)\left(1+\frac{x}{q}\right) \tag{9}$$

を得る。次に, Cauchy - Schwarz の不等式により

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} |J(x,y,\chi)|^2 \le \int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw|$$
$$\times \int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2}\right)^{1/2} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \left| \sum_{n\le y} \frac{\overline{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} \right|^2 |dw|$$

となる。ここで補題 1 (i) を用いると

$$\ll \phi(q)\left(1+\frac{y}{q}\right)\left(\frac{xy}{q^2}\right)^{1/2} \left(\int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw| \right)^2$$

となる。若干の計算により ($\tau := |t|+2$ とおく)

$$\int_{(1/4)} \left| \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw| \ll \tau^{-1/2}$$

がわかるので, 結局

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} |J(x,y,\chi)|^2 \ll \phi(q)\left(1+\frac{y}{q}\right)\left(\frac{xy}{q^2\tau^2}\right)^{1/2} \tag{10}$$

を得る。最後に, また Cauchy - Schwarz の不等式により

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} |K(x,y,\chi)|^2 \le \int_{(-3/2)} \left| \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| |dw|$$
$$\times \int_{(-3/2)} \left| \frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)} \frac{\Gamma(1+w/2)}{w} \right| \left(\frac{4\pi^2 x}{Nq^2}\right)^{-3} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \left| \sum_{n>y} \frac{\overline{\chi}(n) a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it-w}} \right|^2 |dw|$$

となる。ここで補題 1 (ii) を用いると (補題 1 (ii) を用いるために積分路を $\mathrm{Re}\, w = -3/2$ へ移動したのである。)

$$\ll \phi(q)\left(1+\frac{y}{q}\right)\left(\frac{xy}{q^2}\right)^{-3}\left(\int_{(-3/2)}\left|\frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)}\,\frac{\Gamma(1+w/2)}{w}\right||dw|\right)^2$$

となる。若干の計算により

$$\int_{(-3/2)}\left|\frac{\Gamma(k/2-it-w)}{\Gamma(k/2+it+w)}\,\frac{\Gamma(1+w/2)}{w}\right||dw| \ll \tau^3$$

がわかるので，結局

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} |K(x,y,\chi)|^2 \ll \phi(q)\left(1+\frac{y}{q}\right)\left(\frac{xy}{q^2\tau^2}\right)^{-3} \tag{11}$$

を得た。

補題2，(9)，(10)，(11) で $x=y=q\tau$ とおくと次の定理を得る。

定理　$f\in S_k(N,\psi)$，$(N,q)=1$，$\tau=|t|+2$，χ は mod q の原始指標とする。このとき

$$L(f,\chi,1/2+it)=\sum_{n\le q\tau}\frac{\chi(n)a_f(n)}{n^{1/2+it}}e^{-\left(\frac{n}{q\tau}\right)^2}+\mu\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}q}\right)^{2it}\frac{\Gamma(k/2-it)}{\Gamma(k/2+it)}\sum_{n\le q\tau}\frac{\bar{\chi}(n)a_{f|H_N}(n)}{n^{1/2-it}}+R_t(\chi)$$

で $R_t(\chi)$ を定義すると

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*}|R_t(\chi)|^2 \ll \phi(q)\tau$$

が q と τ について一様に成り立つ。

この定理における2つの Dirichlet 多項式を補題1 (iii) を用いて評価すれば，次の系を得る。

系1　$f\in S_k(N,\psi)$，$(N,q)=1$，$\tau=|t|+2$ とする。このとき

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*}|L(f,\chi,1/2+it)|^2 \ll \phi(q)\tau\log(q\tau)$$

が q と τ について一様に成り立つ。

$t=0$ のとき，系1における評価は(4)より少し良い。従って(3)，(5)，系1を合わせると次の系が得られる。

<u>系2</u>　q は $(N,q)=1$ なる十分大きな自然数とする。$f \in S_k(N,\psi)$ は normalized newform とする。$L(f,\chi,1/2)$ が零にならないような mod q の原始指標の数は

$$\gg \frac{\phi^*(q)^2}{\phi(q)\log q}$$

で下から押えられる。

上の系で f を normalized newform としたのは，[2]で(3)式を証明するときにこの仮定を用いるからである。

私は Balasubramanian と Ramachandra の方法は系1のような上からの評価を得るには有効であると思う。一方 Stefanicki の論文は，むしろ多少条件がついても漸近式を出すことを目標としている。私は上記の定理から q が素数のときに漸近式を出そうと試みたができなかった。やはり漸近式を出すには Stefanicki の方法が優れていると思う。

<u>参考文献</u>

[1] R. Balasubramanian and K. Ramachandra, *An alternative approach to a theorem of Tom Meurman*, Acta Arith. LV (1990), 351 − 364.

[2] T. Stefanicki, Non-vanishing of L-functions attached to automorphic representations of GL(2) over $\mathbb{Q}$, J. Reine Angew. Math. 474 (1996), 1−24.