

極限公式に現れる特殊函数と相互法則について

吉田敬之 (京大理)

§0. 序

筆者は 1995 年 11 月 及び 1998 年 1 月の数理解析研究所の研究集会で “On absolute CM-periods” と題する講演を行った. この内容は [Y3], [Y4] と [Y5] に対応する. 講演の後に専門家から Stark-Shintani 予想との関係は? という質問を受けることが何度あった. 筆者は京都大学における大学院生向けの講義でこの事情は詳しく説明したこともあり, また [Y4], §4 でもある程度論じているのだが, 専門家にもこの関係は自明ではないことを思い知らされた. そこで本稿では, 簡単な歴史的説明とともに, Stark - Shintani 予想と Absolute CM-periods についての予想の関係を解説することを試みた.

大雑把に言えば, 両者はほぼ補完的な関係にある. たとえば l を素数として $\Gamma(n/l)$, $1 \leq n \leq l$ の性格について考えると, これは π のべきを無視すれば, すべて円単数と CM-period によって説明できるのである (cf. [Y3], §2). しかし, 本稿の Conjectures A, B はこれよりもやや深い level にある.

記号は通常用いられているものに従ったが少し説明しておく. $B_n(x)$ は n 次の Bernoulli 多項式を表す. 代数体 K に対して, E_K, h_K, R_K, w_K はそれぞれ K の単数群, 類数, regulator, K にふくまれる 1 のべき根の数を表す. K の integral ideal $\mathfrak{f}$ について $C_{\mathfrak{f}}$ は $\mathfrak{f}$ と K のある archimedean primes の積をかけたものを法として得られる K の ideal class group を表す. ここで archimedean primes のどういう積を取っているかが重要であるが, それは文脈から明らかになるように注意した. $c \in C_{\mathfrak{f}}$ に対して $\zeta_K(s, c)$ は class c の partial zeta function を表す.

§1. 歴史

代数体 F のゼータ函数 $\zeta_F(s)$ についての公式

$$(1) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_F(s) = \frac{2^{r_1+r_2} \pi^{r_2} h_F R_F}{w_F |D_F|^{1/2}}$$

は Dirichlet が発見して以来 (一般の場合は Dedekind), 整数論における基本公式であった. K が F のアーベル拡大とすると, (1) により相対類数 h_K/h_F は, $\text{Gal}(K/F)$ の指標 χ について, $L(1, \chi)$ がわかれば計算できるため, $L(1, \chi)$ の研究が次の課題として捉えられるようになった. 19 世紀には, Kummer が $F = \mathbb{Q}$ の場合に $L(1, \chi)$ の公式を求め, 類数と単数の間の関係, Fermat の問題への応用等を見出した. また Kronecker は F が虚 2 次体, $\zeta_F(s, c)$ を F の ideal 類に属する部分ゼータ函数とすると, $\zeta_F(s, c)$ の $s=1$ での Laurent 展開

$$(2) \quad \zeta_F(s, c) = \frac{2\pi}{w_F |D_F|^{1/2}} \frac{1}{s-1} + a_c + \cdots$$

の第二項 a_c が Dedekind の η -函数で表されることを発見している. 即ち c を代表する ideal を $\mathfrak{a} = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$, $w = \omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$ とするとき,

$$(3) \quad a_c = \log \frac{1}{2|D_F|^{1/2}} + 2\gamma - \log \Im(w) - \log |\eta(w)|^4.$$

(所謂 Kronecker の極限公式). ここに γ は Euler の定数である. この極限公式は, Hecke の一連の研究のインスピレーションの源であったと思われる. Hecke は 2 変数の Hilbert modular 函数の虚数乗法を考察し, 古典的な虚数乗法論を, 基礎体が実 2 次体の総虚 2 次拡大体の場合に拡張した (全集 1, 4). 関連した, しかし別の研究方向として彼は Hilbert の第 12 問題との関係で (2) の型の Laurent 展開の第 2 項に現れる解析函数に興味を持ち, これを種々の観点から研究した (全集 3, 10, 15, 17, 20, 21).

Hecke の虚数乗法の仕事は, 1950 年代の志村-谷山-Weil の研究により高次元化がなされたが,¹ 1960 年代から 1980 年代に至る志村の研究により, 虚数乗法をもつアーベル多様体のゼータ函数, 周期, モジュラー函数との関連について, 高い立場からの眺望が得られるようになった. 志村 [Sh10] を参照されたい.

極限公式についての Hecke の研究の内発表されたものは 1920 年代で終わっている. その後 1961 年に Siegel の講義録 ([Si]) が現れ, 1970 年には (2), (3) の拡張を与える浅井氏の論文 ([As]) が現れた. また 1970 年に Stark は $L(1, \chi)$ の一般的性格についての予想を発表している. その後 1970 年代における Stark と新谷の研究により $L(1, \chi)$ の性格が更に明確にされるようになった.

§2. Stark-新谷の予想

Stark-新谷の研究を現時点で明らかになっている見方から説明しよう. まず $L(1, \chi)$ を考えるよりも $L(s, \chi)$ を $s=0$ で考察するほうがより基本的 (単に簡明という以上の意味) であることが明らかになった. $\zeta_F(s)$ の函数等式により公式 (1) は

$$(1') \quad \zeta_F(s) \sim -\frac{h_F R_F}{w_F} s^{r_1+r_2-1}, \quad s \rightarrow 0$$

と同値になる. K を F の有限次 Galois 拡大, $G = \text{Gal}(K/F)$ としよう.

$$(4) \quad \zeta_K(s) = \prod_{\chi \in \hat{G}} L(s, \chi, K/F)^{\dim \chi}$$

であるから, (1') の左辺が (4) に従って分解すると考えると

CONJECTURE 1 (STARK, [ST], II, P. 61). $F = \mathbf{Q}$ とする. χ は trivial 表現を含まないと仮定する.

$$L(s, \chi) \sim c s^{r(\chi)}, \quad s \rightarrow 0, \quad c \neq 0$$

とおくと, $c = R(\chi)$ は, K の unit の絶対値の対数の代数的数を係数とする 1 次結合のなす $r(\chi) \times r(\chi)$ 行列の determinant である.

この予想により, $r(\chi) = 1$ の場合に $L'(0, \chi)$ を研究すれば, 非常に面白い結果が得られるであろうと考えられる. 以下 F は総実代数体を表すとしよう. $[F : \mathbf{Q}] = n$ とおき, ∞_1 ,

¹これは必ずしも正確な表現ではない. [Sh10] の序文参照.

$\infty_2, \dots, \infty_n$ により F の archimedean primes 全体を表す. K は F の有限次アーベル拡大体であって, K/F では archimedean prime は ∞_1 のみが分解しているとする. 従って, K の F 上の類体としての conductor は, F の整 ideal $\mathfrak{f}$ によって $\mathfrak{f}\infty_2\infty_3\cdots\infty_n$ となる. $\mathfrak{f}\infty_2\infty_3\cdots\infty_n$ を法とする F の ideal 類 c に対して

$$\zeta_F(s, c) = \sum_{\mathfrak{a} \in c} N(\mathfrak{a})^{-s}$$

を類 c の partial zeta function としよう.

CONJECTURE 2(STARK-SHINTANI, CF. TATE [T], P. 89, P. 93). $n \geq 2$, または $n = 1, \mathfrak{f} \neq (1)$ とする. K の unit $\epsilon \in E_K$ があって

$$\epsilon^\sigma = \exp(-2\zeta'_F(0, c)), \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(K/F)$$

が成立つ. ここに $\sigma = \left(\frac{K/F}{c}\right)$.

この予想は一種の explicit reciprocity law を与えているとみなせる. $\chi \in \hat{G}$, $G = \text{Gal}(K/F)$ の conductor が $\mathfrak{f}\infty_2\infty_3\cdots\infty_n$ のとき

$$L(s, \chi) = \sum_c \chi(c) \zeta_F(s, c)$$

であるから

$$L'(0, \chi) = -\frac{1}{2} \sum_\sigma \chi(\sigma) \log \epsilon^\sigma$$

となり Conjecture 1 が精密化される.

新谷氏は, $\mathfrak{f}\infty_1\infty_2\cdots\infty_n$ を法とする F の ideal class c に対して $\zeta_F(0, c)$ の初等的表示, 及び $\zeta'_F(0, c)$ の多重ガンマ函数を用いる表示を与えた.² $n = 2$ のときにこの公式を書き下してみよう. $\epsilon > 1$ を F の総正単数群の generator とする. $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_{h_0}$ を F の狭義 ideal 類を代表する整 ideal とする. とおく. $\mathfrak{a}_\mu$ を $\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{f}$ と c が同じ狭義 ideal 類に属するようにとり

$$R(\epsilon, c) = \{z = x + y\epsilon \in (\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{f})^{-1} \mid x, y \in \mathbf{Q}, 0 < x \leq 1, 0 \leq y < 1, (z)\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{f} \equiv c\}$$

とおく. ここに $\equiv$ は $C_{\mathfrak{f}}$ で同じ類に属することを表す.

THEOREM 3(SHINTANI, [SHI4], [SHI5]).

$$\zeta_F(0, c) = \sum_{z \in R(\epsilon, c)} \left\{ \frac{\epsilon + \epsilon'}{4} (B_2(x) + B_2(y)) + B_1(x)B_1(y) \right\},$$

$$\begin{aligned} \zeta'_F(0, c) = \sum_{z \in R(\epsilon, c)} & \left\{ \log \frac{\Gamma_2(z, (1, \epsilon))\Gamma_2(z', (1, \epsilon'))}{\rho_2((1, \epsilon))\rho_2((1, \epsilon'))} + \frac{\epsilon' - \epsilon}{2} \log \epsilon B_2(x) \right\} \\ & - \log N(\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{f}) \zeta_F(0, c). \end{aligned}$$

²ここで archimedean primes による類別の違いに注意

§3. 志村の周期記号 p_K

次に、志村の研究について説明しよう。 K を F の総虚 2 次拡大体とする。 CM 体と呼ぶ。 $J_K = \text{Hom}(K, \mathbb{C})$, I_K を J_K によって生成される free abelian group とする。 $\Phi \subset J_K$ が、 $\Phi|F = J_F$ をみたすとき Φ を K の CM-type と呼ぶ。 $a, b \in \mathbb{C}$ に対して、 $b \neq 0$, $a/b \in \overline{\mathbb{Q}}$ であるとき $a \sim b$ とかく。

THEOREM 4 (SHIMURA, CF. [SH10], THEOREM 32.5). 周期記号 $p_K : I_K \times I_K \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ があって

- (1) p_K は $\text{mod } \overline{\mathbb{Q}}^\times$ でみると bilinear.
- (2) A は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上に定義された CM-type (K, Φ) の abel 多様体とする。 $\sigma \in \Phi$ に対して ω_σ は $a \in K \cap \text{End}(A)$ の作用で a^σ 倍で変換する holomorphic 1-form とする。このとき

$$\int_z \omega_\sigma \sim \pi p_K(\sigma, \Phi)$$

が任意の 1-cycle $z \in H_1(A, \mathbb{Z})$ に対して成立つ。

- (3) f は weight $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ の meromorphic Hilbert modular form,

$$f(z) = \sum_{\alpha \in F} a(\alpha) \exp(2\pi\sqrt{-1} \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\alpha z)), \quad z \in \mathfrak{H}^n$$

を Fourier 展開とする。すべての Fourier 係数 $a(\alpha)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ に属すると仮定する。 $z \in K$ と $\tau_1, \dots, \tau_n \in J_K$ が $\Im(z^{\tau_i}) > 0$, $1 \leq i \leq n$ を充たせば

$$f(z^{\tau_1}, \dots, z^{\tau_n}) \sim p_K\left(\sum_{i=1}^n k_i \tau_i, \tau_1 + \dots + \tau_n\right)$$

が左辺が finite ならば成立つ。

p_K は他にも重要な functorial properties を持つがそれは省略する。 Theorem 4, (3) を Eisenstein 級数に適用することによって、つぎの定理が得られる。以下 ρ により複素共役写像を表す。

THEOREM 5 (SHIMURA, CF. [SH10], THEOREM 32.12). K は CM 体, Φ は K の CM-type , t_σ , $\sigma \in \Phi$ は非負整数, $\mathfrak{q}$ は K の整 ideal とする。 λ は K の A_0 型の量指標で

$$\lambda((\alpha)) = \prod_{\sigma \in \Phi} \left(\frac{\alpha^{\sigma\rho}}{|\alpha^\sigma|} \right)^{t_\sigma}, \quad \alpha \equiv 1 \pmod{\times \mathfrak{q}}$$

をみたすとする。このとき整数 m が $m \equiv t_\sigma \pmod{2}$, $-t_\sigma < m \leq t_\sigma$ をすべての t_σ にたいして充たせば

$$L(m/2, \lambda) \sim \pi^{e/2} p_K\left(\sum_{\sigma \in \Phi} t_\sigma \cdot \sigma, \Phi\right).$$

ここに $e = mn + \sum_{\sigma \in \Phi} t_\sigma$.

Theorem 5 において λ の conductor は $\mathfrak{q}$ を割り切るが、 λ を primitive と仮定する必要はない。 Theorem 5 の量指標を $\text{type}(\Phi, \sum_{\sigma \in \Phi} t_\sigma \cdot \sigma)$ であると呼ぼう。

K は判別式 $-d$ の虚 2 次体とする. χ は 2 次拡大 $K/\mathbf{Q}$ に対応する Dirichlet 指標とする. このとき

$$(5) \quad \pi p_K(\text{id}, \text{id})^2 \sim \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{w_K \chi(a)/2h_K}$$

が成立つ (Chowla-Selberg, 1949, cf. [SC], §12). 例えば, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ のときは

$$\pi p_K(\text{id}, \text{id}) \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$$

からわかるが, 一般の虚 2 次体については, 楕円積分の直接計算からは得られない. $L'(0, \chi)$ を (2), (3), $|\eta(w)|^4 \sim p_K(\text{id}, \text{id})^2$ によって計算し, $\zeta_{\mathbf{Q}}'(0, c)$ を Hurwitz の公式によりガンマ関数で表示して比較すると得られる. ほかに幾何学的な証明法がある. (たとえば [G], [An], [Y3], §2.)

§4. CM-period についての予想

CONJECTURE 6 (COLMEZ [C], [Y3], [Y4]). L は $\mathbf{Q}$ 上 normal な CM 体とする. $G = \text{Gal}(L/\mathbf{Q})$ とおく. G の共役類 c に対して

$$\prod_{\sigma \in c} p_L(\text{id}, \sigma) \sim \pi^{-\mu(c)} \prod_{\eta \in \hat{G}_-} \exp\left(\frac{|c| \chi_{\eta}(c)}{|G|} \cdot \frac{L'(0, \eta)}{L(0, \eta)}\right).$$

ここに $\hat{G}_-$ は G の既約表現 η で $\eta(\rho) = -\text{id}$ をみたすものの同値類の集合, χ_{η} は η の指標を表す. $\mu(c)$ は $c = \{1\}$ のとき 1, $c = \{\rho\}$ のとき -1 , それ以外の場合は 0 とする.

REMARK 7. K は $\mathbf{Q}$ の有限次 Galois 拡大体, χ は $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の表現とする. このとき $\exp(L'(0, \chi)) \bmod \overline{\mathbf{Q}}^{\times}$ は Conjectures 1, 6 によって予想可能である.

根拠を説明しよう. χ は faithful, irreducible で $\chi \neq 1$ と仮定してよい. $L(s, \chi)$ の Gamma factor を $\Gamma(s/2)^a \Gamma((s+1)/2)^b$ とする. $a \geq 2$ ならば $L'(0, \chi) = 0$ であるから問題ない. $a = 1$ のときは $r(\chi) = 1$ であり Conjecture 1 によりわかる. $a = 0$ としよう. このとき $\chi(\rho) = -\text{id}$ である. χ は faithful であるから ρ は $G = \text{Gal}(L/\mathbf{Q})$ の center に入っている. よって K は CM 体であり, $\chi \in \hat{G}_-$ である. このときは Conjecture 6 によって予想できる.

Conjecture 6 の特別の場合として次のことがわかる ([Y4], §2). K を CM 体, F を K の最大実部分体とし, χ を 2 次拡大 K/F に対応する F の idele 群 $F_A^{\times}$ の Hecke character とする. このとき, Conjecture 6 を仮定すれば

$$(6) \quad \frac{L'_F(0, \chi)}{L_F(0, \chi)} \sim \pi^{[F:\mathbf{Q}]} \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\sigma, \sigma).$$

Chowla-Selberg 公式 (5) は (6) において $F = \mathbf{Q}$ の場合である.

Conjecture 6 は次のように変形できる.

PROPOSITION 8. K は CM 体で n 次の総実代数体 F のアーベル拡大になっているとする. $G = \text{Gal}(K/F)$, $J_F = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ とおき σ_i の J_K への任意の拡張を同じ文字 σ_i によって表す. Conjecture 6 を仮定する.

$$(7) \quad \prod_{i=1}^n p_K(\sigma_i, \tau\sigma_i) \sim \pi^{-n\mu(\tau)} \prod_{\chi \in \hat{G}_-} \exp\left(\frac{\chi(\tau)}{|G|} \frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right)$$

が任意の $\tau \in G$ に対して成立つ.

p_K についての志村の定理 (Theorem 4, [Sh10] 参照) により

$$p_K(\sigma_i, \tau\sigma_i) \sim p_{K^{\sigma_i}}(\text{id}, \sigma_i^{-1}\tau\sigma_i)$$

であることを注意しておこう.

Proposition 8 において, $\chi \in \hat{G}_-$ の conductor を $f\infty_1\infty_2\cdots\infty_n$ とする. このとき

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \sum_{c \in C_f} \chi(c) \zeta_F(s, c), \\ L'(0, \chi) &= \sum_{c \in C_f} \chi(c) \zeta'_F(0, c) \end{aligned}$$

となる. ここに C_f は $f\infty_1\infty_2\cdots\infty_n$ を法とする F の ideal 類群を表す. $\zeta'_F(0, c)$ を新谷の公式で多重ガンマ函数により表す. このとき (7) の左辺の分解に伴って右辺も自然に分解していることがわかる. $g_K(\text{id}, \tau)$, $\tau \in \text{Gal}(K/F)$ を多重ガンマ函数によって定義して (7) の右辺 $= \prod_{i=1}^n g_{K^{\sigma_i}}(\text{id}, \sigma_i^{-1}\tau\sigma_i)$ とできる.

CONJECTURE A (cf. [Y5]). $\tau \in \text{Gal}(K/F)$ に対して $p_K(\text{id}, \tau) \sim g_K(\text{id}, \tau)$.

ここで, $g_K(\text{id}, \tau)$ の定義が canonical になるように, 細心の注意を払わねばならない. $[F : \mathbf{Q}] = 2$, $[K : F] = 2$ の場合の $g_K(\text{id}, \text{id})$ の定義を書いておこう. K の F 上の類体としての conductor を $f\infty_1\infty_2$ とする. χ を K/F に対応する C_f の指標とする.

$$\begin{aligned} g_K(\text{id}, \text{id}) &= \pi^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2L(0, \chi)} \sum_{c \in C_f} \sum_{z \in R(\epsilon, c)} \left[\log \frac{\Gamma_2(z, (1, \epsilon))}{\rho_2((1, \epsilon))} + \frac{\epsilon' - \epsilon}{4} \log \epsilon B_2(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \log N(\mathfrak{a}_{\mu f}) \times \{\epsilon' B_2(x) + \epsilon B_2(y) + 2B_1(x)B_1(y)\} \right] \right). \end{aligned}$$

このとき a を $b\sqrt{d}$ の形の数として ($F = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$) Conjecture A は

$$(8) \quad \pi p_K(\text{id}, \text{id})^2 \sim \epsilon^a \prod_{c \in C_f} \left\{ \prod_{z \in R(\epsilon, c)} \frac{\Gamma_2(z, (1, \epsilon))}{\rho_2((1, \epsilon))} \right\}^{\chi(c)/L(0, \chi)}$$

となるから Chowla-Selberg 公式との類似は明らかである.

CONJECTURE B (cf. [Y5]). λ_i を K の A_0 型量指標として志村の定理 (Theorem 5) から

$$\prod_{i=1}^q L(m/2, \lambda_i)^{\epsilon_i} \sim \pi^A p_K(\text{id}, \tau)^e$$

が得られたとする. ここに $A, e, \epsilon_i \in \mathbf{Z}$ であるとする. このとき $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ に対して, 1 のべき根 ζ があって

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^q L(m/2, \lambda_i)^{\epsilon_i}}{\pi^A g_K(\text{id}, \tau)^e} \right)^\sigma = \zeta \cdot \frac{\prod_{i=1}^q L(m/2, \lambda_i^\sigma)^{\epsilon_i}}{\pi^A g_{K^\sigma}(\text{id}, \sigma^{-1}\tau\sigma)^e}$$

が成立つ.

ここで対応 $\sigma \longrightarrow \zeta = \zeta(\sigma)$ は一種の reciprocity map であると考えられる. K が虚 2 次体のとき, 志村の相互法則 ([Sh3], Main Theorem III) によって $\zeta(\sigma)$ は決定できる. 一般の場合にも $\zeta(\sigma)$ の形は motive 理論によってある程度予想できる.

§5. Examples

$F = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i)$ ととる. このとき $\epsilon = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $h_F = h_K = 1$ である. K の F 上の conductor は $f\infty_1\infty_2$, $f = (\frac{13+\sqrt{5}}{2})$, $N(f) = 41$. $\sigma \in J_K$ を

$$\left(\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i \right)^\sigma = \sqrt{\frac{13-\sqrt{5}}{2}}i$$

で定める. $0 \leq a, b \in \mathbf{Z}$ に対して $\lambda_{a,b}^{(1)}$ は conductor (1), type $(\{1, \sigma\}, a + b\sigma)$ の K の A_0 型の量指標, $\lambda_{a,b}^{(2)}$ は conductor (1), type $(\{1, \sigma\rho\}, a + b\sigma\rho)$ の K の A_0 型の量指標とする.

$$Q_1 = \frac{L(1, \lambda_{4,2}^{(1)})L(1, \lambda_{4,2}^{(2)})L(1, \lambda_{2,2}^{(1)})^{-1}L(1, \lambda_{2,2}^{(2)})^{-1}}{\pi^2 g_K(\text{id}, \text{id})^2}$$

とおく. Theorem 5 によって分子 $\sim \pi^2 p_K(\text{id}, \text{id})^2$ となるので, Conjecture A が成立てば, Q_1 は代数的数になるはずである. Q_1 の “共役” は Conjecture B によってわかるので, この二つをまとめて計算することにより

$$Q_1 = \epsilon^{22/41} \cdot \frac{245 + 60\sqrt{5}}{3 \cdot 41}$$

が得られる. ここに両辺は 45 桁まで一致する. 精度をあげて二回目の計算を行うことにより 112 桁まで一致することを確認した. ここで (8) において $a = -8\sqrt{5}/41$ であり, $22 - 8\sqrt{5} \equiv 0 \pmod{(\frac{13-\sqrt{5}}{2})} = f'$ が成立している.

考察を K の $\mathbf{Q}$ 上の normal closure に迄拡大すると, Conjecture B に現れる数の間に著しい相互関係が生じる. 実例について詳しくは [Y5] を参照されたい.

§6. 浅井の極限公式との関係

筆者は 1983 年に Conjecture A に相当するものの存在を想像していたが、はっきりした形に定式化することはできなかった。以下に浅井氏による極限公式との関係について述べるが、これはこの頃のノートに記していたものを展開したものである。

$[K:F] = 2$, F の類数は 1 としよう。後の仮定は必ずしも必要ではない。 c を K の ideal class とする。 $\mathfrak{a}^{-1} \in c$ をとり

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{D}_F \omega_1 \oplus \mathfrak{D}_F \omega_2, \quad w = \omega_1 / \omega_2$$

とおく。CM-type Φ をとって、 w を $\mathfrak{h}^n$ の点とみる。このとき

$$(9) \quad \zeta_K(s, c) = \frac{2^{2n-2} \pi^n R_F}{[E_K : E_F] |D_K|^{1/2}} \times \left[\frac{1}{s-1} - n \log 2 - \log \prod_{\sigma \in \Phi} \Im(w^\sigma) \right. \\ \left. + \log \left(\frac{|D_F|}{|D_K|^{1/2}} \right) + \frac{|D_F|^{1/2} \gamma_F}{2^{n-2} R_F} + h(w) \right] + O(s-1), \quad s \rightarrow 1$$

となる。ここに $h(w)$ は浅井氏 ([As]) によって導入された函数で、 $\mathfrak{h}^n$ 上の C^∞ 函数で、Laplacian $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$, $1 \leq i \leq n$ で消えている。詳しい定義は省くが、 $F = \mathbb{Q}$ のとき、 $h(z) = -\log |\eta(z)|^4$ である。また γ_F は F の Dedekind zeta function の $s=1$ における Laurent 展開の定数項をあらわす。 h の正則微分を考えると Hecke が全集, 20 で考察している函数と関係がつく。興味深い事実として指摘しておく。

PROPOSITION 9. Conjecture 6 を仮定する。このとき

$$\exp\left(-\frac{1}{h_K} \sum_{i=1}^{h_K} h(w_i)\right) \sim \exp\left(\frac{|D_F|^{1/2} \gamma_F}{2^{n-1} R_F} - n\gamma\right) \prod_{\sigma \in J_K} p_K(\sigma, \sigma).$$

ここに K の各 ideal 類 c_i に対して、CM-type Φ_i と $w_i \in \mathfrak{h}^n$ を上述のようにとったとする。

$h(w)$ を用いる Conjecture 6 の証明 (可能かどうかかわからないが) の困難を分析してみよう。まず Proposition 9 の証明であるが (9) を用いて

$$(10) \quad \frac{L'_F(0, \chi)}{L_F(0, \chi)} = n\gamma + n \log 4\pi - \log |D_K|^{1/2} - \frac{|D_F|^{1/2} \gamma_F}{2^{n-1} R_F} \\ - \frac{1}{h_K} \left(\sum_{i=1}^{h_K} (h(w_i) - \log \prod_{\sigma \in \Phi_i} \Im(w_i^\sigma)) \right)$$

を得る。ここに Φ_i は w_i を CM-point とみなすためにとった K の CM-type である。(10) と (6) により Proposition 9 がわかる。

さらに

$$(11) \quad h(w) - \log N(\Im(w)) = \frac{w_K}{R_K h_K} \sum_{\omega \neq 1} \omega(\mathfrak{a}) R(\omega^{-1}) + n\gamma + n \log 4\pi \\ - \frac{1}{2} \log |D_K| - \frac{L'_F(0, \chi)}{L_F(0, \chi)} - \frac{|D_F|^{1/2} \gamma_F}{2^{n-1} R_F}$$

は注意深く計算すれば比較的容易に示すことができる。ここに ω は K の ideal class group の character の上を走り, $R(\omega)$ は $L(s, \omega)$ の $s = 0$ での Taylor 展開の先頭項の係数である。 $n = 1$, K が虚 2 次体ならば Stark 予想によって,

$$R(\omega^{-1}) = c \sum_{\tau \in G} \omega(\tau)^{-1} \log |\epsilon^\tau|, \quad c \in \mathbf{Q}$$

の形である。ここに H を K の Hilbert 類体として, $G = \text{Gal}(H/K)$, $\epsilon \in E_H$ である。したがって (11) の右辺の ω についての和は simplify され, これは $\exp(-h(z)) = |\eta(z)|^4$ の CM-point での値が単純に記述できることに対応する。一方 $n \geq 2$ のとき $R(\omega)$ は単数の対数の n 次式になっている。(実例を持っている。) そのうえ $\gamma_F \neq \gamma$ である。これは非常な困難 (あるいは面白さ) を暗示していると言えよう。ともかく高度に非正則な函数 h の CM-point における値の性格がある程度予見できるようになったのは, 一つの進歩であるとも言えよう。

References

- [An] G. W. Anderson, Logarithmic derivatives of Dirichlet L -functions and the periods of abelian varieties, *Comp. Math.* 45(1982), 315–332.
- [As] T. Asai, On a certain function analogous to $\log |\eta(z)|$, *Nagoya Math. J.* 40 (1970), 193–211.
- [Ba1] E. W. Barnes, The theory of the double gamma function, *Philos. Trans. Roy. Soc. (A)*, 196 (1901), 265–388.
- [Ba2] E. W. Barnes, On the theory of the multiple gamma function, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 19 (1904), 374–425.
- [Bl] D. Blasius, On the critical values of Hecke L -series, *Ann. of Math.* 124(1986), 23–63.
- [C] P. Colmez, Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, *Ann. of Math.* 138(1993), 625–683.
- [D] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, *Proc. Symposia Pure Math.* 33(1979), part 2, 313–346.
- [G] B. Gross, On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg (with an appendix by D. E. Rohrlich), *Inv. Math.* 45(1978), 193–211.
- [H] E. Hecke, *Mathematische Werke*, Zweite Auflage, Vandenhoeck, 1970.
- [JKS] U. Jannsen, S. Kleiman and J-P. Serre (eds.), *Motives*, *Proc. Symposia Pure Math.* 55(1994), Part 1 and 2.
- [SC] A. Selberg and S. Chowla, On Epstein's zeta-function, *Jour. für reine und angew. Math.* 227(1967), 86–110. (=Collected Papers of A. Selberg, No. 34)

- [Sh1] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Publ. Math. Soc. Japan 11, Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.
- [Sh2] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. 97(1973), 440–481.
- [Sh3] G. Shimura, On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables, Ann. of Math. 102(1975), 491–515.
- [Sh4] G. Shimura, On abelian varieties with complex multiplication, Proc. London Math. Soc. 3rd ser. 34(1977), 65–86.
- [Sh5] G. Shimura, On certain reciprocity-laws for theta functions and modular forms, Acta Math. 141(1978), 35–71.
- [Sh6] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. 45(1978), 637–679.
- [Sh7] G. Shimura, Automorphic forms and periods of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan 31(1979), 561–592.
- [Sh8] G. Shimura, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, Ann. of Math. 111(1980), 313–375.
- [Sh9] G. Shimura, Nearly holomorphic functions on hermitian symmetric spaces, Math. Ann. 278(1987), 1–28.
- [Sh10] G. Shimura, Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, Princeton Math. Ser., vol. 46, Princeton University Press, 1998.
- [Shi1] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23(1976), 393–417.
- [Shi2] T. Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24(1977), 167–199.
- [Shi3] T. Shintani, On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, in Algebraic Number Theory, Proc. International Symp., Kyoto, 1976, 201–212, Kinokuniya, 1977.
- [Shi4] T. Shintani, On certain ray class invariants of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan 30(1978), 139–167.
- [Shi5] 新谷卓郎, 代数体の L 函数の特殊値について, 数学 29 (1977), 204–216.
- [Si] C. L. Siegel, Lectures on advanced analytic number theory, Tata Institute, 1961.
- [St] H. M. Stark, L -functions at $s = 1$, I, II, III, IV, Advances in Math. 7(1971), 301–343; 17(1975), 60–92; 22(1976), 64–84; 35(1980), 197–235.

- [T] J. Tate, Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$ (Notes by D. Bernardi et N. Schappacher), Progress in Math. 47, Birkhäuser, 1984.
- [W] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 88, Springer Verlag, 1976.
- [WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of Modern Analysis, fourth edition, Cambridge University Press, 1927.
- [Y1] H. Yoshida, On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms, Duke Math. J. 75(1994), 121–191.
- [Y2] H. Yoshida, On a conjecture of Shimura concerning periods of Hilbert modular forms, Amer. J. Math. 117(1995), 1019–1038.
- [Y3] 吉田敬之, On absolute CM-periods, 数理解析研究所講究録 965(1996), 88–133.
- [Y4] H. Yoshida, On absolute CM-periods, Sympos. Pure Math. (Shimura honorary volume), to appear.
- [Y5] H. Yoshida, On absolute CM-periods II, Amer. J. Math. 120(1998), 1199–1236.