数理解析研究所講究録
1097巻 1999年 161-165

数論幾何における STIEFEL-WHITNEY 類

斎藤 毅 (東大 数理)

トポロジーにおいて、ベクトル束の特性類は重要な役割を果たしているが、数論幾何でも、同じように ℓ進層の特性類を考えることができる。ここでは Stiefel-Whitney 類とよばれる特性類について考える。

0. 特性類とは.

位相空間 S上の複素ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その Chern 類 $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(S, \mathbb{Z})$ が定義される。同様に、実ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、その Stiefel-Whitney 類 $sw_i(\mathcal{E}) \in H^i(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が定義される。実ベクトル束とは、複素ベクトル束に実構造が与えられたものと考え、さらに実構造とは非退化対称双一次形式のことと解釈すると、非退化対称双一次形式をもつベクトル束 $(\mathcal{E}, q)$ に対し、その Stiefel-Whitney 類が定義される。

0.1 直交 Galois 表現の Stiefel-Whitney 類.

位相空間をスキームで、ベクトル束を smoothℓ進層で、コホモロジーをエタール・コホモロジーで置き換えると、次のようになる。$\mathcal{F}$をスキーム S上の smoothℓ進層で、非退化対称双一次形式をもつものとすると、その Stiefel-Whitney 類

$$sw_i(\mathcal{F}) \in H^i(S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

が定義される。ただし S上 2 と素数 ℓは可逆と仮定する。

以下簡単のため Sは体 $K \ni \frac{1}{2\ell}$ のスペクトル Spec K とする。G_Kを Kの絶対 Galois 群 $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ とする。このとき Spec K上の smoothℓ進層で非退化対称双一次形式をもつものとは、連続 ℓ進直交表現 $G_K \to O(V, b)$ のことである. ここで b は有限次元 ℓ進線型空間 V上の非退化対称双一次形式で $O(V, b) = \{g \in GL(V) | b(gx, gy) = b(x, y)\}$ はその直交群である。エタール・コホモロジーは Galois コホモロジー $H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^i(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ である.

ℓ進直交表現$\rho : G_K \to O(V, b)$ に対し、Stiefel-Whitney 類 $sw_i(V) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ $(i = 1, 2)$ は次のように定義される。

定義 1. G_Kの指標 $\det \rho : G_K \to \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が定める $Hom(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^1(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元を Vの第 *1Stiefel-Whitney* 類とよび,

$$sw_1(V) \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

と書く。

第 2Stiefel-Whitney 類は, Cliford 環からえられる代数群の中心拡大

$$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \tilde{O}(V, b) \to O(V, b) \to 1$$

を使って次のように定義される. 必要なら Vの係数体を有限次拡大することによりρの像は$\tilde{O}(V, b)$ の有理点の像に含まれると仮定してよい。するとこの中心拡大をρでひきもどすことによって G_Kの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による中心拡大がえられる。

定義 2. この中心拡大の類が定める $H^2(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元を Vの第 2*Stiefel-Whitney* 類とよび,

$$sw_2(V) \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

と書く。

0.2 エタール・コホモロジーの **Stiefel-Whitney** 類.

代数幾何から次のようにして、Galois 群 G_Kの直交表現が生じる。Xを K上定義された proper smooth な偶数 n 次元の scheme とする。このとき cup 積は中間次元のコホモロジーに非退化対称双一次形式

$$\cup : H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \times H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell(-n)$$

を定める。ここで $\mathbb{Q}_\ell(-n)$ は円分指標 $G_K \to \mathbb{Z}_\ell^\times$ の$-n$ 乗が定める 1 次元表現を表わす。これは $V = H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{n}{2})$ 上の非退化対称双一次形式をひきおこす。これは Galois 群 G_Kの作用と両立するから $G_K \to O(V)$ が定まる。$V = H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{n}{2})$ の Stiefel-Whitney 類

$$sw_1(H_\ell^n(X/K)), \quad sw_2(H_\ell^n(X/K))$$

を調べよというのが基本的な問題である。

Kが有限体のときは $H^1(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり, $sw_1(H_\ell^n(X/K))$ は Frobenius Fr_Kの $H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{n}{2})$ への作用の固有値-1 の重複度の偶奇で定まる。したがって Tate 予想を仮定すれば、これは $X_{\bar{K}}$の代数的サイクルのうち、Kの 2 次拡大上定義されるが K上定義されない部分の階数の偶奇と一致する。

Kが$\mathbb{C}$ でない局所体のときは $H^2(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり。このとき第 2Stiefel-Whitney 類 $sw_2(H_\ell^n(X/K))$ は Hasse-Weil$L$ 関数の関数等式の定数項の積公式に現れる局所ε因子の符号と関係している。[D],[S4]

0.3 de Rham コホモロジーと **Hasse-Witt** 類.

Stiefel-Whitney 類を調べるには de Rham コホモロジーの対応する特性類と比較するのがよいと考えられる。

一般に (D, b) を (標数が 2 でない) 体 K上の有限次元線型空間 D上の非退化対称双一次形式 b とすると、その不変量 $hw_i(D) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が次のように定義される。Kummer 理論により同型 $K^\times/K^{\times 2} \to H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が定義される。この同型による $a \in K^\times$ の像を $\{a\} \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ で表わす。また cup 積を $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ で表わす。Dの直交基底 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ をとり、$a_i = b(x_i, x_i) \in K^\times$とおく。すると $d = \sum_i \{a_i\} \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は直交基底のとり方によらず Dの不変量を定める。これを D の判別式とよび $hw_1(D) \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とかく。また$\sum_{i<j}\{a_i, a_j\} \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ も直交基底のとり方によらず Dの不変量を定める。これを Dの Hasse-Witt 不変量とよび $hw_2(D) \in H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とかく。その不変量 $hw_i(D) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が次のように定義される。

Xを K上定義された proper smooth な偶数 n 次元の scheme とする。このとき cup 積は中間次元のコホモロジーに非退化対称双一次形式

$$\cup : H_{dR}^n(X/K) \times H_{dR}^n(X/K) \to K$$

を定める。したがってその不変量 $hw_i(H_{dR}^n(X/K), \cup) \in H^i(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ が定義される。

1. 第1Stiefel-Whitney 類と判別式.

1.1 定理. 第1Stiefel-Whitney 類は次のように決定される。

定理 1. *[S3 定理 2]* Xを標数が *2* でない体 K上の射影的な *smooth* 偶数 n 次元の *scheme* とする. $b_q = \dim_K H^q_{dR}(X/K)$,

$$r_0 = \begin{cases} -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_{n-2} & n \equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき}, \\ -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_n & n \equiv 2 \bmod 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく. ℓを Kの標数とは異なる素数とすると

$$sw_1(H^n_\ell(X/K)) = hw_1(H^n_{dR}(X/K)) + r_0\{-1\}$$

がなりたつ。

証明の方針は次のとおりである。特殊化と Chebotarev 密度定理により Kが有限体の場合に帰着する。Lefschetz ペンシルをとってε因子の積公式と vanishing cycle の Picard-Lefschetz 公式を適用することにより、2 次超曲面の場合に帰着させて証明する。

この定理の応用として, Ogus による cristalline 判別式についての予想 ([Ogus] 予想 3.11) が基礎体 Kが $\mathbb{F}_{p^2}$を含まないという仮定のもとで証明できる.

1.2 偶数次元の Bloch の導手公式mod2.

定理 1 には Bloch の導手公式への次のような応用がある。Bloch の導手公式について簡単に復習する。Kを局所体とし、Xを K上の proper smooth な n 次元の多様体とする. X_Oを整数環 O_K上の正則なモデルとする。このとき Artin 導手を次の式で定義する

$$\mathrm{Art}(X_O/O_K) = \chi(X_{\bar K}) - \chi(X_{\bar F}) + \mathrm{Sw}H^*(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell).$$

ここで$\chi(X_{\bar K}), \chi(X_{\bar F})$ はそれぞれ生成ファイバーと閉ファイバーの ℓ進 Euler 数であり、$SwH^*(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$ は G_Kの ℓ進表現 $H^q(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$ の Swan 導手の交代和である。この交代和が素数 $\ell \neq \mathrm{char}F$のとりかたによらないことは alteration を使って落合君によって示されている [Ochi] 。

Bloch は微分の層$\Omega^1_{X_O/O_K}$ の局所化された chern 類を使って標準類 $(\Delta_{X_O}, \Delta_{X_O}) = (-1)^{n+1}c_{n+1}(\Omega^1_{X_O/O_K})$ を閉ファイバー X_Fに台を持つ 0 サイクルとして定義した。そして次の予想を定式化した。

予想 (Bloch の導手公式). *[B]*

$$Art(X_O/O_K) = -deg(\Delta_{X_O}, \Delta_{X_O}).$$

これは Xが Kの有限次拡大のときは古典的な導手と共役差積の公式である。Bloch は Xが代数曲線のときにこれを証明した [B]. Xが楕円曲線のときはこれは Tate-Ogg の導手と判別式の関係式を導く [Ogg],[S1] 。

Xが一般次元のときは導手公式は証明されていないが、偶数次元のときには定理 1 を使うと次が示せる。

定理 **2.** *[S6] X*を標数が *2* でない局所体 *K*上の射影的で *smooth* な偶数 *n* 次元の多様体とし, X_Oをその正則モデルで, 閉ファイバー X_Fの被約化が正規交叉因子をもつものとする. このとき

$$Art(X_O/O_K) \equiv -deg(\Delta_{X_O}, \Delta_{X_O}) \mod 2$$

がなりたつ.

証明の方針は次のとおりである。直交表現の Artin 導手についての Serre の定理 [Se1] と, vanishing cycle の計算により, 左辺 $\mathrm{Art}(X_O/O_K)$ は行列式指標の Artin 導手 $\mathrm{Art}(H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ とmod2 で等しい。一方右辺は [S2] の結果により de Rham コホモロジー $H^n_{dR}(X/K)$ の判別式の付値とmod2 で等しい。定理 1 により行列式指標 $H^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ と de Rham コホモロジー $H^n_{dR}(X/K)$ の判別式の関係がわかっているのでこれから定理 2 が従う。

2. 第 **2Stiefel-Whitney** 類と **Hasse-Witt** 不変量.

2.1 記号. 予想を述べるために記号をいくつも導入する. *X*を標数が 2 でない体 *K*上の smooth な偶数 *n* 次元の射影的 scheme とする. 1 と同様に $b_q = \dim_K H^q_{dR}(X/K)$,

$$r_0 = \begin{cases} -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_{n-2} & n \equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき}, \\ -b_0 + b_2 - b_4 + \cdots + b_n & n \equiv 2 \bmod 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく. 各偶数 *q*に対し $e_q = sw_1(H^q_\ell(X/K)) \in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を第 1Stiefel-Whitney 類とし

$$d = hw_1(H^n_{dR}(X/K)),$$
$$e = \begin{cases} e_0 + e_2 + e_4 + \cdots + e_{n-2} & \text{if } n \equiv 0 \bmod 4 \\ e_0 + e_2 + e_4 + \cdots + e_{n-2} + e_n & \text{if } n \equiv 2 \bmod 4. \end{cases}$$

$\in H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とおく. $H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元 c_ℓ を *K*の標数が正または $\ell = 2$ なら 0 とし, *K*の標数が 0 で $\ell \neq 2$ なら $H^2(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = {}_2\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$ の 2 と ℓだけで分岐するただ 1 つの元の像として定義する. 最後に

$$h = \sum_{q<\frac{n}{2}, q \not\equiv \frac{n}{2} \bmod 2} \dim_K H^q(X, \Omega^{n-q}_{X/K})$$

とおく.

2.2 予想. このとき次が予想される.

予想. *X*を標数が *2* でない体 *K*上の射影的で *smooth* な偶数 *n* 次元の *scheme* とする. ℓを *K*の標数と異なる素数とすると

$$sw_2(H^n_\ell(X/K)) - hw_2(H^n_{dR}(X/K))$$
$$\stackrel{?}{=} \{2, d\} + h \cdot c_\ell + \{e, -1\} + \begin{cases} 0 & r \equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき} \\ \{-d, -1\} & r \equiv 1 \bmod 4 \text{ のとき} \\ \{-1, -1\} & r \equiv 2 \bmod 4 \text{ のとき} \\ \{d, -1\} & r \equiv 3 \bmod 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

がなりたつだろう.

$n = 0$ のときは, これは

定理 [Se2] **Theorem 1.** L を Kの有限次拡大とすると,

$$sw_2(Ind_{G_L}^{G_K}\mathbb{Q}) = hw_2(L, Tr_{L/K}x^2) + \{2, d\}.$$

そのものである.

2.3 予想が示せる場合. 予想が示される場合を挙げておく [S5]. $K \supset \bar{\mathbb{Q}}$ ならば $sw_2(H_\ell^n(X/K)) = hw_2(H_{dR}^n(X/K))$ で恒に正しい。これは $K \supset \mathbb{C}$ の場合に帰着し,超越的な議論によって示せる.

$K = \mathbb{R}$ の場合も Hodge 構造の偏極を使って示される.

Kが $\mathbb{Q}_p$の有限次拡大体で Xが整数環 O_K上 good reduction をもつとする. $p \neq 2, \ell$ なら, $sw_2(H_\ell^n(X/K)) = hw_2(H_{dR}^n(X/K)) = 0$ で正しい. したがって Xが Kの奇数次拡大上 good reduction をもつときもそうである。$\ell = p \neq 2$ のときも. $p-1 > n$ で p が Kの素元なら $sw_2(H_\ell^n(X/K)) = hw_2(H_{dR}^n(X/K)) + h \cdot c_\ell$ で正しいことが p 進 Hodge 理論を使って示せる [S4].

Kが代数体のときは Hasse 原理より局所体の場合に帰着される.

Xが smooth 超曲面のときには、上の結果から大域的な議論によって、予想の式の両辺の差が, $\{2, d\}$ かまたは 0 であることが示される.

References

[B] S.Bloch, *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves*, Proc. Symp. Pure Math. **46 Part 2** (1987), AMS, 421-450.

[D] P.Deligne, *Les constantes locales de l'équation fonctionelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale.*, Invent. Math. **35** (1976), 299-316.

[EKV] H.Esnault, B.Kahn and E.Viehweg, *Coverings with odd ramification and Stiefel-Whitney classes*, J. fur Reine und Angew. **441** (1993), 145-188.

[Ochi] T.Ochiai, *ℓ-independence of the trace of monodromy*, 東大 修士論文.

[Ogg] A.Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. J. of Math. **89** (1967), 1-21.

[Ogus] A.Ogus, *Hodge cycles and crystalline cohomology*, in Spr. LNM, vol. 900, Springer, 1982, pp. 357-414.

[S1] T.Saito, *Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces*, Duke Math. J. **57** (1988), 151-173.

[S2] ———, *Self-intersection 0-cycles and coherent sheaves on arithmetic schemes*, Duke Math. J. **57** (1988), 555-578.

[S3] ———, *Jacobi sum Hecke characters, de Rham discriminant, and the determinant of ℓ-adic cohomologies*, J. of Alg. Geom. **3** (1994), 411-434.

[S3'] ———, *Determinant representation, Jacobi sum and de Rham discriminant*, 数理研講究録 **844** (1993), 79-83.

[S4] ———, *The sign of the functional equation of the L-function of an orthogonal motive*, Invent. Math. **120** (1995), 119-142.

[S4'] ———, *Hasse-Weil L* 関数の関数等式の符号, 数理研講究録 **925** (1995), 159-165.

[S5] ———, *Note on Stiefel-Whitney class of ℓ-adic cohomology (preprint).*

[S6] ———, *Parity in Bloch's conductor formula in even dimension (preprint).*

[Se1] J.-P.Serre, *Conducteurs d'Artin des caracteres réels*, Inventiones Math. **14** (1971), 173-183.

[Se2] ———, *L'invariant de Witt de la forme Tr(x^2)*, Comm. Math. Helv. **59** (1984), 651-676.