数理解析研究所講究録
1112巻 1999年 44-50

Gamma-starlike 関数について

布川 護（群馬大学）

Lewandowski, Miller と Złotkiewicz [2] は以下の性質を満たす関数を gamma-starlike 関数と定義した. すなわち $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ は単位円内 $E=\{z:|z|<1\}$ で正則で $f(z)$, $f'(z)$ および $(1+zf''(z)/f'(z))$ は $0<|z|<1$ で 0とならないと仮定し γ を実数とするとき $z\in E$ ならば

(1) $$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right]>0$$

である. ただし巾乗は主値をとるものとする.

上の条件を満たす関数の集合を $\mathcal{L}_\gamma$ で表すことにする.

(1) で $\gamma=0$ のとき $f(z)$ を 星型関数であるという. このとき $f(z)$ は Eを原点に関して星型である領域に写像する. $\gamma=1$ のときは $f(z)$ を凸型関数という. $f(z)$ が凸型関数ならば $f(z)$ は Eを凸型領域に写像することはよく知られている.

ところで $f(z)=z+\sum_{m=2}^{\infty}a_n z^n$ は Eで正則で $0<\alpha\leq 1$ ならば単位円内Eで

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|<\frac{\pi}{2}\alpha$$

が成立するとき $f(z)$ は位数が α の s t r o n g l y s t a r l i k e 関数と定義する. 位数が α の s t r o n g l y s t a r l i k e 関数は 明らかに星型関数である.

つぎに $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ は Eで正則で $0<\alpha\leq 1$ ならば 単位円内Eで

$$\left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right|<\frac{\pi}{2}\alpha$$

が成立するとき $f(z)$ は位数が α のs t r o n g l y c o n v e x 関数であると定義する.

$f(z)$ が位数 α の s t r o n g l y c o n v e x 関数であれば これも明らかに $f(z)$ は 凸型関数である.

L e w a n d o w s k i, M i l l e r とZ ł o t k i e w i c z は ［2, 定理 1］ で次の定理を得た.

定理 A. γ を任意の実数とするとき $f(z)\in\mathcal{L}_\gamma$ ならば $f(z)$ は星型関数である.

また C h i a n g ［1, 定理 1］ は次の定理を得た.

定理 B. $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ は Eで正則で $z\in E$ ならば

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right|\leq\frac{\pi}{2}\left(\beta(1+\gamma)-\gamma\right)$$

とする. ただし $\frac{\gamma}{1+\gamma}<\beta<1$ である.

このとき $f(z)$ は位数 β の s t r o n g l y s t a r l i k e 関数である.

ところで 定理 A は次の様に精密化され，定理 B も改良される．

定理 1．$f(z) \in \mathcal{L}_\gamma$ ，$0 < \gamma$ ならば $f(z)$ は 位数 β_0 の strongly starlike 関数である． ただし β_0 は下の方程式の最小正数解である．

$$\beta + \frac{2\gamma}{\pi} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{\beta q(\beta) \sin \frac{\pi}{2}(1-\beta)}{p(\beta) + \beta q(\beta) \cos \frac{\pi}{2}(1-\beta)} = 1,$$

ここで $p(\beta) = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{2}}$ で $q(\beta) = (1-\beta)^{\frac{\beta-1}{2}}$ である．

証明． 仮定より $z \in E$ ならば

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Re}\left[\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right] > 0 .$$

つぎに

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \qquad \text{とおくと}$$

$p(z)$ は Eで正則で $p(0) = 1$ である．

ところで，もしも単位円内にある点 z_0 が存在して $|z| < |z_0|$ ならば

$$|\arg p(z)| < \frac{\pi}{2}\beta_0$$

また

$$|\arg p(z_0)| = \frac{\pi}{2}\beta_0$$ であると，定すると

布川 ［3，Lemma］ より

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = i\beta_0 k$$ とかける.

ただし

$$k \geq 1 \qquad \arg p(z_0) = \frac{\pi}{2}\beta_0$$ のとき

$$k \leq -1 \qquad \arg p(z_0) = -\frac{\pi}{2}\beta_0$$ のとき.

簡単な計算により

$$\arg\left[\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right)^{1-\gamma} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right)^{\gamma} \right]$$

$$= \arg p(z_0) + \gamma \arg \left(1 + \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)^2} \right).$$

まず最初に $\arg p(z_0) = \frac{\pi}{2}\beta_0$ であると仮定すると 布川 ［3，p．236］ より

$$\arg \left(1 + \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)^2} \right)$$

$$\geq \mathrm{Tan}^{-1} \frac{\beta_0 q(\beta_0) \sin \frac{\pi}{2}(1-\beta_0)}{p(\beta_0) + \beta_0 q(\beta_0) \cos \frac{\pi}{2}(1-\beta_0)}$$

を得るから

$$\arg\left[\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^{1-\gamma}\left(1+\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^{\gamma}\right]$$

$$\geq \frac{\pi}{2}\left(\beta_0+\frac{2\gamma}{\pi}\operatorname{Tan}^{-1}\frac{\beta_0 q(\beta_0)\sin\frac{\pi}{2}(1-\beta_0)}{p(\beta_0)+\beta_0 q(\beta_0)\cos\frac{\pi}{2}(1-\beta_0)}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

これは仮定（2）に反するから矛盾である．次に $\arg p(z_0)=-\frac{\pi}{2}\beta_0$ であると仮定しても

同様にして

$$\arg\left[\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^{1-\gamma}\left(1+\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^{\gamma}\right]$$

$$\leq -\frac{\pi}{2}$$

となつて仮定に反する．よつて $z\in E$ ならば

$$\left|\arg\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}\beta_0$$

が証明された．

定理　1の証明と全く同じ方法で次の定理を得る．

定理　1′．$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ は　Eで正則で　$z\in E$ならば

$$\left|\arg\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right| < \frac{\pi}{2}\alpha(\beta)$$

とする．ただし　$0<\gamma$，$0<\beta<1$　で

$$\alpha(\beta)=\beta+\frac{2\gamma}{\pi}\operatorname{Tan}^{-1}\frac{\beta q(\beta)\sin\frac{\pi}{2}(1-\beta)}{p(\beta)+\beta q(\beta)\cos\frac{\pi}{2}(1-\beta)}.$$

このとき $f(z)$ は位数 β の strongly starlike 関数となる.

注意. $0<\gamma$ であるとき 定理 B においては

$$\beta(1+\gamma)-\gamma=\beta-\gamma(1-\beta)<\beta$$

であり 定理 1′ においては

$$\beta<\beta+\frac{2\gamma}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{\beta q(\beta)\sin\frac{\pi}{2}(1-\beta)}{p(\beta)+\beta q(\beta)\cos\frac{\pi}{2}(1-\beta)}$$

であるから 定理 1 は 定理 B を精密化している.

定理 2. $f(z)\in\mathcal{L}_\gamma$, $1\leq\gamma$ ならば $f(z)$ は凸型関数であり かつ位数が

$\left(\beta_0+\frac{1}{\gamma}(1-\beta_0)\right)\leq 1$ のstrongly convex 関数である.

証明.

(3) $$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}=q(z)$$ とおくと

仮定より $q(z)$ は Carathéodory 関数である. すなわち $z\in E$ならば

$$|\arg q(z)|<\frac{\pi}{2}$$ である.

また 定理 1より $z\in E$ ならば

(4) $$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right|<\frac{\pi}{2}\beta_0$$

ただし　β_0　は　定理　1で得られた値である（　$0 < \beta_0 < 1$　）.

また　(3)　と　(4)　より

$$\left| \arg \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) \right| = \left| \arg g(z)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right|$$

$$< \frac{\pi}{2}\frac{1}{\gamma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\pi}{2} \beta_0$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\beta_0 + \frac{1}{\gamma} (1 - \beta_0) \right) \leq \frac{\pi}{2} .$$

よつて　定理　2　が証明された.

参　考　文　献

[1]　Y.M. Chiang, On a subclass of strongly gamma-starlike functions and quasiconformal extensions, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska, Sect.A. 45(1991), 21-27.

[2]　Z. Lewandowski, S. Miller and E. Złotkiewicz, Gamma-starlike functions, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska, Sect. A. 28(1974), 53-58.

[3]　M. Nunokawa, On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions, Proc. Japan Acad. 69. Sect. A. (1993), 234-237.

（　ぬのかわ　まもる・　群馬大学教育学部　）