数理解析研究所講究録
1113 巻 1999 年 35-43

Minimal annulus のモデュライ空間の全実構造について

東京都立大学大学院　守屋克洋 (Katsuhiro MORIYA)

1 Introduction

筆者が行った、極小曲面のモデュライ空間の研究 ([4]) について解説する. 部分多様体のモデュライ空間の研究において, 筆者は,

- モデュライ空間になるような, 適当な部分多様体の集合を見い出すこと.
- モデュライ空間の幾何構造が反映するような, 個々の極小曲面の性質を見い出すこと.

を問題としている. 今回, 筆者は, 次の性質をもつ, $\mathbb{C}-\{0\}$ から $\mathbb{R}^3$ または $\mathbb{R}^3/T(v)$ への, 完備な分岐する共形極小はめ込みのモデュライ空間を研究した. その性質とは,

- 二つのエンドでの回転数が 0 以上 2 以下になる.
- ガウス写像と S^2 の北極点からの立体写影の合成写像が z になる.

である. 但し, 分岐する共形極小はめ込みが完備であるとは, $\mathbb{C}-\{0\}$ に誘導される, 退化する計量に関して, $\mathbb{C}-\{0\}$ 上の任意の発散曲線の長さが無限大になることである (cf. [5]). $T(v)$ は, $v\in\mathbb{R}^3$ で表される一つの平行移動で生成される, 離散的な等長変換群である. 以降では, 上記のように, 種数 0, エンドが 2 個の分岐する完備共形極小はめ込みを, minimal annuli と呼ぶことにする. このモデュライ空間には helicoid が含まれている.

筆者は, 上記の極小曲面に対応する Weierstrass data のモデュライ空間 $\mathcal{W}(v)$ を研究することによって, 次の結果を得た.

定理 1.1. モデュライ空間 $\mathcal{W}(v)$ は, 滑らかな 6 次元 Hermite 多様体 $(\mathcal{W}, g_0, J)$ の 3 次元連結全実部分多様体になる.

以下で, 上の定理の証明とその周辺について述べる.

2 Weierstrass data

この節では, 上記の定理の中に現れた $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}(v)$ を明らかにする. 詳しくは, [1], [6]

まず, 第 1 節で提示した minimal annulus について, 説明を加える. 等長変換群 $T(v)$ は, 以下で定義される:

$$T(v) := \{t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid t(x) = x + nv \text{ for some } n \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.1}$$

$\mathbb{R}^3/T((0,0,0))$ は, $\mathbb{R}^3$ とみなす.

Riemann 面から $\mathbb{R}^3/T(v)$ への分岐する完備な共形極小はめ込みにおいては, 分岐しない場合と同様に, 全曲率が有限であることと, Riemann 面が punctured Riemmann surface, すなわち, 閉 Riemann 面から有限個の点 (puncture point) を除いたものと正則同型となり, Weierstrass data がこの閉 Riemann 面上有理型に拡張されることとが, 同値である ([3]). 上の場合, 閉 Riemann 面が $\mathbb{C}P^1 (= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ であり, puncture point が $\{0, \infty\}$ である. また, Weierstrass data は, 次で得られる $\mathbb{C}P^1$ 上の有理型関数 g と有理型一次微分形式 η の組である:

$$(g, \eta) = \left(\frac{\Psi_3}{\Psi_1 - \sqrt{-1}\Psi_2}, \Psi_3\right). \tag{2.2}$$

ただし, $\Psi_i := (\partial X_i/\partial z)\, dz$, $i = 1, 2, 3$ である.

ここで, 共形写像 $\nu \colon \mathbb{C} \to S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1\}$ を

$$\nu(z) = \left(\frac{2x}{1+|z|^2}, \frac{2y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), \ z = x + \sqrt{-1}y, \tag{2.3}$$

で定義する. これは, 立体射影であり, これを通じて S^2 を $\mathbb{C}P^1$ とみなす. すると, Weierstrass data のうち, 有理型関数 g は, X のガウス写像, すなわち, $\mathbb{C}P^1$ から S^2 への写像で, $\mathbb{C} - \{0\}$ 上の点 p にたいして, $X(\mathbb{C} - \{0\})$ の $X(p)$ における単位法ベクトルを対応させる写像と, S^2 の北極点からの立体写影の合成写像となる. 従って, 仮定から $g = z$ である.

Ψ により (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) を表し, $\mathbb{C}P^1$ 上の因子 (Ψ) を次で定義する.

$$(\Psi) := \sum_{p \in \mathbb{C}P^1} \left(\min_{i=1,2,3} \operatorname{ord}_p \Psi_i\right) \cdot p. \tag{2.4}$$

(Ψ) の重複度が正である点が branch point であり, 負である点が, puncture point である. 従って, (Ψ) は次のようになる:

$$(\Psi) = \sum_{j=1}^{l} B_j \cdot b_j - P_0 \cdot 0 - P_\infty \cdot \infty, \quad B_j, P_0, P_\infty > 0. \tag{2.5}$$

puncture point の近傍の X による像をエンドとよび, puncture point における (Ψ) の重複度から 1 を引いたものを, puncture point における回転数とよぶ. 従って, 仮定から $1 \le P_0 \le 3$, $1 \le P_\infty \le 3$ である.

Ψ と Weierstrass data(g, η) の間には, 因子について, 次のような関係が成り立つ:

$$(\Psi) = -(g)_0 - (g)_\infty + (\eta). \tag{2.6}$$

ここで, $(g)_0$, $(g)_\infty$ は, それぞれ g の零因子, 極因子である. よって(2.5) はさらに,

$$(\eta) = \sum_{j=1}^{k} B_j \cdot b_j - (P_0 - 1)\cdot 0 - (P_\infty - 1)\cdot \infty \tag{2.7}$$

となる. 従って, η は, 0 と ∞ において高々2 位の極を持つ, $\mathbb{C}P^1$ 上の有理型一次微分形式となる. 我々は, $\mathcal{W}$ によって, そのような有理型一次微分形式の集合を表す:

$$\mathcal{W} := \left\{ \left(\frac{c_0 z^2 + (c_1/\sqrt{2})z + c_2}{z^2} dz \right) \,\middle|\, |c_0| + |c_1| + |c_2| \neq 0 \right\} \tag{2.8}$$

η は, さらに次の条件を満たす:

$$\begin{aligned} -\pi \operatorname{Im} \operatorname{Res}\left(\left(1/z - z\right)\eta; 0\right) &= v_1, \\ -\pi \operatorname{Re} \operatorname{Res}\left(\left(1/z + z\right)\eta; 0\right) &= v_2, \\ -2\pi \operatorname{Im} \operatorname{Res}(\eta; 0) &= v_3. \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで, $\operatorname{Res}(\eta; 0)$ で, η の 0 における留数を表している. 我々は, $\mathcal{W}(v)$ によって, $\mathcal{W}$ の元で, (2.9) を満たすものの集合を表す:

$$\mathcal{W}(v) := \{\eta \in \mathcal{W} \mid \eta \text{ satisfies (2.9)}\}. \tag{2.10}$$

$\mathcal{W}(v)$ の元 η から, 第 1 節で提示した minimal annulus $X\colon \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{R}^3/T(v)$ が, 次の様にして構成される:

$$X(z) = \operatorname{Re} \int^z \left(\frac{1}{z} - g, \sqrt{-1}\left(\frac{1}{z} + z\right), 2 \right) \frac{\eta}{2}. \tag{2.11}$$

$\mathbb{R}^3$ 内の平行移動で移り合うものを同一視する同値関係を考えると, 第 1 節て提示した minimal annulus の空間の, この同値関係による同値類が, $\mathcal{W}(v)$ と全単射的な関係になることが, 上の構成から分かる.

注意 *2.1.* $\mathbb{C}P^1$ 上の有理系一次微分形式の因子の度数は, -2 であるから, (2.7) より, $\mathcal{W}(v)$ と対応する minimal annulus の分岐点の個数は, 重複度を込めて, 高々2個である.

注意 *2.2.* ガウス写像 g の度数が1であるから $\mathcal{W}(v)$ と対応する minimal annulus の全曲率は, -4π である.

3 moduli spaceの幾何

この節では, 定理 1.1 を証明する.

まず, 定義から $\mathcal{W}$ を $\mathbb{R}^6 - \{0\}$ とみなせる. 我々は, $u_1 := \mathrm{Re}\, c_0$, $u_2 := \mathrm{Im}\, c_0$, $u_3 := \mathrm{Re}\, c_1$, $u_4 := \mathrm{Im}\, c_1$, $u_5 := \mathrm{Re}\, c_2$, $u_6 := \mathrm{Im}\, c_2$ と書き, $(u_1, \dots, u_6)$ を $\mathbb{R}^6$ の座標系として用いる. このとき次が成り立つ.

定理 3.1. $\mathcal{W}(v)$ は, $\mathcal{W}$ 内の, 次で定義される滑らかな3次元連結部分多様体になる:

$$\mathcal{W}(v) := \{(u_1, u_2, u_3, -\sqrt{2}v_3, -u_1 - 2v_2, u_2 + 2v_1) \in \mathcal{W}\}. \tag{3.1}$$

証明. (2.9) の左辺を実際に計算して, $(u_1, \dots, u_6)$ を用いて書くと,

$$-\frac{1}{2}(u_2 - u_6) = v_1,\ -\frac{1}{2}(u_1 + u_5) = v_2,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}u_4 = v_3, \tag{3.2}$$

となる. これより明らか. □

注意 *3.2.* 以下, $\mathcal{W}(v)$, $v \neq (0,0,0)$ の元のうち, 唯一embedded な minimal annulus である helicoid と対応する元が特別な点になるように, $\mathcal{W}$ 上に計量を定義し, これを利用して, $\mathcal{W}(v)$ が $\mathcal{W}$ の全実部分多様体になることを示す. minimal annulus のモデュライ空間にはいると思われる, 自然な位相から誘導される計量と, 上の計量との関連は, ここでは考慮しない.

$\mathcal{W}$ 上の Riemann 計量 g_0 を次のように決める:

$$g_0 := \frac{1}{u}\sum_{i=1}^{6} du_i{}^2. \tag{3.3}$$

ここで, $u = \sqrt{\sum_{i=1}^{6} u_i{}^2}$ である. $(\mathcal{W}, g_0)$ のスカラー曲率を計算すると, 次のようになる.

補題 3.3. $(\mathcal{W}, g_0)$ のスカラー曲率は20である.

$\mathcal{W}(v)$ には, $(\mathcal{W}, g_0)$ から計量 g_1 が誘導されているとする. このとき, 次が成り立つ.

補題 3.4. $(\mathcal{W}((v_1, v_2, v_3)), g_1)$ のスカラー曲率 σ は,

$$\sigma = 2\left(1 + 10\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{U^2}\right). \tag{3.4}$$

である. ここで,

$$U = \sqrt{2u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2 + 2v_3^2 + 4u_1v_2 + 4v_2^2 + 4u_2v_1 + 4v_1^2}, \tag{3.5}$$

である.

命題 3.5. $(\mathcal{W}((0,0,v_3)), g_1)$, $v_3 \neq 0$ 内において helicoid と対応する点と, スカラー曲率の最大値を与える点が一致する.

注意 *3.6.* helicoid と対応する元は, 各 $\mathcal{W}((0,0,v_3))$, $v_3 \neq 0$ に, ただひとつ存在する.

証明. $(0,0,0,-\sqrt{2}v_3,0,0) \in \mathcal{W}((0,0,v_3))$, $v_3 \neq 0$ が, helicoid に対応することは良く知られている. 従って, $(\mathcal{W}((0,0,v_3)), g_1)$, $v_3 \neq 0$ のスカラー曲率の最大値を与える点は, helicoid に対応する点である.

以下で, helicoid に対応する点が上記のもののみであることを示す. helicoid は, catenoid の conjugate surface である. catenoid は, $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているので, puncture point での回転数は, 1 である. 従って, helicoid の puncture point での回転数も 1 である. よって, (2.7) より, helicoid に対応する元は, $(0,0,u_3,u_4,0,0)$ でなければならない. 次に, 以下の補題が成立することを仮定する.

補題 3.7 ((ii) of Proposition 4.1 in [2]). $X\colon D^* \to \mathbb{R}^3/T(v)$, $v \neq 0$ を, punctured disk $D^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$ から $\mathbb{R}^3/T(v)$ への全曲率が有限な共形極小はめ込みとする. X のガウス写像 γ において, $\gamma(0)$ と v が直交していないとする. このとき,

1. ある実数 α, β があって,

$$X_3(z) = \alpha \ln R + \beta \arg(z) + \mathcal{O}(1), \tag{3.6}$$

となる. ここで, $\mathcal{O}(1)$ は, $z=0$ で連続な関数をあらわす. また, ある実数定数 c と 1 以上の整数 q があって,

$$R = \frac{1}{|z|^q}(c + \mathcal{O}(1)), \tag{3.7}$$

である.

2. 上で, $X(D^*)$ は, $\alpha = \beta = 0$ のとき planar end, $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ のとき catenoid type end, $\beta \neq 0$, $\alpha = 0$ のとき helicoidal type end, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ のとき helicoidal-catenoid type end である.

$\eta = (u_3 + \sqrt{-1}u_4)/(\sqrt{2}z)$ のとき, 正の実数 r と実数 s に対して,

$$X_3(r\cos s + \sqrt{-1}r\sin s) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\left(u_3 \ln r - u_4 s\right), \tag{3.8}$$

である. これから, helicoid の end が helicoidal type end であることから, helicoid に対応する元が, $(0,0,0,u_4,0,0)$ となることが分かる. 従って, $(\mathcal{W}((0,0,v_3)),g_1)$, $v_3 \neq 0$ の元で helicoid と対応するものは, $(0,0,0,-\sqrt{2}v_3,0,0)$ だけである. □

次の命題は ambient space $\mathcal{W}$ の幾何との関連についてである.

命題 3.8. $(\mathcal{W}(v),g_1)$ において, $(\mathcal{W}(v),g_1)$ が $(\mathcal{W},g_0)$ の全測地的部分多様体であることと, $v=(0,0,0)$ であることは同値である.

証明. $\mathcal{W}(v)$ の第二基本形式 A は次のようになる:

$$A = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\sqrt{2}v_j}{U}\theta^i \otimes \theta^i \otimes e_{j+3}, \tag{3.9}$$

ここで, $(\theta^1,\ldots,\theta^6)$ は,

$$\begin{aligned}\theta^1 &= \frac{du_1 - du_5}{\sqrt{2}u},\ \theta^2 = \frac{du_2 + du_6}{\sqrt{2}u},\ \theta^3 = \frac{du_3}{u},\\ \theta^4 &= \frac{du_2 - du_6}{\sqrt{2}u},\ \theta^5 = \frac{du_1 + du_5}{\sqrt{2}u},\ \theta^6 = \frac{du_4}{u}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

で定義される正規直交枠であり, $\theta^p|_{\mathcal{W}(v)} = 0$, $p = 4,5,6$ である. また, $(e_1,\ldots,e_6)$ は, $(\theta^1,\ldots,\theta^6)$ の双対枠である. 従って, $(\mathcal{W}(v),g_1)$ が $(\mathcal{W},g_0)$ の全測地的部分多様体であることと, $v=(0,0,0)$ であることは同値である. □

J を, 次で定義される $\mathcal{W}$ の各点 ξ で接平面 $T_\xi\mathcal{W}$ の endomorphism を与える $\mathcal{W}$ 上のテンソル場とする.

$$\begin{aligned}J\tilde{e}_1 &= \tilde{e}_5, & J\tilde{e}_2 &= \tilde{e}_4, & J\tilde{e}_3 &= \tilde{e}_6,\\ J\tilde{e}_4 &= -\tilde{e}_2, & J\tilde{e}_5 &= -\tilde{e}_1, & J\tilde{e}_6 &= -\tilde{e}_3.\end{aligned} \tag{3.11}$$

補題 3.9. テンソル場 J は, $(\mathcal{W}, g_0)$ 上の直交複素構造となる.

証明. $J(\partial/\partial u_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{6} J^\beta{}_\alpha(\partial/\partial u_\beta)$ と書く. このとき, J の 0 でない成分は, 全て次のような定数である:

$$J^5{}_1 = J^4{}_2 = J^6{}_3 = -J^1{}_5 = -J^2{}_4 = -J^3{}_6 = 1. \qquad (3.12)$$

また, このとき, $J^2 = -I$ が成り立つ. ここで, I は $T_\xi \mathcal{W}$ の恒等変換である. J の torsion テンソル場 N の成分 $N^\alpha{}_{\beta\gamma}$ は, 次のようになる:

$$N^\alpha{}_{\beta\gamma} = \sum_{\delta=1}^{6}(J^\delta{}_\alpha \partial_\delta J^\alpha{}_\gamma - J^\delta{}_\gamma \partial_\delta J^\alpha{}_\beta - J^\alpha{}_\delta \partial_\beta J^\delta{}_\gamma + J^\alpha{}_\delta \partial_\gamma J^\delta{}_\beta), \qquad (3.13)$$

ここで, ∂_δ は偏微分 $\partial/\partial u_\delta$ を表す. よって, $N \equiv 0$ である. 従って, $(\mathcal{W}, g_0)$ 上の直交複素構造となる. □

補題 3.10. $(\mathcal{W}, g_0, J)$ は, Kähler 多様体ではない.

証明. g_0 の基本 2 次微分形式 Φ_0 は, $\Phi_0 = \theta^1 \wedge \theta^5 + \theta^2 \wedge \theta^4 + \theta^3 \wedge \theta^6$ となる. よって,

$$d\Phi_0 = -2\sum_{\alpha=1}^{6}\left(\frac{u_\alpha du_\alpha}{u^2}\right) \wedge \Phi_0. \qquad (3.14)$$

従って, Φ_0 は閉形式では無い. □

Proof of Theorem 1.1. $\theta^p|_{\mathcal{W}(v)} = 0$, $p = 4, 5, 6$ であるから, $\Phi_0|_{\mathcal{W}(v)} = 0$ である. このことと定理 3.1 とから, モデュライ空間 $\mathcal{W}(v)$ は, 滑らかな 6 次元 Hermite 多様体 $(\mathcal{W}, g_0, J)$ の 3 次元連結全実部分多様体になる. □

次の補題は, $\mathcal{W}$ 上の計量 g_0 の一つの有効性を説明する.

命題 3.11. g' を, $\mathbb{R}^6$ の標準計量 g と共形的な $(\mathcal{W}, J)$ 上の Kähler metric とする. もし, $\mathcal{W}(v)$ が $(\mathcal{W}, g', J)$ の Lagrangian 部分多様体になるならば, ある正の定数 c があって, $g' = cg$ となる.

証明. ある正値関数 f に対して $g' = fg$ であるとする. このとき g' の基本 2 次微分形式 Φ' は, g の基本 2 次微分形式 Φ に対して, $\Phi' = f\Phi$ となる. Φ' と Φ はともに閉形式であるので, $df \wedge \Phi = 0$ が成り立つ. よって $df = 0$ であり, さらに f は, $\mathcal{W}$ 上定数である. ゆえに, ある正の定数 c があって, $g' = cg$ となる. □

注意 *3.12.* 計量 cg は, 計量 g_0 に比べて強い幾何構造を $\mathcal{W}(v)$ に与える. けれども, cg による曲率では, v によって変わるモデュライ空間 $\mathcal{W}(v)$ を, 区別しない. すなわち, $\mathcal{W}(v)$ は, どれも $(\mathbb{R}^6 - \{0\}, g)$ 内の 3 次元の平坦な全測地的部分多様体にすぎない. したがって, helicoid はモデュライ空間の曲率によっては特徴付けられない. これらのことから, cg は, 個々の minimal annulus の性質の, モデュライ空間の幾何的性質への反映を調べるためには適さない計量といえる.

4 分岐しない minimal annulus

この節では, 分岐しない minimal annulus のあるモデュライ空間について議論する. これにより, 前節において $\mathcal{W}$ に定義した計量 g_0 の起源がわかる. g_0 は, 分岐していない minimal annulus のモデュライ空間において, helicoid を特徴づける計量の, $\mathcal{W}$ 上の計量への自然な拡張である.

以下では, 第 1 節で提示した minimal annulus のうち, 2 つの puncture point における回転数が, ともに 1 であるもののみを考慮する. この minimal annulus は分岐点を持たないことが, (2.7) より分かる. また, 対応する Weierstrass data の空間 $\mathcal{C}(v)$ は, 次のようになる:

$$\mathcal{C}(v) = \{(0, 0, u_3, -\sqrt{2}v_3, 0, 0) \in \mathcal{W}(v)\}. \tag{4.1}$$

以降, $\mathcal{C}(v)$ の元 $(0, 0, u_3, -\sqrt{2}v_3, 0, 0)$ を, $(u_3, -\sqrt{2}v_3)$ と書く.

補題 4.1. 集合 $\mathcal{C}(v)$ において, これが空で無いことと $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$ であることは同値である.

証明. $\eta \in \mathcal{C}(v)$ について, (2.9) を実際に計算すると, $0 = v_1$, $0 = v_2$ を得る. 従って, $\mathcal{C}(v)$ が空で無いことと $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$ であることは同値である. □

我々は, 集合 $\bigcup_{v \in \mathbb{R}^3} \mathcal{C}(v)$ を $\mathcal{C}$ と書く. このとき, $\mathcal{C} = \{(u_3, u_4) \mid u_3^2 + u_4^2 \neq 0\} \cong \mathbb{R}^2 - \{0\}$ である. 前節の議論から, $\mathcal{C}$ の元のうち, $(0, u_4)$ のみが, helicoid に対応する. $\rho\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ を次で定義される埋め込みとする.

$$\rho\colon (u_3, u_4) \mapsto \left(\frac{u_3}{\sqrt{u_3^2 + u_4^2}}, \frac{u_4}{\sqrt{u_3^2 + u_4^2}}, \log \sqrt{u_3^2 + u_4^2} \right). \tag{4.2}$$

このとき, $\rho(\mathcal{C})$ は, $\mathbb{R}^3$ 内の平坦な cylinder となる. g_0 を, ρ によって, $\mathbb{R}^3$ の標準的な計量から $\mathcal{C}$ へ誘導される計量とする. このとき,

$$g_0 = \frac{1}{u_3^2 + u_4^2}\left(du_1^3 + du_4^2\right) \tag{4.3}$$

である. $\mathcal{C}((0,0,v_3))$ には, $(\mathcal{C}, g_0)$ から計量 g_1 が誘導されているとする.

命題 4.2. $\mathcal{C}((0,0,v_3))$, $v_3 \neq 0$ において, helicoid と対応する点と, $\mathcal{C}((0,0,v_3))$ の曲率 κ の臨界点が一致する.

証明. κ を計算すると, 次のようになる:

$$\kappa = \frac{-\sqrt{2}v_3}{\sqrt{u_3^2 + 2v_3^2}}. \tag{4.4}$$

従って,

$$\frac{d\kappa}{du_3} = \frac{u_3\sqrt{2}v_3}{(u_3^2 + 2v_3^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.5}$$

である. よって, $\mathcal{C}((0,0,v_3))$, $v_3 \neq 0$ において, helicoid と対応する点と, $\mathcal{C}((0,0,v_3))$ の曲率 κ の臨界点が一致する.. □

参考文献

[1] D. Hoffman and H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, Geometry, V, Springer, Berlin, 1997, pp. 5–93, 267–272.

[2] W. H. Meeks, III and H. Rosenberg, *The geometry of periodic minimal surfaces*, Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 4, 538–578.

[3] K. Moriya, *On a variety of algebraic minimal surfaces in Euclidean 4-space*, Tokyo J. Math. **21** (1998), no. 1, 121–134.

[4] ———, *On a moduli space of minimal annuli*, preprint.

[5] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, New York, 2nd edition, 1986.

[6] K. Yang, Complete Minimal Surfaces of Finite Total Curvature, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.