

Left-Right Symmetric Model from Geometric Formulation of Gauge Theory in $M_4 \times Z_2 \times Z_2$

関西学院大・物理 小西 岳、齊藤 武
近畿大学・物理 牧 二郎、中原 幹夫*

概要

空間 $M_4 \times Z_2 \times Z_2$ におけるゲージ理論から、ゲージ群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ をもつ Left-Right Symmetric Model (LRSM) を再構成する。ここに、 M_4 は 4 次元 Minkowski 空間である。それにより、非可換幾何学に基づく他のアプローチに比べ、モデルの持つ幾何学的構造がより明らかになった。その結果、Yukawa 項や Higgs ポテンシャルが通常の LRSM よりも、より制限された形で求められた。

1 はじめに

最近 Connes [1] およびその他の研究者 [2] により、空間 $M_4 \times Z_N$ におけるゲージ理論が非可換幾何学 (NCG) の枠組みで定式化され、Higgs 機構により対称性が自発的に破れた系へ応用された。これらの理論では、Higgs 場は離散空間 Z_N 方向のゲージ場として扱われた。

しかし NCG に基づくこれらのアプローチは非常に代数的で、その幾何学的意味が深く理解されたとは言いがたい。最近、 $M_4 \times Z_N$ におけるゲージ理論の定式化が純粋に幾何学的な視点から提唱された。[3] このアプローチでは Higgs 場は N 枚の Minkowski 空間のそれぞれで定義されている内部ベクトル空間の間の mapping function として導入される。このアプローチはいくつかのモデルに応用され、その幾何学的構造が明らかにされた。[4]

本講演では $M_4 \times Z_2 \times Z_2$ における pure Yang-Mills 理論から $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ 対称性をもつ left-right symmetric model (LRSM)[5] を再構成する。このアプローチにより、LRSM の幾何学的構造が NCG に基づく他のアプローチ [6] に比べ、より明らかになった。[7]

いわゆる「標準模型」が最終理論ではなく、高エネルギー領域では別のさらに統一された理論で置き換えられる可能性は長い間予想されていた。最近発見されたニュートリノのフレーバー間の振動 [8]、すなわちニュートリノ質量の存在はそのような理論を探求する刺激となった。LRSM はシーソー機構により軽いニュートリノを実現するそのようなモデルのひとつである。[9] LRSM の最も簡単なモデルを以下にまとめる。簡単のために 1 世代のレプトン・セクターのみを考え、クォーク・セクターは考えない。LRSM の標準的なラグランジアンは [10]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_B, \quad (1)$$

*発表者

ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & i\bar{l}_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{1}{2}g_1B_\mu - ig_2W_\mu^L\right)l_L \\ & + i\bar{l}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{1}{2}g_1B_\mu - ig_2W_\mu^R\right)l_R \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & -\bar{l}_L(f\phi + \tilde{f}\tilde{\phi})l_R + \text{h.c.} \\ & -i\bar{l}_L^T C\tau_2 h\Delta_L l_L + \text{h.c.} \\ & -i\bar{l}_R^T C\tau_2 h\Delta_R l_R + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \text{tr}|D_\mu\Delta_L|^2 + \text{tr}|D_\mu\Delta_R|^2 + \text{tr}|D_\mu\phi|^2 \\ & + \text{Yang-Mills terms of } B_\mu, W_\mu^L, W_\mu^R \\ & -V(\text{Higgs potential of } \phi, \Delta_L, \Delta_R), \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。ここに

$$l_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad l_R = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_R, \quad (5)$$

$$\tilde{\phi} \equiv \tau_2\phi^*\tau_2 \quad (6)$$

で、 l_L は $SU(2)_L$ -2 重項、 $U(1)$ チャージ -1 の left-handed レプトン、 l_R は $SU(2)_R$ -2 重項、 $U(1)$ チャージ -1 の right-handed レプトンである。3 個の Higgs 場 ϕ, Δ_L, Δ_R はそれぞれ以下の $SU(2)_L, SU(2)_R, U(1)_{B-L}$ 量子数をもつ；

$$\phi(1/2, 1/2^*, 0), \quad \Delta_L(1, 0, 2), \quad \Delta_R(0, 1, 2). \quad (7)$$

これらの場を 2×2 行列

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_1^+ \\ \phi_2^- & \phi_2^0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\Delta_L = \begin{pmatrix} \delta_L^+/\sqrt{2} & \delta_L^{++} \\ \delta_L^0 & -\delta_L^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \Delta_R = \begin{pmatrix} \delta_R^+/\sqrt{2} & \delta_R^{++} \\ \delta_R^0 & -\delta_R^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

で表す。 W_μ^L, W_μ^R, B_μ はそれぞれ群 $SU(2)_L, SU(2)_R, U(1)_{B-L}$ のゲージ場である。このラグランジアン (1) は次の left-right 変換

$$l_L \leftrightarrow l_R, \quad \Delta_L \leftrightarrow \Delta_R, \quad \phi \leftrightarrow \phi^\dagger. \quad (10)$$

のもとで不変である。ゲージ変換と (10) の変換のもとで不変な、最も一般的な Higgs ポテンシャルは Ref. 10 に与えてある。ラグランジアンは left-right 不変性を持っているが、この対称性を破る真空期待値 (VEV) をもつ真空をとることができる。各 Higgs 場の VEV を

$$\langle\phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} \kappa_1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \kappa_2/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \langle\Delta_{L,R}\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu_{L,R} & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

と表す。ここで、現象論と矛盾しないために

$$|\nu_L| \ll |\kappa_1|, |\kappa_2| \ll |\nu_R| \quad (12)$$

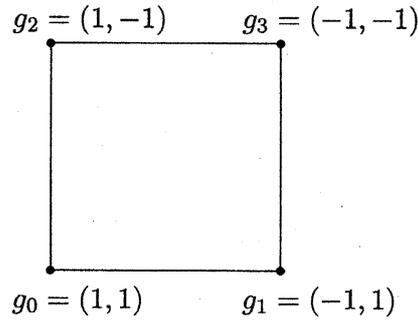


図 1: 群 $Z_2 \times Z_2$ の 4 つの点。

を要請する。電荷をもつレプトンの質量は

$$m_{l^+} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} |f\kappa_2 + \tilde{f}\kappa_1|, \quad (13)$$

で与えられ、ニュートリノの質量は

$$m_{\nu_R} \simeq \sqrt{2} |hv_R|, \quad (14)$$

$$m_{\nu_L} \simeq \sqrt{2} \left| hv_L - \frac{f\kappa_1 + \tilde{f}\kappa_2}{4hv_R} \right| \quad (15)$$

で与えられる。ゲージ粒子の質量は

$$m_{W_L}^2 \simeq \frac{1}{4} g_2^2 (|\kappa_1|^2 + |\kappa_2|^2) \sim m_Z^2, \quad (16)$$

$$m_{W_R}^2 \simeq \frac{1}{2} g_2^2 |v_R|^2 \sim m_X^2 \quad (17)$$

となる。(12) の要請により m_{ν_R}, m_{W_R}, m_X は非常に重く、観測されない。

2 $M_4 \times Z_2 \times Z_2$ における LRSM

2.1 群 $Z_2 \times Z_2$ の構造

1 番目の Z_2 の点を $p_1 = (1, -1)$ で、2 番目の Z_2 の点を $p_2 = (1, -1)$ で表すと、 $Z_2 \times Z_2$ の 4 つの点は

$$g_p = (p_1, p_2), \quad p = 0, 1, 2, 3; \quad (2.18a)$$

で表される (図 1 を見よ)。具体的に

$$g_0 = (1, 1), \quad g_1 = (-1, 1), \quad g_2 = (1, -1), \quad g_3 = (-1, -1) \quad (2.18b)$$

である。これらの点は、代数関係

$$g_0 g_p = g_p, \quad g_p g_p = g_0, \quad (p = 0, 1, 2, 3) \quad (19)$$

$$g_1 g_2 = g_3, \quad \text{および } (1, 2, 3) \text{ の置換}$$

を満たす。関係 $g_p g_q = g_h$ を加法的に $p+q=h$ と書くことにする。各点 (x, g_p) , $x \in M_4$ に $SU(2) \times U(1)$ ベクトル空間を付随させる。4 つの内部空間は互いに独立である。各点 $(x, g_p) \equiv p$ でフェルミオン場 $\psi(x, g_p) \equiv \psi_p$ を定義する。

2.2 基本的要請

ここで、モデルに以下の不変性を要請する：

- (i) 各点 p における $SU(2) \times U(1)$ ゲージ変換に対する局所不変性。
- (ii) §2.5 で説明する拡張された G -共役不変性。
- (iii) $Z_2 \times Z_2$ 変換のもとでの不変性。

(i) により、 ψ_p のゲージ共変微分

$$D_\mu \psi_p = (\partial_\mu - iA_{p\mu}) \psi_p \quad (20)$$

を通して、 M_4 における $SU(2)$ および $U(1)$ ゲージ場が導入される。ここに

$$A_{p\mu} = B_{p\mu} + W_{p\mu} \quad (21)$$

で、 $B_{p\mu}$ は $U(1)$ ゲージ場、 $W_{p\mu}$ は $SU(2)$ ゲージ場である。 $Z_2 \times Z_2$ 方向の接続は ψ_q を q から p へ写像する mapping function

$$\psi_q \rightarrow \Phi_{pq} \psi_q \quad (2\cdot22a)$$

として導入される。ここに

$$\Phi_{pq} = \Phi_{qp}^\dagger, \quad (2\cdot22b)$$

は ψ_q を p の上のファイバーへ写像し、後に Higgs 場と解釈される。ここで第4番目の要請をおく：

(iv) Mapping function Φ_{pq} は各 Z_2 に沿ってのみ存在する。すなわち図 1 の各辺のそってのみ存在する： $0 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 3, 0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 3$ 。したがって、対角線 $0 \leftrightarrow 3$ および $1 \leftrightarrow 2$ にそっての mapping function、すなわち Higgs 場は存在しない。

ψ_p のゲージ変換 U_p のもとで mapping function Φ_{pq} は

$$\Phi_{pq} \rightarrow \Phi'_{pq} = U_p \Phi_{pq} U_q^{-1}, \quad (23)$$

と変換することを要請する。これによって Φ_{pq} は $Z_2 \times Z_2$ 方向のゲージ場とみなすことができる。

2.3 フェルミオンのラグランジアン

ゲージ場が存在しないときの $M_4 \times Z_2 \times Z_2$ におけるフェルミオンのラグランジアンを

$$\mathcal{L}_F^0 = i \sum_p \bar{\psi}_p \gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - \sum'_{p,q} \kappa_{p+q} \bar{\psi}_p \gamma^{p+q} \psi_q, \quad (24)$$

と仮定する。ここに κ_{p+q} は実の質量パラメタで、 \sum' は条件 $p+q=h=1,2$ を満たす p, q に関する和を表す。この条件は、図 1 において各辺の間の相互作用のみを考慮していることから導かれる。Dirac 行列 γ^h ($h=1,2$) は $Z_2 \times Z_2$ 空間に対応し、全体のガンマ行列 $\{\gamma^\mu, \gamma^h\}$ は 6 次元の Clifford 代数を満たす。新たな Dirac 行列を

$$\gamma^h = i\gamma_5 \sigma^h, \quad (h = p+q = 1, 2 \text{ and } \gamma_5^\dagger = \gamma_5) \quad (25)$$

ととる。ここに σ^h は Pauli 行列である。ここで微分を単純に差分で置き換えると現れる $p=q$ の項は落とした。これは、離散空間における Fermi 場に新しいタイプの相互作用を導入することに等しい。以下に見るように、これはモデル構成に本質的である。

ラグランジアン (24) に $M_4 \times Z_2 \times Z_2$ における局所 $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変性を要求すると、 \mathcal{L}_F^0 にゲージ場 (21) と $\Phi_{pq} = \Phi_{qp}^\dagger$ が導入され

$$\mathcal{L}_F = i \sum_p \bar{\psi}_p \gamma^\mu D_\mu \psi_p - \sum_{p,q}' \kappa_h \bar{\psi}_p \gamma^h \Phi_{pq} \psi_q \quad (h = p + q = 1, 2) \quad (26)$$

となる。必要な mapping function は

$$\Phi_{01}, \Phi_{23} \quad h = 1 \text{ のとき} \quad (27)$$

と

$$\Phi_{20}, \Phi_{31} \quad h = 2 \text{ のとき} \quad (28)$$

である。(26) の相互作用項は $A_{p\mu}$ と Φ_{pq} を用いて

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2,$$

とかかれる。ここに

$$\mathcal{L}_1 = \sum_p \bar{\psi}_p \gamma \cdot A \psi_p, \quad (29)$$

$$\mathcal{L}_2 = -i \sum_{p,q}' \kappa_h \bar{\psi}_p \gamma_5 \sigma^h \Phi_{pq} \psi_q \quad (h = p + q = 1, 2)$$

である。

2.4 超選択則

フェルミオンの相互作用ラグランジアン \mathcal{L}_I には2つの超選択則が存在する：

(I) (4+2)-次元空間における Γ_5 行列を

$$\Gamma_5 = \gamma_5 \sigma_3. \quad (30)$$

で定義すると、 ψ_p の $\Gamma_5 = 1$ と $\Gamma_5 = -1$ の成分は互いに分離する。

(II) 群の元 $g_p = (p_1, p_2)$ に対し ν を

$$\nu = p_1 p_2 = \pm 1 \quad (31)$$

で定義する。相互作用 \mathcal{L}_1 は ν と σ_3 の符号を変えないが、 \mathcal{L}_2 は $\nu \rightarrow -\nu$ および $\sigma_3 \rightarrow -\sigma_3$ と符号を反転する。したがって、積 $\nu \sigma_3$ は \mathcal{L}_1 と \mathcal{L}_2 のどちらに対しても変化しない。したがって、 ψ_p の $\nu \sigma_3 = 1$ と $\nu \sigma_3 = -1$ の成分は互いに分離する。

(I) と (II) から、フェルミオン場は4つのセクターに分かれる。ここではその中のひとつ、たとえば

$$\Gamma_5 = -1 \text{ および } \nu \sigma_3 = 1, \quad (32)$$

のセクターをとる。このとき $\Gamma_5 = \gamma_5 \sigma_3 = -1$ であるから ψ_p は

$$\psi_p = \begin{pmatrix} \psi_{pL} \\ \psi_{pR} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cdots \sigma_3 = +1 \\ \cdots \sigma_3 = -1, \end{matrix} \quad (33)$$

という形をしている。ここに $\psi_L(\psi_R)$ は ψ の left(right)-handed の成分で、 $\gamma_5 \psi_L = -\psi_L$ ($\gamma_5 \psi_R = \psi_R$) を満たす。 $\nu \sigma_3 = 1$ から

$$\sigma_3 = \nu = +1 : \quad \psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_{0L} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} \psi_{3L} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\sigma_3 = \nu = -1 : \quad \psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{1R} \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{2R} \end{pmatrix} \quad (35)$$

が導かれる。

ψ_p をこのようにとると、相互作用ラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \bar{\psi}_{0L}\gamma \cdot A_0\psi_{0L} + \bar{\psi}_{1R}\gamma \cdot A_1\psi_{1R} \\ &\quad + \bar{\psi}_{2R}\gamma \cdot A_2\psi_{2R} + \bar{\psi}_{3L}\gamma \cdot A_3\psi_{3L}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -i\kappa_1 \left(\bar{\psi}_0\gamma_5\sigma^1\Phi_{01}\psi_1 + \bar{\psi}_2\gamma_5\sigma^1\Phi_{23}\psi_3 \right) \\ &\quad - i\kappa_2 \left(\bar{\psi}_2\gamma_5\sigma^2\Phi_{20}\psi_0 + \bar{\psi}_3\gamma_5\sigma^2\Phi_{31}\psi_1 \right) + \text{h.c.} \\ &= -i\kappa_1 \left(\bar{\psi}_{0L}\gamma_5\Phi_{01}\psi_{1R} + \bar{\psi}_{2R}\gamma_5\Phi_{23}\psi_{3L} \right) \\ &\quad + \kappa_2 \left(\bar{\psi}_{2R}\gamma_5\Phi_{20}\psi_{0L} - \bar{\psi}_{3L}\gamma_5\Phi_{31}\psi_{1R} \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (37)$$

とかかれる。

2.5 拡張された G -共役

まだセクターに分ける前の Fermi 場 ψ_p をとる。 ψ_p の G -共役は

$$\psi_p \rightarrow U_G\psi_p U_G^{-1} = \lambda_p(-i\sigma_2)(-i\tau_2)\psi_p^c \equiv \lambda_p\psi_p^G \quad (38)$$

で定義される。ここに ψ_p^c は ψ_p の荷電共役場、 λ_p は ψ_p の G -パリティである。以後簡単のために $\lambda_p = 1$ とおくと

$$\psi_p^{GG} = \psi_p \quad (39)$$

が得られる。 ψ_p の各 σ_3 -成分について

$$\begin{pmatrix} \psi_{p+} \\ \psi_{p-} \end{pmatrix}^G = \begin{pmatrix} -\psi_{p-}^g \\ \psi_{p+}^g \end{pmatrix} \quad (40)$$

となる。ここに $\psi_{p\pm}^g$ は通常 of (すなわち $-i\sigma_2$ を含めない) $\psi_{p\pm}$ の G -共役で

$$\psi_{p\pm}^{gg} = -\psi_{p\pm} \quad (41)$$

を満たす。公式

$$\bar{\psi}_p(1, \gamma_5)\psi_q = \overline{\psi_p^G}(1, \gamma_5)\psi_q^G, \quad (42)$$

$$\bar{\psi}_p(\gamma_\mu, \vec{\tau}, \sigma_h)\psi_q = -\overline{\psi_p^G}(\gamma_\mu, \vec{\tau}, \sigma_h)\psi_q^G \quad (43)$$

$$\Omega \rightarrow U_G\Omega U_G^{-1} = \lambda_\Omega(-i\tau_2)\Omega^*(-i\tau_2)^{-1} = \lambda_\Omega\tilde{\Omega} \equiv \lambda_\Omega\Omega^G \quad (44)$$

が成り立つことに注意しよう。ここに Ω はゲージ場 $A_{p\mu}$ または Φ_{pq} を表す。(41)–(43) によると、相互作用ラグランジアン \mathcal{L}_I がゲージ不変であるためには、各ゲージ場の G -パリティは $\lambda_\Omega = -1$ でなければならない。

2.6 Higgs 場の運動エネルギー

図 2 の経路に対する曲率を計算しよう。Fermi 場 $\psi_p(x)$ は 2 つの経路 C_1, C_2 を通って (x, g_p) から $(x + \delta x, g_q)$ へ写像される。2 つの像は

$$\psi(C_1) = \Phi_{qp}(x + \delta x) [1 + iA_{p\mu}(x)\delta x^\mu] \psi_p(x), \quad (45)$$

$$\psi(C_2) = [1 + iA_{q\mu}(x)\delta x^\mu] \Phi_{qp}(x)\psi_p(x) \quad (46)$$

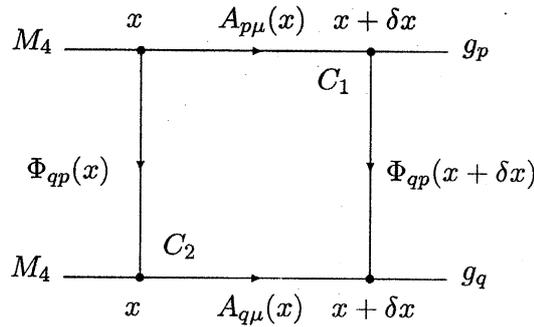


図 2: Fermi 場 $\psi_p(x)$ は (x, g_p) から $(x + \delta x, g_q)$ へ 2 つの経路 C_1 および C_2 を経由して写像される。この 2 つの像の差は曲率 $D_\mu \Phi_{qp}$ を定義する。

である。その差をとり

$$\psi(C_1) - \psi(C_2) = D_\mu \Phi_{qp}(x) \delta x^\mu \psi_p(x) \quad (47)$$

が得られる。ここに

$$D_\mu \Phi_{qp} = \partial_\mu \Phi_{qp} - i [A_{q\mu} \Phi_{qp} - \Phi_{qp} A_{p\mu}] \quad (48)$$

である。したがって Φ_{qp} の共変微分は図 2 に対する曲率に他ならない。

2.7 場の同一視

まず、我々のモデルは G -不変性と同時に、「並進」 $p \rightarrow p + h$ ($h = 1, 2$) に対しても対称であることに注意しよう。後者の対称性は $i \sum_p \bar{\psi}_p \gamma^\mu D_\mu \psi_p$ と $\sum_{p,q} |D_\mu \Phi_{qp}|^2$ に対しては自明である。しかしこの対称性は \mathcal{L}_2 に対しては明らかではない。 \mathcal{L}_2 を具体的にかくと

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \kappa_h \bar{\psi}_p \gamma^h \Phi_{qp} \psi_p &= \kappa_1 (\bar{\psi}_0 \gamma^1 \Phi_{01} \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^1 \Phi_{23} \psi_3) \\ &+ \kappa_2 (\bar{\psi}_2 \gamma^2 \Phi_{20} \psi_0 + \bar{\psi}_3 \gamma^2 \Phi_{31} \psi_1) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (49)$$

となる。(49) は、エルミート性 $\Phi_{pq} = \Phi_{qp}^\dagger$ から κ と γ の添え字を固定したまま $0 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 3$ と同時に交換しても不変である。これは $p \rightarrow p + 1$ というタイプの並進対称性を表している。また (49) は $0 \leftrightarrow 2, 1 \leftrightarrow 3$ のもとでも不変である；すなわち $p \rightarrow p + 2$ のタイプの並進対称性も存在する。したがって、我々の系は G -共役と並進 $p \rightarrow p + h$ ($h = 1, 2$) を合わせた変換、すなわち

$$\psi_p \rightarrow \psi_{p+h}^G, \quad A_p \rightarrow -A_{p+h}^G, \quad \Phi_{pq} \rightarrow -\Phi_{p+h, q+h}^G \quad (50)$$

に対し不変である。式 (33 - 35) および (39) から $\psi_p \rightarrow \psi_{p+h}^G$ は

$$\psi_{pL} \rightarrow -\psi_{p+h,R}^g, \quad (p = 0, 3) \quad \psi_{pR} \rightarrow \psi_{p+h,L}^g, \quad (p = 1, 2) \quad (51)$$

とかかれる。

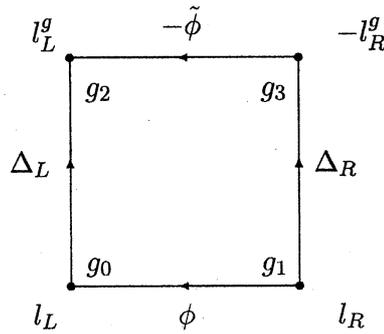


図 3: $Z_2 \times Z_2$ における場の配属。

$M_4 \times Z_2 \times Z_2$ におけるゲージ理論から LRSM を再構成するには、あまりにも多くの独立な場が得られた。そこで、いくつかの場は除外しなければならない。不変性 (50) と (51) から

$$\psi_p = \psi_{p+2}^G, \quad A_p = -A_{p+2}^G, \quad \Phi_{pq} = -\Phi_{p+2, q+2}^G \quad (52)$$

を仮定するのは自然であろう。別の可能な選択 $\psi_p = \psi_{p+1}^G$ なども同様の LRSM に帰着する。独立な場を $\psi_{0L}, \psi_{1R}, A_0, A_1, \Phi_{01}, \Phi_{20}, \Phi_{31}$ にとる。§1 の記法でこれらを表すと

$$\begin{aligned} \psi_{0L} &= l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, & \psi_{1R} &= l_R = \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix}, \\ A_0 &= B_0 + W_L, & A_1 &= B_1 + W_R, \\ \Phi_{01} &= \phi, \\ \Phi_{20} &= \Delta_L, & \Phi_{31} &= \Delta_R \end{aligned} \quad (53)$$

となる (図 3 を見よ)。式 (52) から他の場は

$$\begin{aligned} \psi_{2R} &= \psi_{0L}^g = l_L^g = -i\tau_2 C^{-1} \bar{l}_L^T, \\ \psi_{3L} &= -\psi_{1R}^g = -l_R^g = i\tau_2 C^{-1} \bar{l}_R^T, \\ A_2 &= -A_0^G = -\tilde{A} = -(\tilde{B}_0 + \tilde{W}_L) = -B_0 + W_L, \\ A_3 &= -A_1^G = -\tilde{A}_1 = -B_1 + W_R, \\ \Phi_{23} &= -\Phi_{01}^G = -\phi^G = -\tilde{\phi} \end{aligned} \quad (54)$$

と与えられる。しかし、まだ $M_4 \times \{g_0\}$ と $M_4 \times \{g_1\}$ の上で独立に定義された 2 つの $U(1)$ ゲージ場 B_0, B_1 が存在する。 B_0 と B_1 を同一視するならば、すなわち $B_0 = B_1 = B$ とおくならば、以下に見るように Higgs ポテンシャルを除いて通常の LRSM が得られる。

運動エネルギー項を規格化するために、Fermi 場を $\psi_p \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_p$ とスケールする。 \mathcal{L}_2 における γ_5 因子は ψ_p を

$$e^{i\pi\gamma_5/4}\psi_p \rightarrow \psi_p, \quad (55)$$

と再定義すれば除かれる。ここで恒等式 $i\gamma_5 = e^{i\pi\gamma_5/2}$ を用いた。式 (36) と (37) の相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ は

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\bar{l}_L\gamma \cdot A_0 l_L + \frac{1}{2}\bar{l}_R\gamma \cdot A_1 l_R + \frac{1}{2}\bar{l}_L^g\gamma \cdot A_2 l_L^g + \frac{1}{2}\bar{l}_R^g\gamma \cdot A_3 l_R^g$$

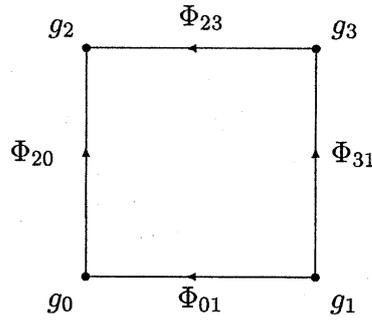


図 4: $Z_2 \times Z_2$ の点の間の mapping function。2つの経路から得られるホロノミーは曲率 $G_{p+3,p}$ を定義する。

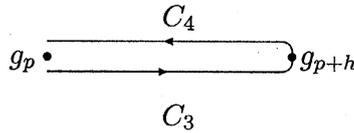


図 5: 曲率 $F_{p,p+h,p}$ を定義する経路。

$$= \bar{l}_L \gamma \cdot (B + W_L) l_L + \bar{l}_R \gamma \cdot (B + W_R) l_R, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -\kappa_1 (\bar{l}_L \phi l_R + \bar{l}_R \phi l_L) \\ &\quad - \frac{1}{2} i \kappa_2 (\bar{l}_L^g \Delta_L l_L + \bar{l}_R^g \Delta_R l_R - \bar{l}_L \Delta_L^\dagger l_L^g - \bar{l}_R \Delta_R^\dagger l_R^g) \end{aligned} \quad (57)$$

となる。Higgs 場の共変微分 (47) は

$$D\phi = \partial\phi - i(W_L\phi - \phi W_R), \quad (58)$$

$$D\Delta_L = \partial\Delta_L + 2iB\Delta_L - i(W_L\Delta_L - \Delta_L W_L), \quad (59)$$

$$D\Delta_R = \partial\Delta_R + 2iB\Delta_R - i(W_R\Delta_R - \Delta_R W_R) \quad (60)$$

で与えられる。

2.8 Higgs ポテンシャル

図 4 の経路から得られる曲率を求めよう。mapping function $\Phi_{pq} = \Phi_{pq}^\dagger$ はやはり独立であるとする。場の同一視は後ほど導入する。 (x, g_p) における Fermi 場 ψ_p は (x, g_p) から (x, g_{p+3}) へ 2つの経路 $p \rightarrow p+1 \rightarrow p+3$ と $p \rightarrow p+2 \rightarrow p+3$ を経由して写像される。2つの像の差、すなわちこれらの経路によるホロノミーは曲率

$$G_{p+3,p} \equiv \Phi_{p+3,p+1} \Phi_{p+1,p} - \Phi_{p+3,p+2} \Phi_{p+2,p} = G_{p,p+3}^\dagger \quad (61)$$

を与える。

図 5 の経路からも曲率が得られる。これは Weinberg-Salam 理論と同じタイプで

ある。 ψ_p と像

$$\psi_p(C_3 \cdot C_4) - \psi_p = (\Phi_{p,p+h} \Phi_{p+h,p} - 1) \psi_p \quad (62)$$

を比べると、曲率

$$F_{p,p+h,p} \equiv \Phi_{p,p+h} \Phi_{p+h,p} - 1 \quad (h = 1, 2) \quad (63)$$

が得られる。離散空間においてはこの曲率はゼロにはならない。

Higgs 場はゲージ場であるから、Higgs ポテンシャルは Yang-Mills タイプでゲージ不変でなければならない。曲率のゲージ不変な組み合わせは

$$A_{p,h,k} \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(F_{p,p+h,p} F_{p,p+k,p}), \quad (p = 0, 1, 2, 3; h, k = 1, 2) \quad (64)$$

$$B_{p,q,h,k} \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(F_{p,p+h,p}) \frac{1}{2} \text{tr}(F_{q,q+k,q}), \quad (p, q = 0, 1, 2, 3; h, k = 1, 2) \quad (65)$$

$$\Gamma_p \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(G_{p,p+3} G_{p+3,p}) \quad (p = 0, 1) \quad (66)$$

である。すると Higgs ポテンシャルは以下のように線形結合としてかけられる：

$$\begin{aligned} V = & \alpha_{11} \sum_{p=0,2} A_{p:1,1} + \alpha_{12} \sum_{p=0,1} A_{p:2,2} + \alpha_2 \sum_{p=0}^3 A_{p:1,2} \\ & + \beta_{11} \sum_{p=0,2} B_{p,p:1,1} + \beta_{12} \sum_{p=0,1} B_{p,p:2,2} + \beta_2 \sum_{p=0}^3 B_{p,p:1,2} \\ & + \beta_{31} B_{0,3:1,1} + \beta_{32} B_{0,3:2,2} \\ & + \gamma (\Gamma_0 + \Gamma_1). \end{aligned} \quad (67)$$

ここに α, β, γ は任意の実パラメタである。

以下で G -共役 $\tilde{A} = \tau_2 A^* \tau_2$ に関する公式

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{A}} &= A, \\ \tilde{\tau}_i &= -\tau_i, \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \\ \widetilde{AB} &= \tilde{A}\tilde{B}, \\ \text{tr}(\tilde{A}) &= \text{tr}(A^\dagger) \end{aligned} \quad (68)$$

を用いる。場を (52) と (53) にしたがって同一視すると、Higgs 場 $\Delta_{L,R}$ は $\Delta = \sum_{i=1}^3 \tau_i \Delta_i$ となり、したがって

$$\tilde{\Delta}_{L,R} = -\Delta_{L,R}^\dagger \quad (69)$$

が成り立つ。これらの公式から等式

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 \quad (70)$$

が得られる。同様に

$$\text{tr}(\tilde{\phi} \tilde{\phi}^\dagger \Delta_L \Delta_L^\dagger) = \text{tr}(\phi \phi^\dagger \tilde{\Delta}_L \tilde{\Delta}_L^\dagger) \sim \text{tr}(\phi \phi^\dagger \Delta_L^\dagger \Delta_L) = \text{tr}(\phi \phi^\dagger \Delta_L^\dagger \Delta_L), \quad (71)$$

$$\text{tr}(\tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} \Delta_R \Delta_R^\dagger) = \text{tr}(\phi^\dagger \phi \Delta_R^\dagger \Delta_R), \quad (72)$$

が成り立ち、したがって等式

$$\text{tr}(F_{010}F_{020}) = \text{tr}(F_{232}F_{202}) = \text{tr}\left\{\left(\frac{1}{2}\phi\phi^\dagger - 1\right)\left(\Delta_L^\dagger\Delta_L - 1\right)\right\} \quad (73)$$

が証明された。同様に

$$\text{tr}(F_{101}F_{131}) = \text{tr}(F_{323}F_{313}) = \text{tr}\left\{\left(\frac{1}{2}\phi^\dagger\phi - 1\right)\left(\Delta_R^\dagger\Delta_R - 1\right)\right\} \quad (74)$$

が示される。

これらの等式を用いると Higgs ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V = & \alpha_{11}\text{tr}(F_\phi^2) + \frac{1}{2}\alpha_{12}\left[\text{tr}(F_L^2) + \text{tr}(F_R^2)\right] + \alpha_2\left[\text{tr}(F_\phi F_L) + \text{tr}(F'_\phi F_R)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left(\beta_{11} + \frac{1}{2}\beta_{31}\right)(\text{tr}F_\phi)^2 + \frac{1}{4}\beta_{12}\left[(\text{tr}F_L)^2 + (\text{tr}F_R)^2\right] \\ & + \frac{1}{2}\beta_2(\text{tr}F_\phi)\left[(\text{tr}F_L) + (\text{tr}F_R)\right] + \frac{1}{4}\beta_{32}(\text{tr}F_L)(\text{tr}F_R) \\ & + \gamma\text{tr}(G_{03}G_{30}) \end{aligned} \quad (75)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} F_\phi &= F_{010} = \frac{1}{2}\phi\phi^\dagger - 1, & F'_\phi &= F_{101} = \frac{1}{2}\phi^\dagger\phi - 1, \\ F_L &= F_{020} = \Delta_L^\dagger\Delta_L - 1, & F_R &= F_{131} = \Delta_R^\dagger\Delta_R - 1, \\ G_{30} &= G_{03}^\dagger = \Delta_R\phi^\dagger + \tilde{\phi}^\dagger\Delta_L \end{aligned} \quad (76)$$

である。 F_ϕ の因子 $1/2$ は Φ_{01} と Φ_{23} をそれぞれ ϕ と $-\tilde{\phi}$ に同一視すると必要となる。その場合、2つの Higgs 運動エネルギー項 $\text{tr}|D\Phi_{01}|^2$ と $\text{tr}|D\Phi_{23}|^2$ は一致し、場 ϕ を $\phi \rightarrow \phi/\sqrt{2}$ と再定義しなければならない。他の場 W_L, W_R, B についても同様のことが起こるが、単にそれらの結合定数を $1/\sqrt{2}$ だけスケールすればよい。

このようにしてえられた Higgs ポテンシャルは (10) のもとで left-right 対称である。これは §2.2 における我々の基本的要請 (iii) の帰結である。Higgs 場 ϕ, Δ_L, Δ_R は無次元なので次元 L^{-1} を持つように再定義しなければならない。そのためには3つの新しいパラメタが必要となる。したがって我々の Higgs ポテンシャル (75) は11個のパラメタを含んでいる。

1 と 2 の間の対称性、すなわち2つの Z_2 の交換に関する対称性を要請すると

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} \equiv \alpha_1, \beta_{11} = \beta_{12} \equiv \beta_1, \beta_{31} = \beta_{32} \equiv \beta_3 \quad (77)$$

が得られる。

3 結論

ゲージ群 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ をもつ LRSM を $M_4 \times Z_2 \times Z_2$ における pure Yang-Mills 理論から導いた。我々の基本的要請は §2.2 に述べられた (i) - (iv) である。我々が得た新たな結果をまとめると

1. 3つの Higgs 場 ϕ, Δ_L, Δ_R は $Z_2 \times Z_2$ におけるゲージ場である。

2. したがって Higgs ポテンシャルは Yang-Mills タイプで (75) のように

$$\text{tr}|\text{Higgs 場の曲率}|^2$$

の和の形でかかれる。ポテンシャルは 11 個の自由パラメタを含んでいる。一方 Deshpande *et al.*, [10] が得た一般的な Higgs ポテンシャルは 18 個の自由パラメタを含んでいる。

3. 我々が得た Higgs ポテンシャルは (10) のもとで left-right 対称である。この性質は §2.2 の基本的要請 (iii)、すなわち「我々のモデルは $Z_2 \times Z_2$ 不変である」の帰結である。
4. (57) で与えられる Yukawa 結合のラグランジアン \mathcal{L}_2 は $\bar{l}_L \tilde{\phi} l_R + \text{h.c.}$ を含まない。一方、(3) の標準的な LRSM における \mathcal{L}_Y はこの項を含む。
5. §2.7 において $U(1)$ ゲージ場 B_0 と B_1 を同一視した: $B_0 = B_1 = B$ 。しかしこれらを同一視しなければ、2つの $U(1)$ ゲージ場 $B_0 = B_L$ と $B_1 = B_R$ を持つ新しい LRSM が構成される。

2つの $U(1)$ ゲージ場をもつ LRSM と、我々の Higgs ポテンシャルを用いた left-right 非対称な真空の解析は将来の課題である。結論として、我々は LRSM を pure Yang-Mills 理論から導き、NCG に基づく他の理論にくらべモデルの幾何学的な構造をより明らかにした。

参考文献

- [1] A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, London, 1994).
- [2] D. Kastler, *Rev. Math. Phys.*, **5** (1990) 477.
R. Coquereaux, G. Esposito-Farese and G. Vaillant, *Nucl. Phys.* **B353** (1991) 689.
R. Coquereaux, R. Hässling, N. A. Papadopoulos and F. Scheck, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 2809.
A. Sitarz, *Phys. Lett.* **B308** (1993) 311.
A. H. Chamseddine, G. Feldler and J. Fröhlich, *Phys. Lett.* **B296** (1992) 109; *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 672.
K. Morita, *Prog. Theor. Phys.* **90** (1993) 219.
K. Morita, Y. Okumura and M. Tanaka-Yamawaki, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 445.
Y. Okumura, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 607.
Y. Okumura, S. Suzuki and K. Morita, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 1121.
I. S. Sogami, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 117.
K. Morita, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 125.
H. G. Ding, H. Y. Guo, J. M. Li and K. Wu, *Z. Phys.*, **C64** (1994) 512.
K. Morita and Y. Okumura, *Prog. Theor. Phys.* **91** (1994) 959; *Phys. Rev.* **D50** (1994) 1016.
Y. Okumura, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 1026; *Prog. Theor. Phys.* **92** (1994) 625.
S. Naka and E. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **92** (1994) 189.
R. Erdem, *Mod. Phys. Lett.* **A13** (1998) 465.
- [3] G. Konisi and T. Saito, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 657.
- [4] T. Saito and K. Uehara, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 2390.
B. Chen, T. Saito, H-B. Teng, K. Uehara and K. Wu, *Prog. Theor. Phys.* **95**

- (1996) 1173.
A. Kokado, G. Konisi, T. Saito and Y. Tada, *Prog. Theor. Phys.* **99** (1998) 293.
M. Kubo, Z. Maki, M. Nakahara and T. Saito, *Prog. Theor. Phys.* **100** (1998) 165.
- [5] A. Salam and J. C. Pati, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 275.
G. Senjanovich, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 334.
R. Mohapatra and G. Senjanovich, *Phys. Rev.* **D21** (1981) 165.
- [6] A. H. Chamseddine, G. Felder and J. Fröhlich, *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 672.
Bin Chen and Ke Wu, AS-ITP-93-64 Preprint.
B. Iochum and T. Schücker, *Lett. Math. Phys.*, **32** (1994) 153.
Y. Okumura, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 589.
Y. Okumura and K. Morita, *Nouvo Cim.* **109A** (1996) 311.
Y. Okumura, *Nouvo Cim.* **110A** (1997) 267.
E. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **98** (1997) 187.
- [7] G. Konisi, Z. Maki, M. Nalahara and T. Saito, *Prog. Theor. Phys.*, **101** (1999) 1105.
- [8] Y. Totsuka, a talk given at *1997 International Symp. on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Hamburg, 1997*, to be published in the Proceedings.
D. Normile, *Science*, **280** (1998) 1689.
Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870.
B. Pontecorvo, *Sov. Phys.-JETP*, **26** (1968) 984.
- [9] T. Yanagida, in *Proc. of the Workshop on the Unified Theory and Baryon Number in the Universe*, ed. O. Sawada and A. Sugamoto (KEK report 79-18, 1979), p. 95.
M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, ed. P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman (North Holland, Amsterdam, 1979) p. 315.
- [10] N. G. Deshpande, J. F. Gunion, B. Kayser and F. Olness, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 837.