

2次元乱流におけるパッシブスカラーのスペクトル

名工大 後藤 俊幸, 名垣 淳司
Toshiyuki Gotoh, Junji Nagaki

名大計算理工 金田 行雄
Yukio Kaneda

I. はじめに

乱流を特徴づける性質のうちのひとつに、分子拡散と比べて桁違いに大きい物質やエネルギーの輸送能力を上げることができる。この大きな輸送能力は人類の活動の様々な場面で積極的に利用されてきたし、それゆえに古くからの重要な問題として取り上げられてきている。ここでは、粘性-拡散領域におけるパッシブスカラー(以後単にスカラーと略記する)の揺らぎのスペクトルについて議論を行なう。

スカラーを $\theta(\mathbf{x}, t)$ とすると、スカラースペクトル $F(k)$ は

$$\langle \theta^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_0^\infty F(k, t) dk$$

と定義される。流体の動粘性率 ν とスカラーの分子拡散係数 κ の比 $Pr = \nu/\kappa$ に応じて、スカラースペクトルにはいくつかの漸近的スペクトル領域が存在することが知られている。^{1,2} 3次元乱流の場合、それらはそれぞれ $\kappa \sim \nu \ll 1$ のとき慣性-対流領域 (inertial-convective range)

$$F(k) = B_{IC} \bar{\chi} \bar{\epsilon}^{-1/3} k^{-5/3}, \quad (1)$$

$\nu \ll \kappa \ll 1$ のとき慣性-拡散領域 (inertial-diffusive range)

$$F(k) = B_{ID} \bar{\chi} \kappa^{-3} \bar{\epsilon}^{1/3} k^{-17/3}, \quad (2)$$

$\kappa \ll \nu \ll 1$ のとき粘性-対流領域 (viscous-convective range)

$$F(k) = B_{VC} \bar{\chi} (\nu/\bar{\epsilon})^{1/2} k^{-1}, \quad (3)$$

と呼ばれる。ここで $\bar{\chi}$ と $\bar{\epsilon}$ はそれぞれ単位質量当たりのスカラーおよびエネルギー散逸率である。また B_{IC}, B_{ID} は B_{VC} 無次元の普遍定数であり、ALHDIA (Abridged-Lagrangian-Histiry Direct Interaction Approximation)^{3,4} や LRA (Lagrangian Renormalized Approximation)⁵⁻⁷ などの任意定数を含まないシステムティックな Lagrange 的スペクトル理論によって計算されている。表1に各理論による値が示してある。

2次元乱流におけるスカラー輸送の問題は、地球規模の乱流輸送の観点から最近特に関心が持たれてきている。2次元乱流においては、その特殊性により3次元の場合と比べてより変化に富んだ様々な漸近的スカラースペクトルが存在することが理論的に予測されている。LRAによればそれらは定数まで含めて以下のように示されている。⁷ エネルギー逆カスケード領域 (Inverse-energy cascade range) では

$$F(k) = C_{IE} \bar{\chi} \bar{\epsilon}^{-1/3} k^{-5/3} \quad (4)$$

であり、 $\kappa \sim \nu \ll 1$ のとき慣性-対流領域 (inertial-convective range)

$$F(k) = C_{IC} \bar{\chi} \bar{\eta}^{-1/3} k^{-1} (\ln(k/k_I))^{-1/3}, \quad (5)$$

$\nu \ll \kappa \ll 1$ のとき慣性 - 拡散領域 (inertial-diffusive range)

$$F(k) = C_{ID} \bar{\chi} \kappa^{-3} \bar{\eta}^{2/3} k^{-7} (\ln(k/k_I))^{-1/3}, \quad (6)$$

$\kappa \ll \nu \ll 1$ のとき粘性 - 対流領域 (viscous-convective range)

$$F(k) = C_{VC} \bar{\chi} (\nu/\bar{\epsilon})^{1/2} k^{-1}. \quad (7)$$

無次元定数は

$$C_{IE} = 0.198, C_{IC} = 0.561, C_{ID} = 1.81, C_{VC} = \sqrt{6}. \quad (8)$$

である。

これらの漸近的スカラースペクトルと定数についての実験あるいは直接数値シミュレーション (DNS) によるデータは多くない。3次元では実験値で $B_{IC} = 0.4 \sim 1.9$ であり、理論値は ALHDIA で 0.208,⁴ LRA で 0.340⁶ となっている。以下でみるように、2次元定常乱流の DNS で C_{VC} を求めるとそれは約 5 であるが、LRA では約 2.5 といずれの場合にも理論値は実験や DNS とくらべて小さな値となっている。Lagrange 的なスペクトル理論は、スカラースペクトルの正しいスケールリング則を導くが、定量的な比較においてははまだ十分ではないと見ることが出来よう。一方、地球規模の乱流による物質やエネルギー輸送の予測や、工学的機器の設計などにおいて乱流輸送のより正確な理論が望まれている。

これらのことをふまえて、定量的により正確に乱流輸送を記述しかつ出来るだけ手間のかからない近似法を考えた。⁸ 新しい近似方法を作る際に、対象とする系の物理的特徴をよく表し、かつ系の持つ不変性をも満たすような変数を用いて近似方程式を構成すれば、その結果はより実際に近い振る舞いを示すであろうと期待できる。このような変数をここでは代表変数 (Representatives) と呼ぶことにする。⁵ この考え方で、スカラー輸送を考えてみよう。小さな流体要素とその内部に含まれているスカラー量の分布を考え、スカラーの分子拡散係数は無視できるとする。要素は流体の運動と共に流されかつ回転を受けるであろう。しかし、この運動によって流体要素内でのスカラーの分布は変化せず、これらの流体運動の影響はガリレイ変換とユニタリー変換で取り除くことができる。流体要素内でのスカラー分布を変化させるのは、局所的な速度場の純粋な変形 (pure straining) による。実際、この考えにたつて、3次元乱流における粘性 - 対流領域でのスカラースペクトルを近似的に計算すると、 B_{VC} は実験値 (3.9 ± 1.5) に十分近い値 (3.6) を出すことが知られている。¹⁰

ここでは、同様な代表変数を用いて 2次元定常乱流におけるスカラースペクトルを計算し、DNS との計算結果とくらべる。一般に、乱流の DNS によるエネルギースペクトルが漸近的スペクトルに到達するには、巨大な計算機資源を必要とする。しかし、粘性 - 対流領域の DNS では、乱流のレイノルズ数は必ずしも大きくある必要はなく、 $F(k) \propto k^{-1}$ のスペクトル領域を実現するには、 Pr が大きければよい。このことは、2次元の粘性 - 対流領域の DNS が、現在の高性能の計算機で到達できる数少ない乱流と乱流輸送の例となる可能性を示唆している。実際、ここで報告する DNS の結果は、十分な波数領域の幅をもって粘性 - 対流領域のスカラースペクトルの存在と C_{VC} の値を計算することが出来た最初の例である。⁸ さらに進んで、分子拡散係数が重要になる遠拡散領域 (far diffusive range) におけるスカラースペクトルについて、LRA と新しい代表変数を用いた LRA による $F(k)$ の計算結果を DNS と比較検討する。^{1,4,7,11-13}

II. LRA 方程式

以下の議論の準備として、簡単にスカラー場の LRA について見ておく。^{5-7,14} 非圧縮の速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ とそれにより輸送されるスカラー場 $\theta(\mathbf{x}, t)$ は以下の方程式に従うとする。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_u, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + f_\theta, \quad (10)$$

ここで、 p は圧力、 $\rho = 1$ としてある。また \mathbf{f}_u と f_θ はそれぞれ外力とスカラーインプットであり低波数でのみ加えられるものとする。

LRA においては Lagrange 的位置関数 Ψ を導入する:

$$\Psi(\mathbf{y}, t | \mathbf{x}, t) = \delta^d(\mathbf{y} - \mathbf{z}(\mathbf{x}, s | t)). \quad (11)$$

ここで $\mathbf{z}(\mathbf{x}, s | t)$ は時刻 s に位置 \mathbf{x} いた流体粒子の時刻 t での位置を表す。 Ψ の従う方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla\right) \Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, s) = 0, \quad (12)$$

$$\Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (13)$$

一般化された速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, s|t)$ を、時刻 s に位置 \mathbf{x} いた流体粒子の時刻 t で測定された速度として定義する。 Ψ を用いれば

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, s|t) \equiv \int \Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, s) \mathbf{u}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (14)$$

と表すことが出来る。引数のうち、たて線の左側にある変数は時刻 s において流体粒子をマークすることから labeling time (coordinate), 左にある時刻を measuring time と呼ばれる。一般化されたスカラー場 $\theta(\mathbf{x}, s|t)$ は上で定義された流体粒子のもつ時刻 t でのスカラーの値として定義される。

スカラー場の方程式にたいする LRA では、2つの Lagrange 的な 2時刻相関関数

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', s) = \langle v_i(\mathbf{x}, s|t) v_j(\mathbf{x}', s|s) \rangle, \quad t \geq s \quad (15)$$

$$\Theta(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', s) = \langle \theta(\mathbf{x}, s|t) \theta(\mathbf{x}', s|s) \rangle, \quad t \geq s \quad (16)$$

と、応答関数

$$G_{ij}^v(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', s) \equiv \left\langle \frac{\delta v_i(\mathbf{x}, t|s)}{\delta f_j(\mathbf{x}', s)} \right\rangle, \quad (17)$$

$$G^\theta(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', s) \equiv \left\langle \frac{\delta \theta(\mathbf{x}, t|s)}{\delta f_\theta(\mathbf{x}', s)} \right\rangle. \quad (18)$$

が用いられる。

統計的一様性と等方性を仮定し、フーリエ変換を用いる。さらに定常性を仮定すれば、スカラースペクトル $F(k, t)$ に対する LRA 方程式は以下のように与えられる。^{5-7, 14} まず、

$$E(k, t) = \pi k Q(k, t, t), \quad F(k, t) = 2\pi k \Theta(k, t, t), \quad (19)$$

$$\int_0^\infty E(k, t) dk = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle. \quad (20)$$

と定義し、そして

$$2\kappa k^2 F(k) = T_\theta(k) + D_\theta(k), \quad (21)$$

$$T_\theta(k, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dq \int_{|k-q|}^{k+q} dp [T_\theta(k, p, q, t) + T_\theta(k, q, p, t)], \quad (22)$$

$$T_\theta(k, p, q) = \frac{4}{\pi} pq^{-2} \sin(p, q) D_{kpq} E(q) [kF(p) - qF(k)], \quad (23)$$

$$D_{kpq} = \int_0^\infty G^\theta(k, s) G^\theta(p, s) G^v(q, s) ds, \quad (24)$$

である。LRA では揺動散逸関係 (Fluctuation Dissipation relation)

$$Q(k, t, s) = G^v(k, t, s) Q(k, s, s), \quad t \geq s, \quad (25)$$

$$\Theta(k, t, s) = G^\theta(k, t, s) \Theta(k, s, s), \quad t \geq s, \quad (26)$$

が成立するので、 $\Theta(k, t, s)$ についての方程式を解く必要がない。ALHDA などと比べると、LRA の方程式が著しく単純化されていることがわかる。³ 応答関数は以下の式に従う。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 + \mu(k, t)\right) G^v(k, t) = 0, \quad G^v(k, t=0) = 1, \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa k^2\right) G^\theta(k, t) = 0, \quad G^\theta(k, t=0) = 1, \quad (28)$$

$$\mu(k, t) = k \int_0^\infty dq J_2(q/k) q^2 Q(q) \int_0^t ds G^v(q, s), \quad (29)$$

$$J_2(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(3x - x^3) & x \leq 1, \\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) & x > 1. \end{cases} \quad (30)$$

A. 粘性 - 対流領域

波数空間において、波数 k をよぎって低波数領域から高波数側へ輸送されるスカラーの総量 $\Pi(k)$ は

$$\Pi_\theta(k) = \int_k^\infty T_\theta(k') dk' \quad (31)$$

で与えられる。粘性 - 対流領域では波数間の相互作用が非局所的であり、また近似的に $G^\theta \approx 1$ であることを考慮すると、 $\Pi_\theta(k)$ は以下ようになる：¹⁵

$$\Pi_\theta(k) = -\frac{\pi^2}{2} k^3 \frac{\partial \Theta}{\partial k} \int_0^\infty dq q^3 Q(q) D_{kkq}. \quad (32)$$

応答関数を D_{kkq} に代入すると

$$\Pi_\theta(k) = -\frac{I_1}{8} k^3 \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\nu}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{F(k)}{k}\right), \quad (33)$$

$$I_1 = \kappa(\infty), \quad \kappa(\tau) \equiv \int_0^\tau f(\tau') d\tau', \quad (34)$$

$$f(\tau) = 2 \int_0^\infty q^2 E(q) G^v(q, \tau) dq / \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\nu}\right). \quad (35)$$

ただし、 $\tau = (\bar{\epsilon}/\nu)^{1/2} t$ である。粘性 - 対流領域で $\Pi_\theta(k) = \bar{\chi}$ とすれば

$$F(k) = C_{VC} \bar{\chi} \left(\frac{\nu}{\bar{\epsilon}}\right)^{1/2} k^{-1}, \quad C_{VC} = \frac{4}{I_1} \approx \sqrt{6}. \quad (36)$$

である。⁷

B. 遠拡散領域

粘性 - 対流領域が存在するときの遠拡散領域では、 $T_\theta(k)$ と拡散項が釣り合うことから、 $F(k) = \bar{\chi} \kappa^{-1} k_B^{-3} \bar{F}(\hat{k})$ と無次元化すると

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \hat{k}} \Lambda(\hat{k}) \left(\hat{k} \bar{F}(\hat{k}) - \frac{\hat{k}}{2} \frac{\partial}{\partial \hat{k}} \hat{k} \bar{F}(\hat{k}) \right) = 2 \hat{k}^2 \bar{F}(\hat{k}). \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{k}) &= 2 \int_0^\infty q^2 E(q) D_{kkq} dq / \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\nu}\right) \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left(G^\theta(\hat{k}, \tau)\right)^2 d\tau \approx \frac{1}{\beta + 2\hat{k}^2} \end{aligned} \quad (38)$$

となる。ここで $\hat{k} = k/k_B$, $k_B = (\bar{\epsilon}/\nu\kappa^2)^{1/4}$ である。境界条件は

$$\hat{k} \bar{F}(\hat{k}) \rightarrow 4/\Lambda(0) = C_{VC}, \quad \text{as } \hat{k} \rightarrow 0, \quad (39)$$

$$\hat{k} \bar{F}(\hat{k}) \rightarrow 0 \quad \text{as } \hat{k} \rightarrow \infty. \quad (40)$$

この方程式の解析解は知られていないが、 $\hat{k} \gg 1$ での漸近的振る舞いは

$$\bar{F}(\hat{k}) \propto \hat{k}^{-1-\delta} \exp(-2^{3/2}\hat{k}^2), \quad \delta = \frac{1}{2} + \sqrt{2}\beta, \quad (41)$$

となる。したがって、遠拡散領域における $F(k)$ は LRA によると、Gauss 的に減衰することがわかる。一方、速度場の時間相関がデルタ関数で与えられる場合には、 $A(\hat{k}) \approx 1/\beta$ となり遠拡散領域での $F(k)$ は指数関数的に減少する。^{7,11,18} 実際にこの DNS を実行してみると、 $F(k)$ は指数的に減少することが確かめられた。

III. DNS との比較

DNS はフーリエスペクトル法を用い、ベクトル並列計算機を用いて最大 4096² の解像度で行なわれた。^{8,16} 代表的なパラメータは以下のように定義されている。

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\langle \omega^2 \rangle, \quad \bar{\eta} = \nu \left\langle \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle, \quad R_\lambda \equiv \frac{\Omega^{3/2}}{\bar{\eta}}, \quad R_L = \frac{u_L L}{\nu} \sim \frac{\langle u^2 \rangle}{2\nu\bar{\eta}^{1/3}}. \quad (42)$$

各値は表 2 にまとめてある。

LRA の式にはエネルギースペクトル $E(k)$ が入っているので、DNS によりえられた定常状態の $E(k)$ を直接代入した。図 1 は DNS による $k^2 E(k)$ を示している。図 2 は (37) を数値的に解いて得られた $f(\tau)$ (細い実線) とその時間積分 (無次元化された渦拡散係数, 細い破線) を示している。図 3 は (37) を数値的に解いて得た LRA のスペクトル $\hat{k}\bar{F}(\hat{k})$ (太い破線) を DNS と比べたものである。両者とも低波数で平坦、即ち $F(k) \propto k^{-1}$ であることを示している。しかし、水平部分の LRA の値 C_{VC}^{LRA} は DNS の値 C_{VC}^{DNS} の半分以下である。DNS の値 C_{VC}^{DNS} は

$$5.03 (Pr = 20), \quad 4.98 (Pr = 100), \quad 5.11 (Pr = 1000), \quad (43)$$

と求められ、 C_{VC}^{DNS} は Pr にほとんど依存しないことがわかる。図 4 は遠拡散領域における $F(k)$ の比較である。横軸は $(k/k_B)^2$ である。図から LRA および DNS のスペクトルは直線的に減衰しているから、この領域での $F(k)$ は Gauss 的に減衰していることが確かめられる。しかし、LRA の減衰率は、DNS のそれと比べるとかなり大きいことがわかる。また DNS では、減衰率は Pr の増大と共にゆっくりと大きくなっていることが見て取れる。

IV. 代表変数

すでに見たように、LRA(ALHDIA) ではスカラー場のスペクトルに現われる普遍定数 B や C が実際の値より小さく見積る傾向にある。言葉を変えて言うと、LRA(ALHDIA) の計算ではスカラー場の波数空間での輸送が大きくなる傾向にある。一方、速度場のエネルギースペクトルの Kolmogorov 定数については LRA(ALHDIA) は 1.72(1.77) という実験値に近い値を出している。^{6,19} この物理的機構を理解するには、非線形項に現われている緩和時間 D_{kkq} を考えることが大事である。LRA ではスカラーについての 2 時刻相関と応答関数は分子拡散の影響によってのみ減衰する。このことは、 $\theta(\mathbf{x}, s|t)$ の measuring time についての時間発展が

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}, s|t)}{\partial t} = \kappa \int \Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, s) \nabla_y^2 \theta(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (44)$$

で与えられることからわかる。従って、 $\kappa \rightarrow 0$ の極限では $\Theta(k, t, s)$ や $G^0(k, t, s)$ は時間 $t-s$ について減衰しない。これは、Lagrange 的に見た場合もつともなことである (速度場の場合には圧力勾配の項があるために、相関は減衰する)。 D_{kkq} に含まれる時間積分は流体粒子の Lagrange 的軌跡に沿ってのものであり、無限の過去の歴史をすべて足し合わせることになるため、非線形相互作用による波数間のスカラー輸送を大きくする。この考察から、小さな流体要素内のスカラーの Lagrange 的相関を減衰させる物理的過程を正しく取り入れるならば、定量的に優れた近似理論を作ることが出来るであろうと考えられる。著者らはこれまで、いくつかの試みを行ってきた。以下に、短くその概略を示す。⁸

A. 局所的に Euler 的な代表変数

以下のような相関関数を考える。²⁰

$$\begin{aligned} \Theta^{(1)}(\mathbf{r}, t, s) &\equiv \langle \theta(\mathbf{x}, \mathbf{r}, s|t) \theta(\mathbf{x}, s|s) \rangle \\ &= \left\langle \int \Psi(\mathbf{y} - \mathbf{r}, t|\mathbf{x}, s) \theta(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \theta(\mathbf{x}, s) \right\rangle. \end{aligned} \quad (45)$$

時刻 $t = s$ では通常の Euler 的 2 点相関関数になる。(16) との違いは、局所的な座標 \mathbf{r} が導入されたことにある。即ち、 $L(\gg r)$ のスケールによる対流の効果は Ψ により抜き取られているが、 r と同程度のスケールを持った対流による混合により記憶が減衰する効果を取り入れられている。この代表変数は、Belinicher と L'vov²¹ による準 Lagrange 的な代表変数と似ているが、彼らのは特別に選んだ座標 \mathbf{r}_0 に依存するのに対し、(45) は全く依存しない。結果は、 $\kappa = 0$ でも確かに減衰する G_1^0 と実験値の 0.4 より大きな B_{IC} の値をもたらす。しかし、 $F(k, t)$ や G_1^0 の方程式はかなり複雑になる。

B. Lagrange 的なスカラー勾配による代表変数

スカラー場の勾配 $\theta_i(\mathbf{x}, t) = \partial\theta(\mathbf{x}, t)/\partial x_i$ の従う方程式は

$$\frac{D\theta_i}{Dt} = -\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\theta_j + \kappa\nabla^2\theta_i \quad (46)$$

で与えられる。ただし、話を簡単にするため $f_\theta = 0$ としてある。右辺に速度勾配とスカラー勾配の積があるので、この項が Lagrange 的な記憶の減衰効果をもたらすというのはいささか話である。そこで

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t, s) &\equiv \langle \theta_i(\mathbf{x}, s|t)\theta_j(\mathbf{x}', s|s) \rangle \\ &= \left\langle \int \Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, s)\theta_i(\mathbf{y}, t)d\mathbf{y} \theta_j(\mathbf{x}', s) \right\rangle \end{aligned} \quad (47)$$

というスカラー勾配の Lagrange 的相関関数をつくってみる。 $t - s$ が小さいときの振る舞いを見てみよう。いま定常状態にあって、 $\Theta_{ii}^{(2)}(t - s)$ を

$$\Theta_{ii}^{(2)}(0, t - s) = C_0 + C_1(t - s) + C_2(t - s)^2/2 + \dots \quad (48)$$

とテーラー展開する。 $t = s$ で速度場は Gaussian に従い、スカラー場と速度場は互いに統計的に独立であるとすると、係数は評価できて、 $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ となる。従って $\Theta_{ii}^{(2)}(0, t - s)$ は $O((t - s)^4)$ で変化する。一方、 $\langle \theta_i(\mathbf{x}, s|t)\theta_i(\mathbf{x}, s|t) \rangle$ は $(t - 2)^2$ で増加する(この増加は、 θ_i の方程式が無限小の線要素とよく似ており、線要素は平均して時間的に増大することからもうなずける)。 $\ln|\theta_i(\mathbf{x}, s|t)|$ は時間的に定常過程となるが、 $\theta_i(\mathbf{x}, s|t)$ はそうならない。これらのことを考慮すると、 $\Theta_{ij}^{(2)}(0, t, s)$ は大きな $t - s$ において十分小さくなっていない可能性が推測されるので、これを代表変数にとることは適当でないとした。

C. LRA 方程式を 4 次までとること

LRA では、展開パラメーターとして λ を (9) と (10) の非線形項の前に入れ、非線形項や相関関数を 0 次の相関関数で λ について展開する。そしてその展開式をひっくり返し、 λ の 2 次までをとることで方程式を閉じる。通常、 λ の高次にすすむことは大変計算量が多いので困難であるが、粘性 - 対流領域では、エネルギースペクトルが低波数に局在し、かつ $G^0 \approx 1$ とおけるので、 λ の高次にすすむことが出来る。4 次まで進んだ計算を試みた。確定的ではないが、4 次の補正は C_{VC} を小さくする方向になるものと見られる。労多くしてあまり芳しくないように推測されたので、この方法も取り上げないことにした。

D. 小さいスケールでの純粋なストレイン

適当に小さな流体要素とその内部に含まれているスカラー量の分布を考える。スカラーの分子拡散係数は無視できるとする。要素は流体の運動と共に流されてかつ回転を受けるであろう。しかしこれらの流体運動の影響は、適当なガリレイ変換とユニタリー変換で取り除くことができ、本質的には流体要素内でのスカラーの分布の変化には寄与しない。この流体要素内のスカラー分布を変化させるのは局所的な速度場の純粋な変形 (pure straining) による。

流体による対流と局所的な回転の効果を取り除くには以下のようにする。まず、Euler 的速度勾配を Lagrange 的速度勾配に写像した後、対称部分と反対称部分に分解する。^{10,22}

$$W_{ij}(\mathbf{x}, s|t) \equiv \int \Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, s) \frac{\partial u_i(\mathbf{y}, t)}{\partial y_j} d\mathbf{y}, \quad (49)$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W} + \mathbf{W}^T)/2 + (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T)/2 \equiv \mathbf{B} + \mathbf{A}. \quad (50)$$

ここで、上付き添え字 T は転置をあらわす。

$$B_{ij}(\mathbf{x}, s|t) = \frac{1}{2} \int \Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, s) \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) d\mathbf{y}, \quad (51)$$

$$A_{ij}(\mathbf{x}, s|t) = \frac{1}{2} \int \Psi(\mathbf{y}, t|\mathbf{x}, s) \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} - \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) d\mathbf{y}. \quad (52)$$

つぎに B のユニタリー変換を導入する:

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^T. \quad (53)$$

ここで \mathbf{U} は

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{U} \mathbf{A}, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{I} \quad (54)$$

に従う (\mathbf{I} は単位テンソル). このようにして定義された \mathbf{V} は, 対流による効果と回転の効果とをすっかり差し引いたものであるので, Lagrange 的な純粋ストレインとよぶことにする.

2つの連続した変換はシンボリックに

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}(\Psi * \mathbf{E})\mathbf{U}^T \equiv \mathcal{L} * \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)/2 \quad (55)$$

と表すことができる. \mathcal{L} は一般化された Lagrange 的位置関数であり, 任意の Euler 場を平行移動と回転により対応する Lagrange 場に写像する.

すでに導出した LRA の粘性-対流領域における方程式 (32) には

$$\left\langle \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, s|s+\tau)}{\partial x_j} \frac{\partial v_j(\mathbf{x}, s|s)}{\partial x_i} \right\rangle = 2 \int_0^\infty q^2 E(q) G^v(q, \tau) dq \quad (56)$$

という項が含まれている. しかし, 左辺は一般化された速度場の labeling 座標についての微分であり, 上で議論した Lagrange 的な純粋ストレイン場の相関ではない. この部分を Lagrange 的な純粋ストレイン場による相関関数

$$\langle V_{ij}(\mathbf{x}, s|t) V_{ji}(\mathbf{x}, s|s) \rangle \quad (57)$$

で置き換えるならば, 定量的に実際の値に近い結果を出すものと考えられる. 実際, 石原と金田は3次元乱流におけるスカラー場の粘性-対流領域の問題にこの相関関数を用い, $B_{VC} = 3.6$ を得た.^{10,17} これは, 実験値 3.6 ± 1.5 に十分近いといえる. 構成の仕方から, (57) はランダムガリレイ変換とランダムユニタリー変換に対して不変である.

スカラー場についての相関関数はそのままに ((16) と (18)) しておき, 速度勾配の Lagrange 的な相関関数を (57) で置き換える近似方法をここでは Rotation-Invariant strain based LRA (RI-LRA) と名付ける. LRA の精神に乗っ取ってスカラー場に対するスペクトル方程式を構成することは可能であるが, これは現実の問題への応用という観点からはあまり芳しくない. そこで, LRA の精神を引き継ぎつつ, より実用的な方法を用いる. 即ち, 一般化された Lagrange 的な位置関数を導入し, measuring time に関する動力学を扱い, かつ任意定数を導入しないという原則のもとで, より簡便な近似法を以下に展開する.

V. Lagrange 的な純粋ストレイン場の自己相関関数

まず Lagrange 的な純粋ストレイン場の自己相関関数 $\langle \text{Tr} \mathbf{V}(\mathbf{x}, s|s+t) \mathbf{V}(\mathbf{x}, s|s) \rangle$ の短い時間間隔における振る舞い

$$\langle \text{Tr} \mathbf{V}(\mathbf{x}, s|s+t) \mathbf{V}(\mathbf{x}, s|s) \rangle = C_0 + C_1 t + C_2 t^2/2 + \dots, \quad (58)$$

を求める. Tr はトレースを意味する. \mathbf{W} の定義と, Ψ と \mathbf{u} の方程式を用い, さらに速度場は時刻 $t = s$ で統計的に一様かつ等方的で Gaussian に従うとすると, 係数 C_0, C_1, C_2 はすべて, エネルギースペクトル $E(k)$ の関数として表現できる;²²

$$C_1 = -\nu \int_0^\infty k^4 E(k) dk, \quad (59)$$

$$C_2 = 2(C_{2A} + C_{2B}), \quad C_{2A} = -\frac{3}{2} \Omega^4, \quad C_{2B} = -\left(\frac{7}{4} - 4\sigma\right) \Omega^4, \quad (60)$$

$$\sigma = \int_0^\infty dp p^2 E(p) \int_0^p dq K(q/p) q^2 E(q) / \Omega^4, \quad (61)$$

$$K(x) = K(1/x) = b(b^2 - 1)^{3/2} - b^2(b^2 - 3/2), \quad b = (x + 1/x)/2. \quad (62)$$

さらに, 大きな時間間隔 t については

$$\langle \text{Tr} V(\mathbf{x}, s | s+t) V(\mathbf{x}, s | s) \rangle \approx \Omega^2 \exp\left(-c_1 \tau - \frac{c_2}{2} \tau^2\right), \quad \tau = (\bar{\epsilon}/\nu)^{1/2} t, \quad (63)$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2} R_\lambda}, \quad c_2 = \frac{13}{4} - 4\sigma. \quad (64)$$

と近似する. これにより, $f(\tau)$ やその時間積分を評価することができる.

$$I'_1 = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \approx \int_0^\infty \exp\left(-c_1 \tau - \frac{c_2}{2} \tau^2\right) d\tau. \quad (65)$$

いま, DNS により得られた $E(k)$ を用いるならば,

$$c_1 \approx 0.282, \quad c_2 \approx 2.06, \quad \sigma \approx 0.298, \quad (\text{run 3}) \quad (66)$$

という値を得る. これにより, $I'_1 = 0.762$ となるから C_{VC} は

$$C_{VC}^{RI-LRA} \approx 5.25 \quad (67)$$

となる. この値は DNS による値 $C_{VC}^{DNS} = 5.11$ に十分近い.

図3と4に実線で示したのは, (67) を境界条件 (39) に代入し, (37) を解いて得られた $\hat{k}\bar{F}(\hat{k})$ である. 実際, DNS との比較は満足 of いくものである. 遠拡散領域では $F(k)$ は Gauss 的に減衰している. 減衰係数は DNS と比べてやはり大きいままである. 図5は $\bar{F}(\hat{k})$ を示している. 粘性-対流領域における RI-LRA による $\bar{F}(\hat{k})$ は DNS との比較において, 満足 of いく結果を与える.

VI. まとめ

任意定数を全く含まず, システムティックな Lagrange 的スペクトル理論である LRA は, Pr の大小に応じて $F(k)$ の正しいスケージングを導くが, 定量的には, $F(k)$ に含まれる普遍定数を小さく見積る傾向がある. これを改善するためには, スカラー場の動力学をより適切に扱う物理量を導入することが本質的に重要であることを示した. 即ち, 流体粒子内部のスカラーの分布を変化させるのに最も重要なものは, 速度場から対流と回転の影響を抜き取った Lagrange 的純粋ストレイン場である. この場の Lagrange 的相関関数を代表変数にとることにより, ランダムガリレイ変換とランダムユニタリー変換に対して不変なスペクトル理論 (RI-LRA) を構成した. 粘性-対流領域における RI-LRA による $F(k)$ は DNS との比較において, 満足 of いく結果を与えた. しかし, 遠拡散領域における $F(k)$ は Gauss 的に減衰するものの, 理論による減衰係数は DNS のそれと比べて大きい. この違いは, 速度場の間欠性によるものと考えられるが, 今後さらに詳しい検討を必要とする.^{16,24}

有益な議論と助言を頂いた Herring 博士に感謝します. この研究は, 日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業, 計算科学からの援助を受けたものである.

-
- | | |
|--|---|
| [1] G. K. Batchelor: J. Fluid Mech. 5 , 113 (1959). | [13] J. R. Chasnov: Phys. Fluids. 10 , 1191 (1998). |
| [2] G. K. Batchelor, I. D. Howells and A. A. Townsend: J. Fluid Mech. 5 , (1959) 134. | [14] T. Gotoh, Y. Kaneda and N. Bekki: J. Phys. Soc. Jpn. 57 , 866 (1988). |
| [3] R. H. Kraichnan: Phys. Fluid. 8 , 575 (1965). | [15] R. H. Kraichnan: J. Fluid Mech. 47 , 525 (1971). |
| [4] R. H. Kraichnan: Phys. Fluid. 11 , 945 (1968). | [16] T. Gotoh: Phys. Rev. E 57 , 2984 (1998). |
| [5] Y. Kaneda: J. Fluid Mech. 107 , 131 (1981). | [17] J. R. Herring and R. H. Kraichnan: J. Fluid Mech. 91 , 581 (1979). |
| [6] Y. Kaneda: Phys. Fluids. 29 , 701 (1986). | [18] R. C. Mjolsness: Phys. Fluid. 18 , 1393 (1975). |
| [7] T. Gotoh: J. Phys. Soc. Jpn. 58 , 2365 (1989). | [19] R. H. Kraichnan: Phys. Fluid. 9 , 1728 (1966). |
| [8] T. Gotoh, J. Nagaki and Y. Kaneda: submitted to Phys. Fluids. (1999). | [20] T. Gotoh and Y. Kaneda: Proc. Japan Phys. Soc. Autumn (in Japanese), 4 , 126 (1986). |
| [9] R. J. Hill: J. Fluid Mech. 88 , 541 (1978). | [21] V. I. Belinicher and V. S. L'vov: Zh. Eksp. Theor. Fiz. 93 , 533 (1987) (Sov. Phys. JETP 66 , 303 (1987)). |
| [10] T. Ishihara and Y. Kaneda: J. Phys. Soc. Jpn. 62 , 506 (1993). | [22] T. Ishihara and Y. Kaneda: J. Phys. Soc. Jpn. 61 , |
| [11] R. H. Kraichnan: J. Fluid Mech. 64 , 737 (1974). | |
| [12] D. Bogucki, J. A. Domaradzki and P. K. Yeung: J. Fluid Mech. 343 , 111 (1997). | |

- 3547 (1992).
- [23] R. H. Kraichnan and J. R. Herring: *J. Fluid Mech.* **88**, 355 (1978).
- [24] S. Chen, G. Doolen, J. R. Herring, R. H. Kraichnan, S. A. Orszag and Z.-S. She: *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3051 (1993).
- [25] H. L. Grant, B. A. Hughes, W. M. Vogel and A. Moilliet: *J. Fluid Mech.* **34**, 423 (1968).
- [26] J. R. Chasnov, V. M. Canuto and R. S. Rogallo: *Phys. Fluids.* **31**, 2065 (1988).

TABLE I. Various constants for the passive scalar spectrum in three dimensions. †: Hill⁹, ‡: Grant *et al.*²⁵, * Chasnov *et al.*²⁶

	B_{IC}	B_{ID}	B_{VC}
Exp. or DNS	0.4~1.9 [†]	0.39±0.03 *	3.9±1.5 [‡]
ALHDIA ⁴	0.208	0.590	smaller than 0.9
SBALHDIA ¹⁷	-	-	2.0
LRA ^{6,7}	0.340	0.573	$\sqrt{10/3}$

TABLE II. DNS parameters and numerical values by the theories. N : resolution, k_{max} : maximum wavenumber, ν : kinematic viscosity,

	run1	run2	run3
Pr	20	100	1000
N	1024 ²	2048 ²	4096 ²
k_{max}	483	965	1931
ν	0.01	0.01	0.01
κ	5×10^{-4}	1×10^{-4}	1×10^{-5}
R_L	14.6	12.6	10.6
Ω	0.973	0.727	0.573
k_d	11.8	11.0	10.4
k_B	52.8	110	324
C_{VC}^{DNS}	5.03	4.98	5.11
σ	0.298	0.310	0.298
I_1	1.78	1.74	1.70
I_1'	0.785	0.787	0.762
C_{VC}^{LRA}	2.25	2.30	2.36
C_{VC}^{RI-LRA}	5.10	5.08	5.25

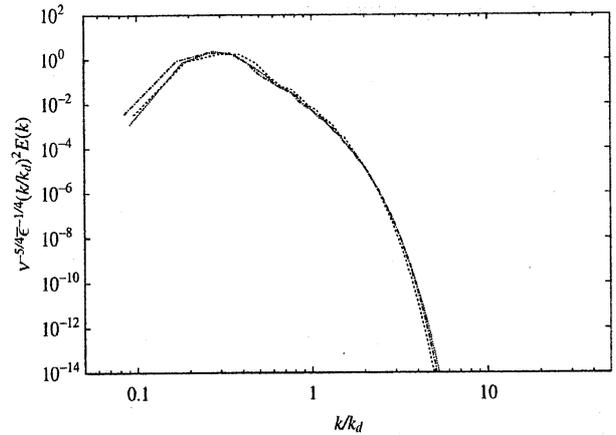


Fig.1 $\nu^{-5/4} \epsilon^{-1/4} (k/k_d)^2 E(k)$ by DNS. Dash dotted line: run 1, $R_L = 14.6$, dotted line: run 2, $R_L = 12.6$, dashed line: run3, $R_L = 10.6$.

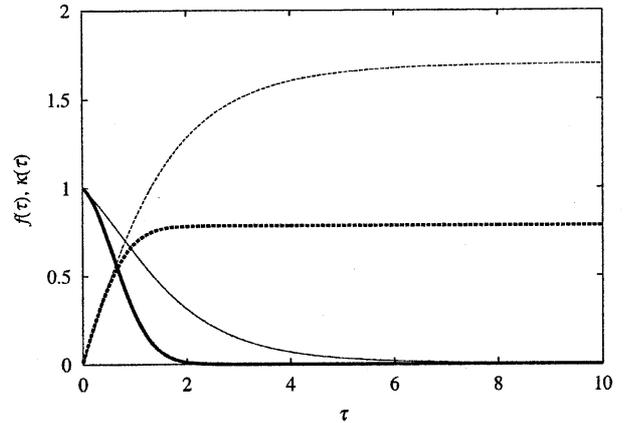


Fig.2 Comparison of $f(\tau)$ and $\kappa(\tau)$. Solid line: $f(\tau)$ by LRA, dashed line: $\kappa(\tau)$ by LRA. Heavy solid line: $f(\tau)$ by RI-LRA, heavy dashed line: $\kappa(\tau)$ by RI-LRA. Run 3, $R_L = 10.6$.

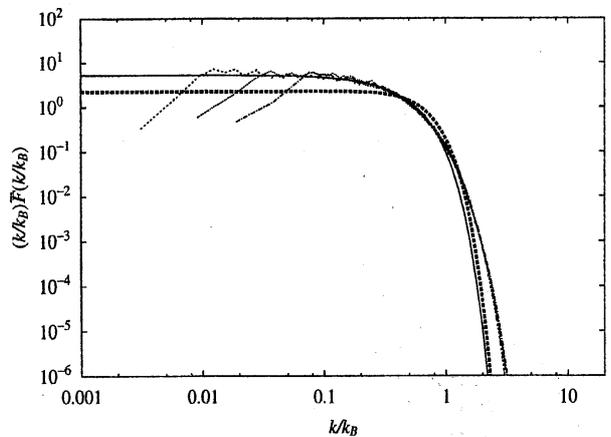


Fig.3 Comparison of $(k/k_B) \bar{F}(k/k_B)$, Solid line: RI-LRA, heavy dashed line: LRA. DNS; dash dotted line: $Pr = 20$, dotted line: $Pr = 100$, dashed line: $Pr = 1000$.

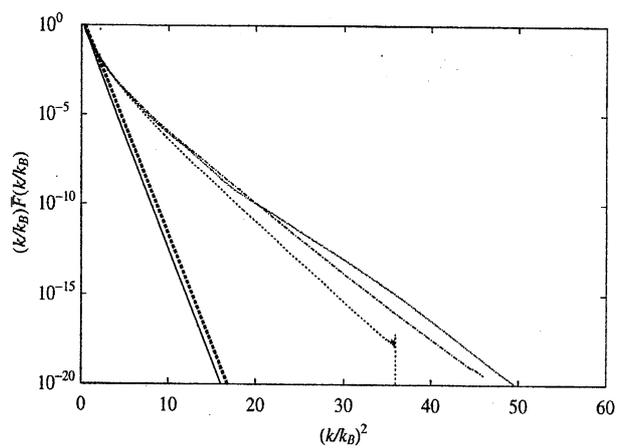


Fig.4 Plot of $(k/k_B)\bar{F}(k/k_B)$ against $(k/k_B)^2$. Solid line: RI-LRA, heavy dashed line: LRA, DNS; dash dotted line: $Pr = 20$, dotted line : $Pr = 100$, dashed line : $Pr = 1000$.

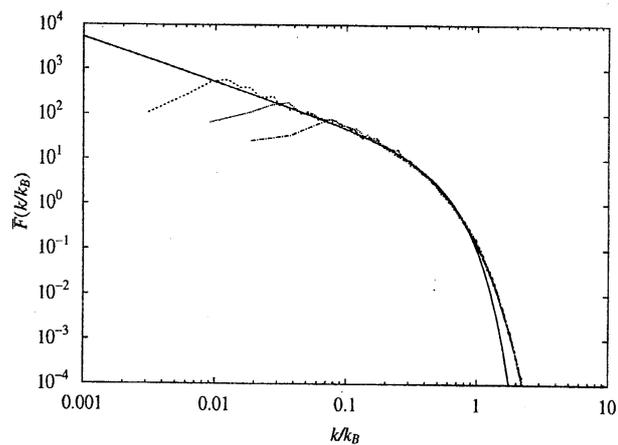


Fig.5 Comparison of $\bar{F}(k/k_B)$ with DNS. Solid line: RI-LRA, DNS; dash dotted line: $Pr = 20$, dotted line : $Pr = 100$, dashed line : $Pr = 1000$.