数理解析研究所講究録
1132 巻 2000 年 37-45

A Dual Fuzzy Dynamic Program for an Optimistic Decision Process

九工大・工　　藤田敏治 (Toshiharu Fujita)

1 はじめに

Bellman と Zadeh の論文 [3] 以来、ファジィ環境下における意思決定過程についてはさまざまな研究がなされてきた。彼らは、ファジィ環境下において 3 つのシステム — 確定的・確率的・ファジィ — を提案していたが、その中でファジィ推移システムに関しては、ほとんど触れていなかった。本報告では、そのファジィ推移システムを取りあげ、その上で楽観型評価を用いた場合の最適化問題を扱い、**連続埋め込み** ・ **最小埋め込み** の二つの手法で再帰式を導く。さらに、ある種の双対演算に基づく双対問題を定義する。そして、主問題と双対問題それぞれに対し再帰式を求め、それらの間に成り立つ双対関係を導く。

2 記号と定義

本論文において用いる記号等を定義する。

(i) $N \geq 2$ は**終端時刻**

(ii) $X = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$, $U = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ はそれぞれ **状態集合** および **決定集合**

(iii) $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \cdots, N+1)$, $u_n \in U$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ はそれぞれ時刻 n における**状態**および**決定**

(iv) $\nu_n : X \times U \to \mathbf{R}$ は 時刻 n における利得をあらわす $X \times U$ 上のファジィ集合 R_n の**メンバーシップ関数**

$$\nu_n(x_n, u_n) = \mu_{R_n}(x_n, u_n) \qquad n = 1, 2, \cdots, N$$

(v) $\xi : X \to \mathbf{R}$ は 終端利得をあらわす X 上のファジィ集合 T の**メンバーシップ関数**

$$\xi(x_{N+1}) = \mu_T(x_{N+1})$$

(vi) $\mu_n = \mu_n(x_{n+1}|x_n, u_n)$ は **ファジィ推移法則**。($0 \leq \mu(y|x, u) \leq 1$ $\forall(x, u, y) \in X \times U \times X$) これは、状態 x_n において決定 u_n を選んだ際、次の時点での状態をあらわすファジィ集合 $B(x_n, u_n)$ のメンバーシップ関数をあらわす：

$$\mu_n(x_{n+1}|x_n, u_n) = \mu_{B(x_n,u_n)}(x_{n+1}) \quad x_{n+1} \in X$$

すなわち、次の状態 x_{n+1} へ推移する度合が $\mu_n(x_{n+1}|x_n, u_n)$ で与えられることをあらわし、この推移を次の記法で表現する：

$$x_{n+1} \simeq \mu(\cdot|\, x_n, u_n)$$

なお、$a \in [0, 1]$ および、関数 f に対し

$$\overline{a} := 1 - a, \quad \overline{f} := 1 - f$$

と定義する。

3 Optimistic Decision Process

ファジィ推移システム上において、評価基準として楽観型評価を考える。すなわち、初期状態 x_1 が与えられたとき、ファジィ推移システムにしたがって得られる状態と決定の交互列：

$$x_1,\ u_1,\ x_2,\ u_2,\ \ldots,x_N,\ u_N,\ x_{N+1}$$

に対し、評価として

$$\nu_1(x_1,u_1)\vee\nu_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee\nu_N(x_N,u_N)\vee\xi(x_{N+1})$$

を考える。そして、システム全体としては、この楽観型評価のファジィ期待値：

$$\begin{aligned}&F^{\sigma}_{x_1}[\,\nu_1(x_1,u_1)\vee\nu_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee\nu_N(x_N,u_N)\vee\xi(x_{N+1})\,]\\ =&\bigvee_{(x_2,\ldots,x_{N+1})\in X^N}\{\,[\,\nu_1(x_1,u_1)\vee\nu_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee\nu_N(x_N,u_N)\vee\xi(x_{N+1})\,]\\ &\qquad\wedge[\,\mu_1(x_2|x_1,u_1)\wedge\mu_2(x_3|x_2,u_2)\wedge\cdots\wedge\mu_N(x_{N+1}|x_N,u_N)\,]\,\}\end{aligned}$$

を採用する。このとき、問題は次のように定式化される。

$$\begin{array}{lll}\text{Maximize} & F^{\sigma}_{x_1}[\nu_1(x_1,u_1)\vee\nu_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee\nu_N(x_N,u_N)\vee\xi(x_{N+1})] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n}\ \ x_{n+1}\simeq\mu_n(\cdot|\,x_n,u_n)\qquad 1\le n\le N & (1)\\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{n}\ \ u_n\in U\qquad 1\le n\le N & \end{array}$$

3.1 連続埋め込み

問題 (1) に対し、連続値パラメーター $\lambda_1\in[0,1]$ を導入した次の問題を考える：

$$\begin{array}{lll}\text{Maximize} & F^{\sigma}_{x_1}[\lambda_1\vee\nu_1(x_1,u_1)\vee\nu_2(x_2,u_2)\vee\cdots\vee\nu_N(x_N,u_N)\vee\xi(x_{N+1})] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n}\ \ x_{n+1}\simeq\mu_n(\cdot|\,x_n,u_n)\qquad 1\le n\le N & (2)\\ & (\mathrm{ii})_\mathrm{n}\ \ u_n\in U\qquad 1\le n\le N & \end{array}$$

そして、状態空間を $X\times[0,1]$ に拡大し、状態推移：

$$(x_n,\lambda_n)\in X\times[0,1]\quad\longrightarrow\quad(x_{n+1},\lambda_{n+1})\in X\times[0,1]$$

は次のように定める：

$$\begin{aligned}x_{n+1}&\simeq\mu_n(\cdot|\,x_n,u_n)\\ \lambda_{n+1}&=\lambda_n\vee\nu_n(x_n,u_n)\end{aligned}$$

このとき、問題 (2) を次の部分問題群に埋め込み、最適値をあらわす値関数を u^n とおく：

$$\begin{aligned}u^{N+1}(x_{N+1};\lambda_{N+1})&:=\lambda_{N+1}\vee\xi(x_{N+1})\qquad x_{N+1}\in X,\ \lambda_{N+1}\in[0,1]\\ u^n(x_n;\lambda_n)&:=\mathrm{Max}\,F^{\pi}_{x_n}[\lambda_n\vee\nu_n(x_n,u_n)\vee\cdots\vee\nu_N(x_N,u_N)\vee\xi(x_{N+1})\\ &\qquad\qquad|\,(\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m},\ n\le m\le N]\\ &\qquad x_n\in X,\ \lambda_n\in[0,1],\ 1\le n\le N.\end{aligned}$$

この u^n 間には、次の再帰式が成り立つことが示される。

定理 3.1 (再帰式)

$$u^{N+1}(x;\lambda) = \lambda \vee \xi(x) \quad x \in X,\ \lambda \in [0,\,1].$$

$$u^{n}(x;\lambda) = \operatorname*{Max}_{u\in U} \bigvee_{y\in X} \left[u^{n+1}(y;\lambda \vee \nu_n(x,u)) \wedge \mu_n(y|x,u) \right] \quad x \in X,\ \lambda \in [0,\,1],\quad n = 1,2,\cdots,N$$

メンバーシップ関数値の取り得る値の範囲から、$u^1(x_1;0)$ が元の問題 (1) の最適値を与えることがわかる。

また、この再帰式により得られたマルコフ政策 $\pi = \{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N\}$ は拡大状態空間 $X\times[0,1]$ で定義されたもので、

$$\pi_n : X \times [0,1] \to U \quad n = 1,2,\cdots,N$$

各マルコフ政策 π は、問題 (1) に対する一般政策 $\sigma = \{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N\}$ を次のように生成する：

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 := 0\\
&\sigma_1(x_1) := \pi_1(x_1;\lambda_1) =: u_1\\
&\lambda_2 := \lambda_1 \vee \nu_1(x_1,u_1)\\
&\sigma_2(x_1,x_2) := \pi_2(x_2;\lambda_2) =: u_2\\
&\lambda_3 := \lambda_2 \vee \nu_2(x_2,u_2)\\
&\sigma_3(x_1,x_2,x_3) := \pi_3(x_3;\lambda_3) =: u_3\\
&\qquad\vdots\\
&\lambda_N := \lambda_{N-1} \vee \nu_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1})\\
&\sigma_N(x_1,x_2,\ldots,x_N) := \pi_N(x_N;\lambda_N).
\end{aligned} \tag{3}$$

この関係を用いて、問題 (1) に対する最適政策を構成することができる。

数値例

次の、3 状態・2 決定・2 段の問題を考える：

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & F^{\sigma}_{x_1}[\,\nu_1(u_1) \vee \nu_2(u_2) \vee \xi(x_3)\,] & \\
\text{subject to} & (\mathrm{i})_{\mathrm{n}}\ \ x_{n+1} \simeq \mu(\cdot|\,x_n,u_n) & n = 1,2. \\
 & (\mathrm{ii})_{\mathrm{n}}\ \ u_n \in \{a_1,a_2\} &
\end{array}$$

$$\xi(s_1) = 0.7,\quad \xi(s_2) = 0.5,\quad \xi(s_3) = 1.0$$
$$\nu_2(a_1) = 0.6,\quad \nu_2(a_2) = 0.9;\qquad \nu_1(a_1) = 0.8,\quad \nu_1(a_2) = 0.5$$

$\mu(x_{t+1}|x_t,a_1)$

$x_t \setminus x_{t+1}$	s_1	s_2	s_3
s_1	0.5	0.5	0.4
s_2	0.6	1.0	0.6
s_3	0.7	0.4	0.6

$\mu(x_{t+1}|x_t,a_2)$

$x_t \setminus x_{t+1}$	s_1	s_2	s_3
s_1	0.9	0.7	1.0
s_2	0.7	0.4	0.5
s_3	0.7	0.5	0.9

まず $u^3(x;\lambda)=\lambda\vee\xi(x)$ を計算すると

$$u^3(s_1;\lambda)=\lambda\vee 0.7,\quad u^3(s_2;\lambda)=\lambda\vee 0.5,\quad u^3(s_3;\lambda)=\lambda\vee 1.0=1.0$$

次に

$$u^2(x;\lambda)=\operatorname*{Max}_u\bigvee_y[\,u^3(y;\lambda\vee\nu_2(u))\wedge\mu(y|x,u)\,]$$

に対し、例えば $x=s_2$ の場合を計算すると

$$\begin{aligned}
u^2(s_2;\lambda) &= [\,(((\lambda\vee 0.6)\vee 0.7)\wedge 0.6)\vee(((\lambda\vee 0.6)\vee 0.5)\wedge 1.0)\vee(1.0\wedge 0.6)\,]\\
&\quad \vee[\,(((\lambda\vee 0.9)\vee 0.7)\wedge 0.7)\vee(((\lambda\vee 0.9)\vee 0.5)\wedge 0.4)\vee(1.0\wedge 0.5)\,]\\
&= [\,0.6\vee(\lambda\vee 0.6)\vee 0.6\,]\vee[\,0.7\vee 0.4\vee 0.5\,]\\
&= [\,\lambda\vee 0.6\,]\vee[\,0.7\,]\\
&= \begin{cases} 0.7 & \text{for }\ 0.0\le\lambda\le 0.7\\ \lambda & \text{for }\ 0.7\le\lambda\le 1.0\end{cases}
\end{aligned}$$

最適決定は

$$\pi_2^*(s_2;\lambda)=\begin{cases} a_2 & \text{for }\ 0.0\le\lambda\le 0.7\\ a_1 & \text{for }\ 0.7\le\lambda\le 1.0\end{cases}$$

で与えられる。

同様に $u^2(s_1;\lambda)$, $u^2(s_3;\lambda)$ および $u^1(x;\lambda), x=s_1,s_2,s_3$ を求めると

$$u^2(s_1;\lambda)=1.0,\quad \pi_2^*(s_1;\lambda)=a_2\quad \text{for }\ 0.0\le\lambda\le 1.0$$

$$u^2(s_3;\lambda)=0.9,\quad \pi_2^*(s_3;\lambda)=a_2\quad \text{for }\ 0.0\le\lambda\le 1.0$$

$$u^1(s_1;\lambda)=0.9,\quad \pi_1^*(s_1;\lambda)=a_2\quad \text{for }\ 0.0\le\lambda\le 1.0$$

$$u^1(s_1;\lambda)=\lambda\vee 0.8,\quad \pi_1^*(s_1;\lambda)=a_1\quad \text{for }\ 0.0\le\lambda\le 1.0$$

$$u^1(s_3;\lambda)=0.9,\quad \pi_1^*(s_3;\lambda)=a_2\quad \text{for }\ 0.0\le\lambda\le 1.0$$

これより、各初期状態 $x_1=s_1,s_2,s_3$ に応じて、最適値

$$\begin{aligned} u^1(s_1;0)&=0.9\\ u^1(s_2;0)&=0.8\\ u^1(s_3;0)&=0.9\end{aligned}$$

を得る。また、(3) を用いることにより、最適政策

$$\sigma_1^*(s_1)=a_2,\quad \sigma_1^*(s_2)=a_1,\quad \sigma_1^*(s_3)=a_2$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_2^*(s_1,s_1)=a_2,\quad \sigma_2^*(s_2,s_1)=a_2,\quad \sigma_2^*(s_3,s_1)=a_2\\
&\sigma_2^*(s_1,s_2)=a_2,\quad \sigma_2^*(s_2,s_2)=a_1,\quad \sigma_2^*(s_3,s_2)=a_2\\
&\sigma_2^*(s_1,s_3)=a_2,\quad \sigma_2^*(s_2,s_3)=a_2,\quad \sigma_2^*(s_3,s_3)=a_2.
\end{aligned}$$

を得る。 □

3.2 最小埋め込み

ここでは、3.1 節における連続値パラメーター λ_n の取り得る値を、必要最小の集合に限定することを考える。まず、履歴値関数 (past-value functions) を次式で定義する:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 := 0\\
&\lambda_n(x_1,u_1,\ldots,x_{n-1},u_{n-1}) := 0 \vee \nu_1(x_1,u_1) \vee \cdots \vee \nu_{n-1}(x_{n-1},u_{n-1}) \quad 2 \le n \le N+1
\end{aligned}$$

次に、履歴値空間 (past-value space) を次式で定義する:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &:= \{0\}\\
\Lambda_n &:= \{0 \vee \nu_1(x_1,u_1) \vee \cdots \vee \nu_{n-1}(x_{n-1},u_{n-1})\\
&\qquad\qquad | \, (x_1,u_1,\ldots,x_{n-1},u_{n-1}) \in X{\times}U{\times}\cdots{\times}X{\times}U\} \quad 2 \le n \le N+1
\end{aligned}$$

このとき、連続値パラメーター λ_n の取る値は、履歴値関数 $\lambda_n(\cdot)$ の値であり、その全体を表わすものが Λ_n である。また、

$$\begin{aligned}
&\nu_1(x_1,u_1) \vee \nu_2(x_2,u_2) \vee \nu_3(x_3,u_3) \vee \cdots \vee \nu_N(x_N,u_N) \vee \xi(x_{N+1})\\
&= 0 \vee \nu_1(x_1,u_1) \vee \nu_2(x_2,u_2) \vee \nu_3(x_3,u_3) \vee \cdots \vee \nu_N(x_N,u_N) \vee \xi(x_{N+1})\\
&= \lambda_2(x_1,u_1) \vee \nu_2(x_2,u_2) \vee \nu_3(x_3,u_3) \vee \cdots \vee \nu_N(x_N,u_N) \vee \xi(x_{N+1})\\
&= \lambda_3(x_1,u_1,x_2,u_2) \vee \nu_3(x_3,u_3) \vee \cdots \vee \nu_N(x_N,u_N) \vee \xi(x_{N+1})\\
&\qquad \vdots\\
&= \lambda_N(x_1,u_1,x_2,u_2,\ldots,x_{N-1},u_{N-1}) \vee \nu_N(x_N,u_N) \vee \xi(x_{N+1})\\
&= \lambda_{N+1}(x_1,u_1,x_2,u_2,\ldots,x_N,u_N) \vee \xi(x_{N+1})
\end{aligned}$$

という関係から、ただちに任意の $(x_n,u_n) \in X{\times}U$ に対し、次の関係が導かれる：

$$\Lambda_n \ni \lambda_n \longrightarrow \lambda_n \vee \nu_n(x_n,u_n) =: \lambda_{n+1} \in \Lambda_{n+1}.$$

これより、Λ_n に関する再帰的関係として、次の補題を得る。

補題 3.1

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \{0\}\\
\Lambda_{n+1} &= \{\lambda_n \vee \nu_n(x_n,u_n) \,|\, \lambda_n \in \Lambda_n, (x_n,u_n) \in X{\times}U\} \quad 1 \le n \le N
\end{aligned}$$

ここで、λ_n の取り得る範囲を Λ_n に限定した部分問題群：

$$\begin{aligned}
u^{N+1}(x_{N+1};\lambda_{N+1}) &:= \lambda_{N+1} \vee \xi(x_{N+1}) \qquad x_{N+1} \in X,\ \lambda_{N+1} \in \Lambda_{N+1}\\
u^n(x_n;\lambda_n) &:= \mathrm{Max}\, F^{\pi}_{x_n}[\lambda_n \vee \nu_n(x_n,u_n) \vee \cdots \vee \nu_N(x_N,u_N) \vee \xi(x_{N+1})\\
&\qquad\qquad | \, (\mathrm{i})_{\mathrm{m}},\ (\mathrm{ii})_{\mathrm{m}},\ n \le m \le N]\\
&\qquad x_n \in X,\ \lambda_n \in \Lambda_n,\ 1 \le n \le N.
\end{aligned}$$

を考えると、次の再帰式が成り立ち：

定理 3.2 (再帰式)

$$u^{N+1}(x;\lambda) = \lambda \vee \xi(x) \quad x \in X,\ \lambda \in \Lambda_{N+1}$$

$$u^n(x;\lambda) = \mathop{\mathrm{Max}}_{u\in U} \bigvee_{y\in X} \left[u^{n+1}(y;\lambda \vee \nu_n(x,u)) \wedge \mu_n(y|x,u) \right]$$

$$x \in X,\ \lambda \in \Lambda_n,\quad n = 1, 2, \cdots, N$$

やはり、$u^1(x_1;0)$ が元の問題 (1) の最適値を与えることが示される。

数値例

3.1 節の数値例に対し最小埋め込みを適用する。履歴値空間を求めると

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \{\,0\,\}\\
\Lambda_2 &= \{\,\lambda_1 \vee \nu_1(u_1)\,|\,\lambda_1 \in \Lambda_1, u_1 = a_1, a_2\,\}\\
&= \{\,0 \vee \nu_1(a_1),\ 0 \vee \nu_1(a_2)\,\} = \{\,0 \vee 0.8,\ 0 \vee 0.5\,\} = \{\,0.8,\ 0.5\,\}\\
\Lambda_3 &= \{\,\lambda_2 \vee \nu_2(u_2)\,|\,\lambda_2 \in \Lambda_2, u_2 = a_1, a_2\,\}\\
&= \{\,0.8 \vee 0.6,\ 0.8 \vee 0.9, 0.5 \vee 0.6,\ 0.5 \vee 0.9\,\} = \{\,0.6,\ 0.8,\ 0.9\,\}
\end{aligned}$$

これらを用いて再帰式を計算していく。まず $u^3(x;\lambda) = \lambda \vee \xi(x)$ を計算すると

$$u^3(s_1;\lambda) = \lambda \vee 0.7 = \begin{cases} 0.7 & (\lambda = 0.6)\\ 0.7 & (\lambda = 0.8)\\ 0.9 & (\lambda = 0.9)\end{cases},\quad u^3(s_2;\lambda) = \lambda \vee 0.5 = \begin{cases} 0.6 & (\lambda = 0.6)\\ 0.8 & (\lambda = 0.8)\\ 0.9 & (\lambda = 0.9)\end{cases}$$

$$u^3(s_3;\lambda) = \lambda \vee 1.0 = 1.0\ (\lambda = 0.6,\ 0.8,\ 0.9)$$

また、$\lambda_2 = 0.5$ のとき $0.5 \vee \nu_2(a_1) = 0.5 \vee 0.6 = 0.6,\ 0.5 \vee \nu_2(a_2) = 0.5 \vee 0.9 = 0.9$ より

$$\begin{aligned}
u^2(s_1;0.5) &= [\,(u^3(s_1;0.6) \wedge 0.5) \vee (u^3(s_2;0.6) \wedge 0.5) \vee (u^3(s_3;0.6) \wedge 0.4)\,]\\
&\qquad \vee [\,(u^3(s_1;0.9) \wedge 0.9) \vee (u^3(s_2;0.9) \wedge 0.7) \vee (u^3(s_3;0.9) \wedge 1.0)\,]\\
&= [\,(0.7 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.5) \vee (1.0 \wedge 0.4)\,]\\
&\qquad \vee [\,(0.9 \wedge 0.9) \vee (0.9 \wedge 0.7) \vee (1.0 \wedge 1.0)\,]\\
&= [\,0.5 \vee 0.5 \vee 0.4\,] \vee [\,0.9 \vee 0.7 \vee 1.0\,] = [\,0.5\,] \vee [\,1.0\,] = 1.0\\
\pi_2^*(s_1;0.5) &= a_2\\
u^2(s_2;0.5) &= [\,(0.7 \wedge 0.6) \vee (0.6 \wedge 1.0) \vee (1.0 \wedge 0.6)\,]\\
&\quad \vee [\,(0.9 \wedge 0.7) \vee (0.9 \wedge 0.4) \vee (1.0 \wedge 0.5)\,]\\
&= [\,0.6 \vee 0.6 \vee 0.6\,] \vee [\,0.7 \vee 0.4 \vee 0.5\,] = [\,0.6\,] \vee [\,0.7\,] = 0.7\\
\pi_2^*(s_2;0.5) &= a_2
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

(以下省略) □

4 Dual Fuzzy Dynamic Program

問題 (1) に対する**双対問題**を次で定義する：

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \overline{F}^{\sigma}[\,\overline{\nu_1}(x_1,u_1)\wedge\overline{\nu_2}(x_2,u_2)\wedge\cdots\wedge\overline{\nu_N}(x_N,u_N)\wedge\overline{\xi}(x_{N+1})\,] & \\ \text{subject to} & \text{(i)}'_{\rm n}\quad x_{n+1}\simeq\overline{\mu_n}(\cdot|\,x_n,u_n)\quad 1\le n\le N & (4)\\ & \text{(ii)}_{\rm n}\quad u_n\in U\quad 1\le n\le N & \end{array}$$

ただし、

$$\begin{aligned} &\overline{F}^{\sigma}[\,\overline{\nu_1}(x_1,u_1)\wedge\overline{\nu_2}(x_2,u_2)\wedge\cdots\wedge\overline{\nu_N}(x_N,u_N)\wedge\overline{\xi}(x_{N+1})\,]\\ =&\bigwedge_{(x_2,\ldots,x_{N+1})\in X^N}\{\,[\,\overline{\nu_1}(x_1,u_1)\wedge\overline{\nu_2}(x_2,u_2)\wedge\cdots\wedge\overline{\nu_N}(x_N,u_N)\wedge\overline{\xi}(x_{N+1})\,]\\ &\qquad\vee[\,\overline{\mu_1}(x_2|x_1,u_1)\vee\overline{\mu_2}(x_3|x_2,u_2)\vee\cdots\vee\overline{\mu_N}(x_{N+1}|x_N,u_N)\,]\,\}. \end{aligned}$$

である。以後、双対問題 (4) に対し、問題 (1) を主問題と呼ぶこととする。

双対問題 (4) に対し、まず、連続埋め込みによる再帰式を導く。主問題と同様に、連続値パラメーター $\lambda_n(\in[0,1])$ を加えた部分問題群を考える：

$$\begin{aligned} U^{N+1}(x_{N+1};\lambda_{N+1}) &:= \lambda_{N+1}\wedge\xi(x_{N+1}) \qquad x_{N+1}\in X,\ \lambda_{N+1}\in[0,\,1]\\ U^{n}(x_n;\lambda_n) &:= \min\overline{F}^{\pi}_{x_n}[\,\lambda_n\wedge\overline{\nu_n}(x_n,u_n)\wedge\cdots\wedge\overline{\nu_N}(x_N,u_N)\wedge\overline{\xi}(x_{N+1})\\ &\qquad\qquad |\,\text{(i)}'_{\rm m},\ \text{(ii)}_{\rm m}\quad n\le m\le N\,]\\ &\qquad\qquad x_n\in X,\ \ \lambda_n\in[0,\,1],\ 1\le n\le N. \end{aligned}$$

このとき、次の再帰式を得る。

定理 4.1 (再帰式)

$$U^{N+1}(x;\lambda)=\lambda\wedge\overline{\xi}(x)\qquad x\in X\qquad \lambda\in[0,1].$$

$$U^{n}(x;\lambda)=\min_{u\in U}\bigwedge_{y\in X}\left[U^{n+1}(y;\lambda\wedge\overline{\nu_n}(x,u))\vee\overline{\mu_n}(y|x,u)\right]\qquad x\in X,\ \lambda\in[0,\,1],\quad n=1,2,\cdots,N$$

さらに、主問題と双対問題の間に次の双対的関係が得られる。

定理 4.2 (双対定理) 主問題 (1) と双対問題 (4) に対する埋め込み問題の最適値関数 u_n および U_n について、次の関係が成り立つ：

$$\overline{U^n}(x;\lambda)=u^n(x;\overline{\lambda})\qquad \forall x\in X,\ \ \lambda\in[0,1],\ \ 1\le n\le N+1$$

次に、双対問題 (4) への最小埋め込みの適用を考える。双対問題に対する、履歴値関数および履歴値空間は次式で与えられ

$$\begin{aligned} &\lambda'_1 := 0\\ &\lambda'_n(x_1,u_1,\ldots,x_{n-1},u_{n-1}) := 1\wedge\overline{\nu}_1(x_1,u_1)\wedge\cdots\wedge\overline{\nu}_{n-1}(x_{n-1},u_{n-1})\quad 2\le n\le N+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &:= \{1\}\\ \Lambda'_n &:= \{1\wedge\overline{\nu}_1(x_1,u_1)\wedge\cdots\wedge\overline{\nu}_{n-1}(x_{n-1},u_{n-1})\\ &\qquad |\,(x_1,u_1,\ldots,x_{n-1},u_{n-1})\in X\times U\times\cdots\times X\times U\}\quad 2\le n\le N+1 \end{aligned}$$

次の再帰的関係を持つ：

補題 4.1

$$\begin{aligned}\Lambda'_1 &= \{1\} \\ \Lambda'_{n+1} &= \{\lambda_n \wedge \overline{\nu}_n(x_n, u_n) \,|\, \lambda_n \in \Lambda'_n, (x_n, u_n) \in X \times U\} \quad 1 \le n \le N\end{aligned}$$

さらに、λ_n の取り得る値の範囲を Λ'_n に限定した再帰式が成り立つ。

定理 4.3 (再帰式)

$$U^{N+1}(x;\lambda) = \lambda \wedge \overline{\xi}(x) \qquad x \in X \quad \lambda \in \Lambda'_1.$$

$$U^n(x;\lambda) = \min_{u \in U} \bigwedge_{y \in X} \left[U^{n+1}(y; \lambda \wedge \overline{\nu_n}(x,u)) \vee \overline{\mu_n}(y|x,u) \right]$$

$$x \in X,\ \lambda \in \Lambda'_n, \quad n = 1, 2, \cdots, N$$

そして、やはり主問題と双対問題の部分問題間の双対的関係、および Λ_n と Λ'_n の間の双対的関係が導かれる。

系 4.1 (双対定理)

$$\overline{U^n}(x;\lambda) = u^n(x;\overline{\lambda}) \qquad \forall x \in X,\ \lambda \in \Lambda'_n,\ 1 \le n \le N+1$$

$$\Lambda'_n = \{\, \overline{\lambda} \,|\, \lambda \in \Lambda_n\} \qquad 1 \le n \le N$$

数値例

3.1 節の数値例に対する双対問題は次で与えられる。

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \overline{F}^{\sigma}_{x_1}[\,\overline{\nu_1}(u_1) \wedge \overline{\nu_2}(u_2) \wedge \overline{\xi}(x_3)\,] & \\ \text{subject to} & \text{(i)}_\text{n}\ \ x_{n+1} \simeq \overline{\mu}(\cdot |\, x_n, u_n) & n = 1, 2. \\ & \text{(ii)}_\text{n}\ \ u_n \in \{a_1, a_2\} & \end{array}$$

$$\overline{\xi}(s_1) = 0.3, \quad \overline{\xi}(s_2) = 0.5, \quad \overline{\xi}(s_3) = 0.0$$

$$\overline{\nu_2}(a_1) = 0.4, \quad \overline{\nu_2}(a_2) = 0.1\,; \qquad \overline{\nu_1}(a_1) = 0.2, \quad \overline{\nu_1}(a_2) = 0.5$$

$\overline{\mu}(x_{t+1}|x_t, a_1)$

$x_t \diagdown x_{t+1}$	s_1	s_2	s_3
s_1	0.5	0.5	0.6
s_2	0.4	0.0	0.4
s_3	0.3	0.6	0.4

$\overline{\mu}(x_{t+1}|x_t, a_2)$

$x_t \diagdown x_{t+1}$	s_1	s_2	s_3
s_1	0.1	0.3	0.0
s_2	0.3	0.6	0.5
s_3	0.3	0.5	0.1

□

References

[1] J.F. Baldwin and B.W. Pilsworth, Dynamic programming for fuzzy systems with fuzzy environment, J. Math. Anal. Appl. **85**(1982), 1-23.

[2] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[3] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, Management Sci. **17**(1970), B141-B164.

[4] R.E. Bellman and E.D. Denman, *Invariant Imbedding*, Lecture Notes in Operation Research and Mathematical Systems, Vol.52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[5] R.E. Bellman and E.D. Denman, *Invariant Imbedding*, Proceedings of the Summer Workshop on Invariant Imbedding, Held at the University of Southern California, June - August 1970, Lecture Notes in Operation Research and Mathematical Systems Vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[6] A.O. Esogbue and R.E. Bellman, Fuzzy dynamic programming and its extensions, TIMS/Studies in the Management Sciences **20**(1984), 147-167.

[7] S. Iwamoto and T. Fujita, Stochastic decision-making in a fuzzy environment, J. Oper. Res. Soc. Japan, **38**(1995), No.4, 467-482.

[8] S. Iwamoto, Associative dynamic programs, J. Math. Anal. Appl. **201**(1996), No.1, 195-211.

[9] S. Iwamoto, Decision-making in Fuzzy Environment: A survey from stochastic decision process, Ed. L.C. Jain and R.K. Jain, Proceedings of The Second International Conference on Knowledge-based Intelligent Electronics Systems (KES '98), Adelaide, 1998, pp.542-546.

[10] S. Iwamoto and M. Sniedovich, Sequential decision making in fuzzy environment, J. Math. Anal. Appl. **222**(1998), No.1, 208-224.

[11] J. Kacprzyk, Decision-making in a fuzzy environment with fuzzy termination time, Fuzzy Sets and Systems. **1**(1978), 169-179.

[12] J. Kacprzyk and A.O. Esogbue, Fuzzy dynamic programming: Main developments and applications, Fuzzy Sets and Systems **81**(1996), 31-45.

[13] J. Kacprzyk and P. Staniewski, A new approach to the control of stochastic systems in a fuzzy environment, Archiwum Automatyki i Telemechaniki **25**(1980), 443-444.

[14] E.S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, Academic Press, NY, 1968.

[15] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Deckker, NY, 1992.

[16] W.E. Stein, Optimal stopping in a fuzzy environment, Fuzzy Sets and Systems. **3**(1980), 253-259.