数理解析研究所講究録
1133巻 2000年 117-123

Painlevé型 hierarchy の affine Weyl 群対称性

野海正俊 (Noumi Masatoshi) 神戸大・自然科学
山田泰彦 (Yamada Yasuhiko) 神戸大・自然科学

1. 対称形式

対称形式で書いた Painlevé 方程式 P_{IV} は, 次の微分方程式であった.

$$\begin{aligned} f_0' &= f_0(f_1 - f_2) + \alpha_0, \\ f_1' &= f_1(f_2 - f_0) + \alpha_1, \\ f_2' &= f_2(f_0 - f_1) + \alpha_2. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで f_0, f_1, f_2 が未知函数, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ はパラメータで $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ を満たすものとし, $' = d/dx$ とする. 方程式と整合的に $f_0 + f_1 + f_2 = x$ とできて, これより f_1, f_2 を消去すれば $y = f_0$ についての 2 階の方程式

$$y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 - 2ty^2 + (\frac{t^2}{2} + \alpha_1 - \alpha_2)y - \frac{\alpha_0^2}{2y}, \tag{2}$$

を得る. x, y を適当にスケール変換すれば, 通常の P_{IV} 方程式になる.

対称形式における Bäcklund 変換変換 s_0, s_1, s_2, π は次であたえられた.

$$\begin{aligned} &s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \quad s_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i \ \ (j = i \pm 1), \quad \pi(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \\ &s_i(f_i) = f_i, \quad s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i}{f_i} \ \ (j = i \pm 1), \quad \pi(f_j) = f_{j+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで, 添字は $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ の元と見ている. これらの変換は微分方程式を不変に保ち, 次の関係式を満たす.

$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_{i\pm1})^3 = 1, \quad \pi^3 = 1, \quad \pi s_j = s_{j+1}\pi. \tag{4}$$

この系は $A_2^{(1)}$ のルート系に対応するが, 同様の方程式を他のルート系にも拡張することができて, 例えば $A_{2n}^{(1)}$ については, 次のような方程式が考えられる.

$$f_j' = \Big(\sum_{1\le r\le n} f_{j+2r-1} - \sum_{1\le r\le n} f_{j+2r}\Big) + \alpha_j. \tag{5}$$

本稿では, これらの方程式の Lax 形式を考えて, さらにその一般化を進める. 簡単のため, $A_2^{(1)}$ の場合で記述しよう.

2 Lax 形式

次の方程式系を考える[1].

$$z\frac{\partial}{\partial z}\psi = M\psi, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = B\psi, \tag{7}$$

$$s_i\psi = G_i\psi. \tag{8}$$

ここで, M, B, G_i は, 次のような行列とする.

$$M = \begin{pmatrix} -v_1 & f_1 & -1 \\ & -v_2 & f_2 \\ & & -v_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} & & \\ -1 & & \\ f_0 & -1 & \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$B = \begin{pmatrix} g_2 & 1 & \\ & g_0 & 1 \\ & & g_1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$G_i = 1 - \frac{\alpha_i}{f_i}E_i, \tag{11}$$

ただし, $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, $\alpha_1 = v_1 - v_2$, $\alpha_2 = v_2 - v_3$, $\alpha_0 = 1 + v_3 - v_1$, $g_i = f_i - \frac{x}{3}$. また,

$$E_1 = \begin{pmatrix} & & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad E_0 = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}. \tag{12}$$

本論の趣旨は, これらの方程式 (6-8) が両立する, ということに尽きる.

方程式 (6),(7) の両立条件として, 方程式 (1) が得られる. 方程式 (6) は, 原点確定, 無限遠点不確定の線型微分方程式であり, (7) はその monodromy 保存変形を与えていると見ることができる. 方程式 (6) と (8) との両立条件により, (3) の変換公式が導かれる. この下で, (7) と (8) も両立するが, これは, (3) が方程式 (1) の Bäcklund 変換であることを表す. さらに, (8) の 3 つの式の両立条件は s_i の affine Weyl 群関係式 (4) と等価である. このようなわけで, Lax 形式 (6-8) は, Painlevé 方程式 P_{IV} とその Bäcklund 変換に関する全ての情報を含んでいることがわかる.

---

[1] (8) の右辺の 1 を移項して α_i で割れば, 左辺は Demazure 作用素となり, (6), (7) と対等に並べてみたくなる. 実際, 離散 Painlevé の世界では, 方程式と Bäcklund 変換はほとんど対等な関係にある.

3. 一般化

こうした話は, 2つの意味で一般化が考えられる. ひとつはすでに述べたルート系的拡張であり, もうひとつは多数の独立変数に対する hierarchy 的拡張である. もちろん両方を同時にしてもよい.

このような一般化を進めるために, 上記 Lax 方程式の (7) を可換な時間発展の族の一つと見なし, これを次のように一般化しよう.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\psi = B_k\psi. \tag{13}$$

適当な時間変数の族 x_k, $(k \in I)$ に対して, これらの式が両立するように行列 B_k をうまく定めることは, Lax 形式による可積分系の標準的構成法であり, 色々な選択が可能である. その中で, Drinfeld-Sokolov による hierarchy を用いることにより, 我々の目的とする affine Weyl 群対称性を実現させることができる. ここで, Drinfeld-Sokolov hierarchy について詳しくは述べないが, 次の $A_2^{(1)}$ の例で, 感じは理解していただけると思う. この場合,

$$B_1 = \begin{pmatrix} q_1 & 1 & \\ & q_2 & 1 \\ & & q_3 \end{pmatrix},$$

$(q_1 + q_2 + q_3 = 0)$ であり, これと両立する B_k $(k = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \cdots)$ は

$$B_k = \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} + \cdots, \tag{14}$$

の形に与えられる. 成分は z と q_1, q_2, q_3 およびその x_1 微分の多項式であり, $\deg(z) = 3$, $\deg(\partial_{x_1}{}^m q_i) = m+1$ と勘定すると, (i,j) 要素は $k+i-j$ 次の同次式である. z の最高次を

$$B_{3n+1} = \cdots + z^{n+1}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad B_{3n+2} = \cdots + z^{n+1}\begin{pmatrix} & & \\ 1 & & \\ * & 1 & \end{pmatrix}, \tag{15}$$

と規格化すればこのような B_k が一意に定まる.

(7) を Drinfeld-Sokolov hierarchy と見ると, (6) は, これに similarity の条件を課しているものと解釈できる. そのような similarity reduction を整合的に課すための手続きは, KP 方程式の場合に習い, Orlov の作用素を用いて与えられる. (この観点は高崎氏の指摘によるものであり, この場を借りて感謝したい.) 具体的には, B_k 作用素の一次結合として M 作用素を構成する.

$$M = \sum_{k \in I} d_k x_k B_k + \mathrm{const} \tag{16}$$

d_k は変数 x_k の degree であり, affine Lie 環の exponent で与えられる. 定数部分は Cartan 部分代数に値をとる. その値はゲージにもよるが, Painlevé のパラメータの基準点を定める. Drinfeld-Sokolov による hierarchy を, この M の変形方程式と見なせば, これも原点確定・無限遠不確定の monodromy 保存変形と見ることができる. (Drinfeld-Sokolov hierarchy の構成により, 作用素 B_k および M は affine Lie 環の意味で上三角的であることに注意する.) hierarchy に延ばしたことにより, 無限遠の不確定度を任意に大きくとることが許される.

4 Affine Weyl 群対称性

前節のような一般化に対し, affine Weyl 群の作用はどう与えたらよいであろうか？すなわち, (7),(8) と両立するような (9) はどのようになるか？を考える. (7),(8) から従う Painlevé 型 hierarchy の Bäcklund 変換を求めることと言ってもよい.

結果から言えば, 最後の Lax 方程式 (9) はそのままで OK である. 方程式をルート系的, また hierarchy 的に拡張したことにより必要となる注釈は,

$$v_i \text{ 変数} = M \text{ 作用素の Cartan 成分},$$
$$f_i \text{ 変数} = M \text{ 作用素の単純ルート成分},$$

として理解する, という点だけである.

こうして得られる affine Weyl 群の表現の由来について説明しよう. アイデアを明確にするため, 多少粗雑な記述になるがご容赦願いたい.

$G = N_- B_+$ を群 G の下三角 N_- および上三角の Borel B_+ への分解とする. 我々の目的には, affine Lie 群 (または loop 群) の場合が必要であり, 例えば, loop 群 $G = SL(3, \mathbf{C}[z, z^{-1}])$ の場合には, B_+ は, 式 (14) の形の行列のなす部分群とし, N_- の元は次の形とする.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z}\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} + \cdots. \tag{17}$$

(このような分解の存在・一意性は適当な条件の下で満たされるものとして, 今は深入りしないでおく.)

与えられた $Z \in B_+$ と $g \in G$ について, 積 Zg の分解を

$$Zg = G_{Z,g}^{-1} Z_g, \quad G_{Z,g} \in N_-, \quad Z_g \in B_+, \tag{18}$$

と書く．$(Zg)h = Z(gh)$ より直ちに,

$$Z_{gh} = (Z_g)_h, \tag{19}$$

$$G(Z, gh) = G(Z_g, h)G(Z, g), \tag{20}$$

を得る．適当な G-加群に値をとる B_+ 上の有理関数全体を V とする．$\psi(Z) \in V$ への G の作用 ρ が次で定まる

$$\rho(g)\psi(Z) = G(Z, g)\psi(Z_g). \tag{21}$$

$g \in W \subset G$ の場合が, 考えている Weyl 群 W の作用に他ならない．ついでに, 時間発展の方も同様の解釈を与えておこう．これにより, Lax 方程式の両立性は自明になる．

$X = W^{-1}Z$ を $Z \in G$ の分解とする．G の右作用は W^{-1} があっても本質的に上と変わりはない．今度は, 左作用を考える, $gW^{-1}Z = W^{-1}(WgW^{-1})Z$ の中央の因子を分解することにより, V 上のもう一つの G の表現

$$\sigma(g)\psi(Z) = (WgW^{-1})_+\psi(Z), \tag{22}$$

を得る．KP 方程式の佐藤理論でよく知られているように, g として適当な Abelian subalgebra $\mathbf{a} = \oplus_k \mathbf{C}H_k$ から得られる $g = \exp(\sum_k t_k H_k)$ をとってくれば, これが可換な時間発展の族を与える．W は wave operator に他ならない．Drinfeld-Sokolov hierarchy は $\mathbf{a}$ として principal Cartan subalgebra を選んだ場合に相当する．

5. 簡単な例と応用

Loop 群 $GL(2, \mathbf{C}[z, z^{-1}])$ を考える (SL でも本質的に変わらない)．Borel B_+ を次のようにとる．

$$B_+ = \{ \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \mid a(x), b(z), d(z) \in \mathbf{C}[z],\ c(z) \in z\mathbf{C}[z] \}. \tag{23}$$

以下, $a(z)$ の z^n の係数を a_n と書く (b, c, d も同様)．2 つの reflection 行列

$$r_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad r_0 = \begin{pmatrix} & 1/z \\ z & \end{pmatrix}, \tag{24}$$

に対して, 上記によって得られる affine Weyl 群 $W(A_1^{(1)})$ の表現 $s_i = \rho(r_i)$ は, z および a_n, b_n, c_n, d_n の $\mathbf{C}^2$-値関数 ψ への作用として書くと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} &s_1\psi(z, a_n, b_n, c_n, d_n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{d_0}{b_0} & 1 \end{pmatrix} \psi(z, b_n, a_n, d_n - \tfrac{d_0}{b_0} b_n, c_n - \tfrac{d_0}{b_0} a_n), \\ &s_0\psi(z, a_n, b_n, c_n, d_n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_0}{zc_1} \\ & 1 \end{pmatrix} \psi(z, b_{n-1} - \tfrac{a_0}{c_1} d_n, a_{n+1} - \tfrac{a_0}{c_1} c_{n+2}, d_{n-1}, c_{n+1}). \end{aligned} \tag{25}$$

少し計算してみると,

$$s_1(a_0) = b_0, \tag{26}$$

$$s_0 s_1(a_0) = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} / c_1, \tag{27}$$

$$s_1 s_0 s_1(a_0) = \det \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \\ & b_0 & b_1 \end{bmatrix} / \det \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

この簡単な例で, 既に tau 関数とその行列式の構造が見えているのは面白い.

本論の構成の応用例として, 次のようなことも示される. 常微分方程式

$$v + t_1 u + 3t_3(-\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{4}u'') + 5t_5(\frac{3}{8}u^5 - \frac{5}{8}uu'^2 - \frac{5}{8}u^2u'' + \frac{1}{16}u'''') = 0, \tag{29}$$

を考える. これは, $A_1^{(1)}$ の hierarchy から得られるもので, Clarkson-Joshi-Pickering によっても研究されている. (講演では, この方程式が, 木村, 岡本による 2 変数 Garnie 系の P_{II} 的退化と等価であると述べましたが, これは間違いでした. お詫びして訂正します).

この方程式の有理解について, 次が成り立つ.

定理: $v = n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ のとき, 方程式 (29) は 2-reduced Schur 関数 $s_\lambda(t)$ で表される次のような有理解をもつ.

$$u = (\log \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n})', \quad \tau_n = s_{(n,n-1,\ldots,2,1)}(t_1, t_3, t_5). \tag{30}$$

これは, $t_5 = 0$ の場合には Painlevé 方程式 P_{II} に対する梶原・太田の結果であり, さらに $t_7, t_9, \ldots$ などを含めることも可能である.

文献

1. M. Noumi and Y. Yamada, "Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials", Nagoya Math. J. 153(1999) 53–86.

2. M. Noumi and Y. Yamada, "Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations", Comm. Math. Phys. 199 (1998) 281–295.

3. M. Noumi and Y. Yamada, "Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$", Funkcialaj Ekvacioj **41**(1998) 408-503.

4. Y. Yamada, "Determinant formulas for the generalized Painlevé equations of type A", to appear Nagoya Math. J. (math.QA/9808002).