数理解析研究所講究録
1137 巻 2000 年 57-60

$(\log^+)^p$ の不変部分空間

信州大学理学部　真次康夫(Yasuo Matsugu)

1 Privalov 空間の定義

n を自然数、$B \equiv B_n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| < 1\}$ を複素Euclid空間$\mathbf{C}^n$の単位球、$S_n \equiv S = \partial B = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| = 1\}$ を単位球面とする。$\sigma \equiv \sigma_n$ はS 上の正規化された（即ち $\sigma(S) = 1$ である）Euclid 的測度を表し、$H(B)$ は B 上の正則関数全体を表すものとする。

Definition 1 $[0, \infty)$ 上の非定数非負非減少な凸関数φ に対し、*Hardy-Orlicz* 空間$H_\varphi(B)$ を次のように定義する：

$$H_\varphi(B) := \{f \in H(B) : \sup_{0 \le r < 1} \int_S \varphi(\log^+ |f_r|) d\sigma < \infty\}.$$

但し、$f_r(\zeta) = f(r\zeta), 0 \le r < 1, \zeta \in S$、である。

周知のように、$H_\varphi(B)$ は、$\varphi(t) = t$ のとき、*Nevanlinna* 空間$N(B)$ に等しく、$\varphi(t) = e^{pt}, 0 < p < \infty,$ のとき、*Hardy* 空間$H^p(B)$ に一致する。Subbotin[8] に従い、$\varphi(t) = t^p, 1 < p < \infty$ のとき、$H_\varphi(B)$ を$N^p(B)$ で表し、*Privalov* 空間と呼ぶ：

$$N^p(B) = \{f \in H(B) : \sup_{0 \le r < 1} \int_S (\log^+ |f_r|)^p d\sigma < \infty\}.$$

B 上の Smirnov 空間を $N^+(B)$ で表す：

$$N^+(B) = \{f \in N(B) : \lim_{r \uparrow 1} \int_S \log^+ |f_r| d\sigma = \int_S \log^+ |f^*| d\sigma\}.$$

但し、$f^*(\zeta) = \lim_{r \uparrow 1} f_r(\zeta)$, *a.e.*$\zeta \in S[\sigma]$、である。包含関係 $N(B) \supset N^+(B) \supset N^p(B) \quad (1 < p < \infty)$ が成立する事は容易に示される。

Definition 2 B 上の複素数値関数fに対し、f の*radial maximal function* $\mathrm{Mrad}\, f : S \to [0, \infty]$ を$(\mathrm{Mrad}\, f)(\zeta) := \sup_{0 \le r < 1} |f_r(\zeta)|, \zeta \in S$、によって定義する。$1 < p < \infty$ に対し、関数空間$M^p(B)$ を次のように定義する：

$$M^p(B) := \{f \in H(B) : \log^+(\mathrm{Mrad}\, f) \in L^p(\sigma)\} = \{f \in H(B) : \int_S [\log^+(\mathrm{Mrad}\, f)]^p d\sigma < \infty\}.$$

Proposition 1 (cf. [8],p.231, Theorem 1.) $1 < p < \infty, f \in N(B)$ に対し、次の５条件は同値である：

1. $f \in N^p(B)$.

2. $f \in N^+(B)$ かつ $\log^+|f^*| \in L^p(d\sigma)$.

3.
$$\lim_{r\uparrow 1}\int_S(\log^+|f_r|)^p d\sigma = \int_S(\log^+|f^*|)^p d\sigma < \infty.$$

4. $\{(\log^+|f_r|)^p\}_{0\le r<1}$ は測度σ に関して一様可積分である。

5. $f \in M^p(B)$.

便宜のため、$N^+(B)$ を$N^1(B)$ で表す：$N^1(B) \equiv N^+(B)$.

2 $N^p(B)\,(1 \le p < \infty)$ の位相

不等式 $\log^+ t \le \log(1+t) \le \log^+ t + \log 2\ (0 \le t \le \infty)$ に注意すると

$$N^p(B) = \{f \in H(B) : \sup_{0\le r<1}\int_S[\log(1+|f_r|)]^p d\sigma < \infty\} \quad (1 < p < \infty).$$

Definition 3 $1 \le p < \infty, f \in H(B)$ に対し、

$$\|f\|_{N^p} := \sup_{0\le r<1}(\int_S[\log(1+|f_r|)]^p d\sigma)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する。

Definition 4 $1 \le p < \infty$ とS 上の可測関数f に対し、

$$\|f\|_p := (\int_S[\log(1+|f|)]^p d\sigma)^{\frac{1}{p}} = \|\log(1+|f|)\|_{L^p(\sigma)}$$

と定義する。$\|f\|_p < \infty$ を満たすS 上の可測関数f 全部の集合を $(\log^+)^p(\sigma)$ で表す。

Proposition 2 (cf. [8],p.234, §4.) $1 \le p < \infty$ とする。

1. $\{f,g\} \subset (\log^+)^p(\sigma), \alpha \in \mathbf{C}$ に対し、

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \|fg\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p,$$

$$\min\{1,|\alpha|\}\|f\|_p \le \|\alpha f\|_p \le \max\{1,|\alpha|\}\|f\|_p.$$

2. $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$, $\{f,g\} \subset (\log^+)^p(\sigma)$, と定義すれば、$d_p$ は $(\log^+)^p(\sigma)$ 上の平行移動不変(translation-invariant)かつ完備な距離である。

3. $(\log^+)^p(\sigma)$ は距離d_pに関してF 代数(F-algebra)をなす。

4. 任意の$f \in N^p(B)$ に対して、$\|f\|_{N^p} = \|f^*\|_p$.

5. $\rho_p(f,g) = \|f-g\|_{N^p}$, $\{f,g\} \subset (\log^+)^p(\sigma)$, と定義すれば、$\rho_p$ は $N^p(B)$ 上の平行移動不変かつ完備な距離である。

6. $N^p(B)$は距離ρ_pに関してF 代数をなす。

7. $f \in N^p(B)$ に対し、$\Phi(f) := f^*$ と定義し、$\tilde{N}^p := \Phi(N^p(B))$ と置けば、$\tilde{N}^p$ は$(\log^+)^p(\sigma)$の閉部分代数であり、Φ は$N^p(B)$から$\tilde{N}^p$ の上への代数同型かつ等距離写像である。

Remark(cf. [8],p.233.) 距離空間$(N^p(B), \rho_p)$ の完備性は次の評価式から得られる：$1 \le p < \infty, f \in N^p(B), z \in B$ ならば

$$\log(1+|f|) \le \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{\frac{n}{p}} \|f\|_{N^p}.$$

Proposition 3 (cf.[8],p.234, Theorem 4.)

1. $1 \le p < \infty, f \in N^p(B)$ ならば、$\lim_{r \uparrow 1} \|f_r - f\|_{N^p} = 0$.

2. $1 \le p < \infty$ ならば、正則多項式の全体は$N^p(B)$の稠密な部分集合であり、従って、$N^p(B)$は可分なF 代数である。

3 $(\log^+)^p(\sigma_1)$ の不変部分空間

J.W.Roberts とM.Stollは論文[5]で、次の事実を示した：Mが$N^+(B_1)$の、$\{0\}$とは異なる、閉イデアルであれば、B_1上の内部関数(inner function)φがあって、$M = \varphi N^+(B_1)$と表される。
$N^p(B_1)$ $(1 < p < \infty)$ の閉イデアルに関しては、M.Mochizuki[4] が対応する結果を示した：Mが$N^p(B_1)$の、$\{0\}$とは異なる、閉イデアルであれば、B_1上の内部関数(inner function)φがあって、$M = \varphi N^p(B_1)$と表される。
次は、$L^2(\sigma_1)$の不変部分空間に関するBeurling-Helson-Lowdenslagerの定理(cf.[1], Theorems 2 and 3)を$(\log^+)^p(\sigma_1)$の不変部分空間に対して考察した結果であり、上記 J.W.Roberts-M.Stoll-M.Mochizuki の定理を含むものである：

Proposition 4 (cf.[3]) $1 \le p < \infty$とする。

1. Mを$(\log^+)^p(\sigma_1)$の単純不変部分空間(simply invariant subspace)とする。(即ち、Mは$(\log^+)^p(\sigma_1)$の閉部分線形空間であり、$\chi M \subset M, \chi M \ne M$を満たす。ここで、$\chi$ はS_1上の恒等関数である。) このとき、S_1上の絶対値1をもつ可測関数(unimodular function) φが存在して、$M = \varphi \tilde{N}^p$が成立する。

2. Mを$(\log^+)^p(\sigma_1)$の複不変部分空間(doubly invariant subspace)とする。(即ち、Mは$(\log^+)^p(\sigma_1)$の閉部分線形空間であり、$\chi M = M$を満たす。) このとき、S_1に含まれる可測集合Eが存在して、$M = \chi_E(\log^+)^p(\sigma_1)$が成立する。ここで、$\chi_E$ はEの定義関数である。

4 $N^p(B)$ $(1 \leq p < \infty)$ の等距離写像

Proposition 5 (cf.[2],[6],[7]) $1 \leq p < \infty$ とする。

1. Aを$N^p(B)$から$N^p(B)$の中への等距離線形写像とする。このとき、B上の内部関数 Ψ、BからBの中への内部写像(inner map) Φが存在して、次が成立する:

$$\text{(a)} \qquad (Af)(z) = \Psi(z)f(\Phi(z)), \ \forall f \in N^p(B), \ \forall z \in B.$$

$$\text{(b)} \int_S h d\sigma = \int_S (h \circ \Phi^*) d\sigma, \ \forall h : \text{bounded Borel function on } S.$$

2. 逆に、(a),(b) で定まる写像Aは$N^p(B)$から$N^p(B)$の中への等距離線形写像である。

Proposition 6 (cf.[2],[6],[7]) $1 \leq p < \infty$ とする。

1. Aを$N^p(B)$から$N^p(B)$の上への等距離線形写像とする。このとき、絶対値1の定数$\alpha \in \mathbf{C}$、$\mathbf{C}^n$上のユニタリ変換 Φが存在して、次が成立する:

$$\text{(c)} \qquad (Af)(z) = \alpha f(\Phi(z)), \ \forall f \in N^p(B), \ \forall z \in B.$$

2. 逆に、(c) で定まる写像Aは$N^p(B)$から$N^p(B)$の上への等距離線形写像である。

参考文献

[1] H.Helson, *Lectures on Invariant Subspaces*, Academic Press, New York, 1964.

[2] Y.Iida and M.Mochizuki, *Isometries of some F-algebras of holomorphic functions*, Arch. Math. **71**(1998), 297-300.

[3] Y.Matsugu, *Invariant subspaces of the Privalov spaces*, (preprint).

[4] M.Mochizuki, *Algebras of holomorphic functions between H^p and N_**, Proc.Amer.Math.Soc. **105**(1989),898-902.

[5] J.W.Roberts and M.Stoll, *Prime and principal ideals in the algebra N^+*, Arch. Math. **27**(1976), 387-393. Correction, ibid.**30**(1978), 672.

[6] K.Stephenson, *Isometries of the Nevanlinna class*, Indiana Univ. Math. J., **26**(1977), 307-324.

[7] A.V.Subbotin, *Linear Isometry groups of Privalov's spaces of holomorphic functions of several variables*, Doklady Math. **60**(1999),77-79.

[8] A.V.Subbotin, *Functional properties of Privalov spaces of holomorphic functions in several variables*, Math. Notes **65**(1999),230-237.