

## 解析接続と級数の収束の加速

京大数理研 森 正武 (Masatake Mori)

### 1 解析接続

このノートは 1970 年代に行った研究のレビューであり [2, 4, 7], 文字通り古典的内容のものである. コンピュータの黎明期に, 解析接続もこのような形でコンピュータに乗った, という一つの例題として見ていただきたい.

ここでの目的は, 解析接続を利用していろいろな関数の値を効率よく計算することにある. つまり, 与えられたべき級数に適当な変数変換を行ってより広い領域で計算が可能な級数を導きたい, しかも同じ値に対しては, できればもとのべき級数より収束を速くしたい, ということである.

解析接続を説明するときふつうはべき級数を使う. すなわち, 原点を中心とするべき級数展開

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots \tag{1.1}$$

が与えられているとき, その収束円の内部の適当な点  $z = \alpha$  を中心とする別のべき級数

$$c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \dots \tag{1.2}$$

をつくり, もとの収束円の内部では値が一致するようにする. このとき, この新しい方の級数の収束円が (1.1) の収束円の外部に出ていれば, もとの級数で定義される関数がそこに解析接続されたことになる.

しかし, このことは理論的には全くその通りであるが, 新しい級数 (1.2) の形を具体的に計算で求めようとする, 現実にはそれはほとんど不可能である. 実際,

$$w = z - \alpha \tag{1.3}$$

とおくと

$$\begin{aligned} & c_0 + c_1w + c_2w^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1(w + \alpha) + a_2(w + \alpha)^2 + \dots \end{aligned} \tag{1.4}$$

となるが, ここで係数の間の関係は

$$\begin{cases} c_0 = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \dots \\ c_1 = a_1 + 2\alpha a_2 + 3\alpha^2 a_3 + \dots \\ c_2 = a_2 + 3\alpha a_3 + 6\alpha^2 a_4 + \dots \\ \dots \end{cases} \tag{1.5}$$

となる。このように、新しいそれぞれの係数  $c_0, c_1, c_2, \dots$  の計算にもとの係数  $a_0, a_1, a_2, \dots$  の無限級数が現れ、収束が極めて悪かったり、大きな桁落ちが生じたりして、実際にこれらを数値的に求めることはほとんどの場合不可能に近いのである。

しかしながら、解析接続の概念を拡張してこれを一種の変数変換とみなし、さらに一つの条件を加えて考えるならば様子が変わってくる。いま

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (1.6)$$

に対して

$$z = \phi(w) = b_1 w + b_2 w^2 + \dots \quad (1.7)$$

なる変数変換を考える。ただし、この式に見るように  $b_0 = 0$ 、すなわち

$$\phi(0) = 0 \quad (1.8)$$

を仮定する。べき級数展開 (1.2) も (1.1) に変数変換 (1.3) を行ったものとみなせるが、(1.8) を満たしていない。さて、(1.7) を (1.6) に代入したものを

$$f(\phi(w)) = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \dots \quad (1.9)$$

とおくと、係数の関係は

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_k = \sum_{j=1}^k a_j W_{jk} \end{cases} \quad (1.10)$$

となる。ただし、 $W_{jk}$  は

$$\begin{cases} W_{1k} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots \\ W_{jk} = \sum_{\ell=1}^{k-j+1} b_\ell W_{j-1, k-\ell}, \quad j = 2, 3, \dots, k; \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.11)$$

によって定義されるものである。係数が (1.10) で与えられることは、 $W_{jk}$  が展開  $(b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^j$  における  $w^k$  の項の係数であることと次の関係から、容易に確かめられる。

$$\begin{aligned} (b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^j &= \sum_{k=1}^{\infty} W_{jk} w^k \\ &= (b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)(b_1 w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \dots)^{j-1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

いま、(1.7) の逆変換を

$$w = \phi^{-1}(z) \quad (1.13)$$

と書く。これを (1.9) に代入すると、独立変数を  $z$  とする級数

$$f(z) = c_0 + c_1 \phi^{-1}(z) + c_2 (\phi^{-1}(z))^2 + \dots \quad (1.14)$$

が導かれる。したがって、もしも (1.14) が収束する  $z$ -平面内の領域がもとの級数 (1.6) の収束円の外部に出ていれば、もとの級数 (1.6) で定義される関数がそこに解析接続されたと考えることができる。また、(1.6) の収束円の内部の  $z$  に対して、(1.6) よりも (1.14) の収束の方が速ければ、変数変換 (1.7) によって級数の収束が加速されたことになる。

具体的にある  $z = \zeta$  の値について関数値を計算するには、(1.13) によって  $w_\zeta = \phi^{-1}(\zeta)$  の値を計算し、その  $w_\zeta$  を (1.9) の  $w$  に代入する。したがって、逆関数 (1.13) の値が簡単に計算できることが必要となる。例えば、 $\phi(w)$  が 1 次分数関数であればその逆も 1 次分数関数となり、ここで述べている方法にとって極めて好都合である。

例として、対数関数を取り上げる。

$$f(z) = \log(1+z) \quad (1.15)$$

この関数は原点を中心として次のようなべき級数に展開できる。

$$f(z) = \log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \dots, \quad |z| < 1 \quad (1.16)$$

収束円の半径が 1 であるのは  $\log(1+z)$  が  $z = -1$  に分岐点をもつからである。いま、これに 1 次分数関数による次のような変数変換を行ってみる。

$$z = \phi(w) = \frac{2w}{1-w} = 2w + 2w^2 + 2w^3 + \dots \quad (1.17)$$

あるいは、逆に書けば

$$w = \phi^{-1}(z) = \frac{z}{z+2} \quad (1.18)$$

である。この変換は  $z$ -平面の右半平面  $\operatorname{Re} z > -1$  を  $w$ -平面の単位円の内部  $|w| < 1$  に写像する (図 1)。級数 (1.16) に (1.17) を代入して (1.10) を参照すれば  $w$  の級数 (1.9) が導かれるわけであるが、今の場合是对数関数の性質を使って直ちに

$$f(z) = \log(1+z) \quad (1.19)$$

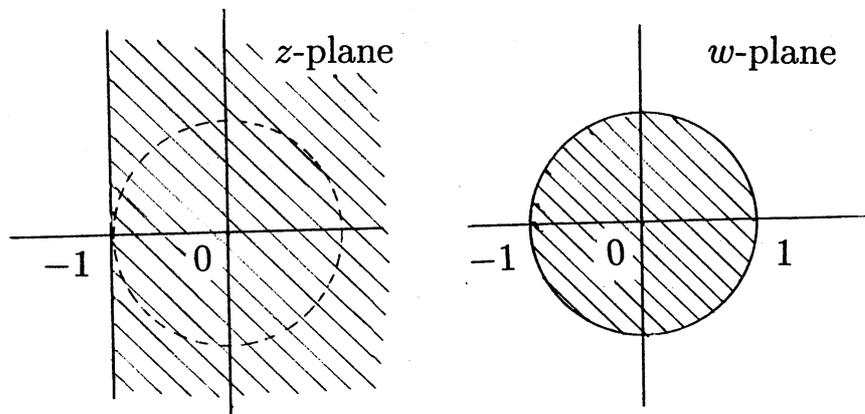


図 1:  $\operatorname{Re} z > -1 \iff |w| < 1$

$$= \log(1 + \phi(w)) = \log\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \quad (1.20)$$

$$= 2w + \frac{2}{3}w^3 + \frac{2}{5}w^5 + \dots \quad (1.21)$$

を得る. これに (1.18) を代入すれば,  $z$  の級数

$$f(z) = 2\left(\frac{z}{z+2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{z}{z+2}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)^5 + \dots \quad (1.22)$$

が導かれる.

最後の級数 (1.22) は  $\operatorname{Re} z > -1$  なる任意の  $z$  に対して収束する. なぜならば, このような任意の  $z$  に対して (1.18) より  $w$  は  $|w| < 1$  を満たし, そのような  $w$  の値に対して級数 (1.21) は収束するからである. この領域  $\operatorname{Re} z > -1$  はもとの級数 (1.16) の収束円  $|z| < 1$  を内部に含む. したがって, (1.16) は (1.17) によってより広い領域に解析接続されたとみなすことができる.

いま単位円の内部の一つの  $z$  の値を定めるとき,  $|z| < 1$  であればつねに  $|z+2| > 1$  であり,

$$|z| > \left|\frac{z}{z+2}\right| = |w| \quad (1.23)$$

が成り立つ. したがって, 級数 (1.22) の方が (1.16) よりも明らかに収束が速い. すなわち,  $|z| < 1$  においては変換 (1.18) によって収束が加速された, ということができる.

## 2 積分指数関数

実用上の目的として, 特殊関数の数値計算にこのような解析接続を応用してみよう. 具体例として, 積分指数関数  $E_1(z)$  の計算に応用してみる. ここでは話を分かりやすくするために, 積分指数関数の代わりに指数関数を乗じた

$$F(z) = e^z E_1(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{z+t} dt, \quad -\pi < \arg z < \pi \quad (2.1)$$

を考える. ここでは級数から出発して解析接続を扱っているのだから, まず最初に関数  $F(z)$  の級数の形での一つの表示を導いてみる. その目的のために, 関数 (2.1) に対して, 写像

$$z = \phi_1(w_1) = \frac{1+w_1}{1-w_1}, \quad w_1 = \phi^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad (2.2)$$

による変数変換を行う. 関数 (2.2) は右半平面  $\operatorname{Re} z > 0$  を単位円内部  $|w_1| < 1$  に写像する (図 2). 積分表示 (2.1) の  $z$  に (2.2) を代入し, (2.2) の後の関係を使えば, 関数  $F(z)$  に対する一つの級数による表示が導かれる.

$$F(z) = F(\phi_1(w_1)) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\frac{1+w_1}{1-w_1} + t} dt$$

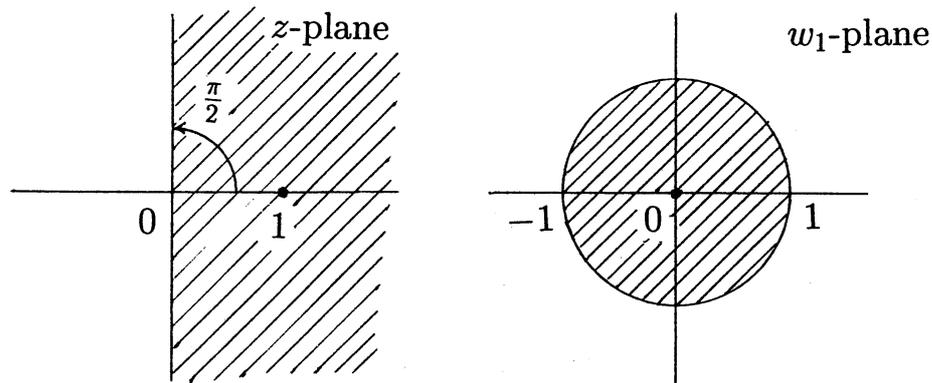


図 2:  $\operatorname{Re} z > 0 \iff |w_1| < 1$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - w_1) \int_0^\infty \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t-1}{t+1} \right)^k w_1^k \right\} \frac{e^{-t}}{t+1} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} J_k w_1^k \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} J_k \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^k \tag{2.4}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \int_0^\infty \frac{1}{t+1} e^{-t} dt \\
 J_k &= -2 \int_0^\infty \frac{(t-1)^{k-1}}{(t+1)^{k+1}} e^{-t} dt, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

である。

最初の関数 (2.1) は  $-\pi < \arg z < \pi$  で正則であり, (2.2) によってその部分領域  $\operatorname{Re} z > 0$  を  $w$ -平面の単位円の内部  $|w| < 1$  に写像したのであるから, (2.3) は  $|w| < 1$  で収束し, したがって (2.4) は  $z$ -平面の右半平面  $\operatorname{Re} z > 0$  で収束する。

### 3 より広い領域への解析接続

こうして導いた積分指数関数の級数表示 (2.4) を, より広い領域に解析接続してみよう. そのために, 次の変換を考える.

$$z = \phi_m(w_m) = \left( \frac{1+w_m}{1-w_m} \right)^m, \quad w_m = \phi_m^{-1}(z) = \frac{\sqrt[m]{z}-1}{\sqrt[m]{z}+1}, \quad m > 1 \tag{3.1}$$

この関数は  $z$ -平面の領域  $|\arg z| < m\pi/2$  を  $w_m$ -平面の単位円の内部  $|w_m| < 1$  に写像する (図 3). 関数  $F(z)$  にこの変換を行って

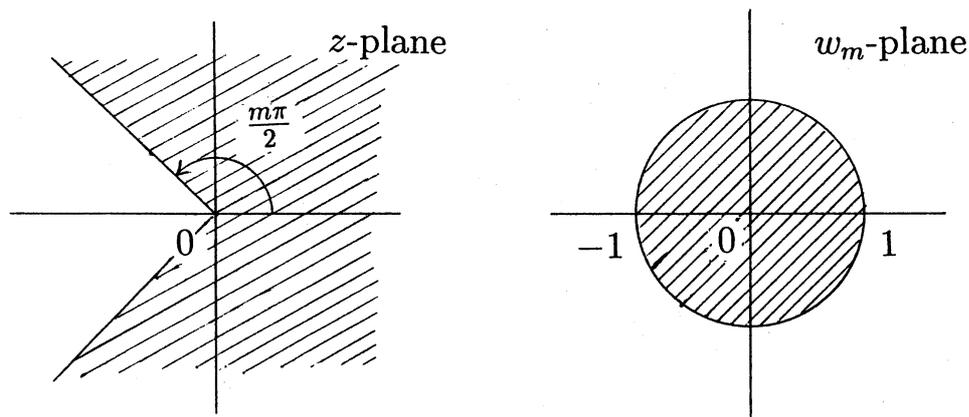


図 3:  $|\arg z| < m\pi/2 \iff |w_m| < 1$

$$\begin{aligned}
 F(z) &= F(\phi_m(w_m)) \\
 &= J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(m)} w_m^k \\
 &= J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(m)} \left( \frac{\sqrt[m]{z} - 1}{\sqrt[m]{z} + 1} \right)^k
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

となったとする. このとき, 係数  $K_k^{(m)}$  は (2.2) を媒介にして, 次のように計算することができる. いま, (2.2) と (3.1) より

$$\frac{1 + w_1}{1 - w_1} = \left( \frac{1 + w_m}{1 - w_m} \right)^m \tag{3.3}$$

が成り立つが, これを  $w_1$  について解いて  $w_m$  のべき級数に展開すれば

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{(1 + w_m)^m - (1 - w_m)^m}{(1 + w_m)^m + (1 - w_m)^m} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(m)} w_m^k
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る. この関係は, (1.7) において  $z$ ,  $w$ ,  $b_k$  をそれぞれ  $w_1$ ,  $w_m$ ,  $b_k^{(m)}$  とおいたものであることに注意すれば, (2.3) に (3.4) の  $w_1$  を代入して (1.11) を参照することにより

$$\begin{aligned}
 F(z) &= F(\phi_m(w_m)) \\
 &= J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(m)} w_m^k
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$K_k^{(m)} = \sum_{j=1}^k J_j W_{jk}^{(m)}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.6}$$

となることがわかる。ただし,

$$\begin{cases} W_{1k}^{(m)} = b_k^{(m)}, & k = 1, 2, \dots \\ W_{jk}^{(m)} = \sum_{\ell=1}^{k-j+1} b_\ell^{(m)} W_{j-1, k-\ell}^{(m)}, & j = 2, 3, \dots, k; k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.7)$$

である。

次に,  $m = 2, 3, 4$  の場合の具体的な形を示しておく。

[ $m = 2$  の場合 (図 4)]

$$z = \phi_2(w_2) = \left( \frac{1+w_2}{1-w_2} \right)^2 \quad (3.8)$$

このとき,

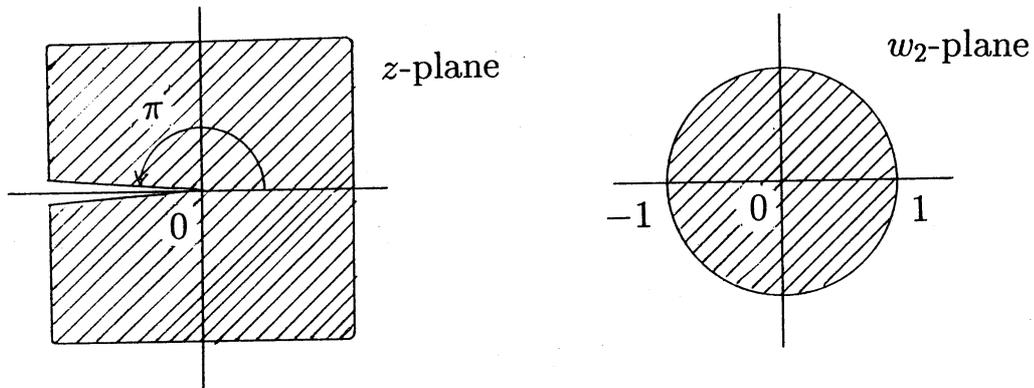


図 4:  $|\arg z| < \pi \iff |\arg w_1| < \frac{\pi}{2} \iff |w_2| < 1$

$$\frac{1+w_1}{1-w_1} = \left( \frac{1+w_2}{1-w_2} \right)^2 \quad (3.9)$$

より

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{2w_2}{1+w_2^2} \\ &= 2w_2 - 2w_2^3 + 2w_2^5 - 2w_2^7 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} w_2^k \end{aligned} \quad (3.10)$$

であるから, (3.6) より

$$\begin{aligned} F(z) &= F(\phi_1(w_1)) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k w_1^k \\ &= F(\phi_2(w_2)) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(2)} w_2^k, \quad w_2 = \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$K_k^{(2)} = \sum_{j=1}^k J_j W_{jk}^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

となる。ただし,

$$\begin{cases} W_{1k}^{(2)} = b_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots \\ W_{jk}^{(2)} = \sum_{\ell=1}^{k-j+1} b_\ell^{(2)} W_{j-1, k-\ell}^{(2)}, \quad j = 2, 3, \dots, k; \quad k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.13)$$

である。  $W_{jk}^{(2)}$  は (3.7) で  $m = 2$  として計算する。展開 (3.11) は  $z = 0$  から  $-\infty$  まで負の実軸上に切断線を入れた全平面 (図 4) で収束する。

[ $m = 3$  の場合 (図 5)]

$$z = \phi_3(w_3) = \left( \frac{1+w_3}{1-w_3} \right)^3 \quad (3.14)$$

このとき,

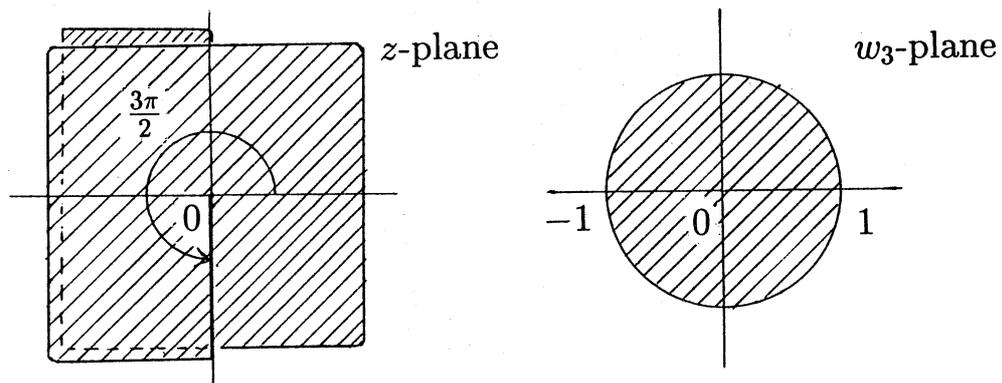


図 5:  $|\arg z| < \frac{3\pi}{2} \iff |\arg w_1| < \frac{\pi}{2} \iff |w_3| < 1$

$$\frac{1+w_1}{1-w_1} = \left( \frac{1+w_3}{1-w_3} \right)^3 \quad (3.15)$$

より

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{3w_3 + w_3^3}{1 + 3w_3^2} \\ &= 3w_3 - 8w_3^3 + 24w_3^5 - 54w_3^7 + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

であるから, (3.6) より

$$\begin{aligned} F(z) &= F(\phi_1(w_1)) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k w_1^k \\ &= F(\phi_3(w_3)) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(3)} w_3^k, \quad w_3 = \frac{\sqrt[3]{z} - 1}{\sqrt[3]{z} + 1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。ただし,

$$K_k^{(3)} = \sum_{j=1}^k J_j W_{jk}^{(3)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

である。  $W_{jk}^{(3)}$  は (3.7) で  $m = 3$  として計算する。展開 (3.17) は図 5 の左側に示す領域で収束する。

[ $m = 4$  の場合 (図 6)]

$$z = \phi_4(w_4) = \left( \frac{1 + w_4}{1 - w_4} \right)^4 \quad (3.19)$$

このとき,

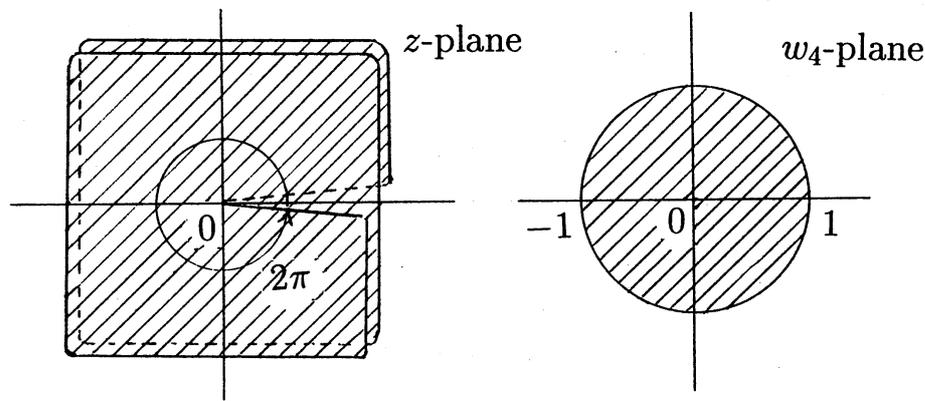


図 6:  $|\arg z| < 2\pi \iff |\arg w_2| < \pi \iff |w_4| < 1$

$$\frac{1 + w_1}{1 - w_1} = \left( \frac{1 + w_4}{1 - w_4} \right)^4 = \left( \frac{1 + w_2}{1 - w_2} \right)^2 \quad (3.20)$$

すなわち

$$\frac{1 + w_2}{1 - w_2} = \left( \frac{1 + w_4}{1 - w_4} \right)^2 \quad (3.21)$$

であるから, (3.9) および (3.11) において  $w_1$  と  $w_2$  をそれぞれ  $w_2$  と  $w_4$  で置き換えれば

$$\begin{aligned} F(z) &= F(\phi_2(w_2)) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(2)} w_2^k \\ &= F(\phi_4(w_4)) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{(4)} w_4^k, \quad w_4 = \frac{\sqrt[4]{z} - 1}{\sqrt[4]{z} + 1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

が成り立つ。ただし,

$$K_k^{(4)} = \sum_{j=1}^k K_k^{(2)} W_{jk}^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

である。  $W_{jk}^{(2)}$  は (3.13) で,  $K_k^{(2)}$  は (3.12) で計算する。展開 (3.22) は図 6 の左側に示す領域で収束する。

#### 4 数値計算例

これまで述べてきたことを実際に積分指数関数

$$E_1(z) = e^{-z} F(z), \quad F(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{z+t} dt \quad (4.1)$$

の計算に適用してみる. 級数 (3.5) の計算では  $m$  を増やすと収束は速くなって計算の効率は向上するように思われるが, 実際には必ずしもそうはならない. 実は, 積分指数関数の場合,  $m=3$  が最も高い効率で計算ができることが確かめられている [7]. そこで, ここでは,  $m=3$  の計算式

$$E_1(z) \approx e^{-z} \left( J_0 + \sum_{k=1}^n K_k^{(3)} w_3^k \right), \quad z = \phi_3(w_3) \quad (4.2)$$

を使用する.

表 1 に  $x=2$  における項数  $n$  ごとの計算値を示した.

| x = 2.0 |                                    |    |                                    |
|---------|------------------------------------|----|------------------------------------|
| n       | $E_1(x)$                           | n  | $E_1(x)$                           |
| 1       | $4.300884297099734 \times 10^{-2}$ | 10 | $4.890051070444468 \times 10^{-2}$ |
| 2       | $4.921824439526530 \times 10^{-2}$ | 11 | $4.890051070764613 \times 10^{-2}$ |
| 3       | $4.891664670568607 \times 10^{-2}$ | 12 | $4.890051070811766 \times 10^{-2}$ |
| 4       | $4.890134154781676 \times 10^{-2}$ | 13 | $4.890051070806596 \times 10^{-2}$ |
| 5       | $4.890000754051210 \times 10^{-2}$ | 14 | $4.890051070806150 \times 10^{-2}$ |
| 6       | $4.890051491765741 \times 10^{-2}$ | 15 | $4.890051070806103 \times 10^{-2}$ |
| 7       | $4.890051276860443 \times 10^{-2}$ | 16 | $4.890051070806111 \times 10^{-2}$ |
| 8       | $4.890051118892569 \times 10^{-2}$ | 17 | $4.890051070806112 \times 10^{-2}$ |
| 9       | $4.890051067752936 \times 10^{-2}$ | 18 | $4.890051070806112 \times 10^{-2}$ |

表 1:  $x=2$  における  $E_1(x)$  の計算値

| z = (-1, 0) |             |             |    |             |             |
|-------------|-------------|-------------|----|-------------|-------------|
| n           | Re $E_1(z)$ | Im $E_1(z)$ | n  | Re $E_1(z)$ | Im $E_1(z)$ |
| 1           | 1.621040    | -3.800957   | 14 | -1.895303   | -3.142026   |
| 2           | -1.521751   | -3.800957   | 15 | -1.895303   | -3.141723   |
| 3           | -1.521751   | -3.034681   | 16 | -1.895050   | -3.141723   |
| 4           | -1.716954   | -3.034681   | 17 | -1.895050   | -3.141624   |
| 5           | -1.716954   | -3.120089   | 18 | -1.895095   | -3.141624   |
| 6           | -1.880019   | -3.120089   | 19 | -1.895095   | -3.141580   |
| 7           | -1.880019   | -3.116622   | 20 | -1.895113   | -3.141580   |
| 8           | -1.892813   | -3.116622   | 21 | -1.895113   | -3.141589   |
| 9           | -1.892813   | -3.137412   | 22 | -1.895120   | -3.141589   |
| 10          | -1.898305   | -3.137412   | 23 | -1.895120   | -3.141592   |
| 11          | -1.898305   | -3.140692   | 24 | -1.895118   | -3.141592   |
| 12          | -1.895880   | -3.140692   | 25 | -1.895118   | -3.141593   |
| 13          | -1.895880   | -3.142026   | 26 | -1.895118   | -3.141593   |

表 2:  $x=-1$  における  $E_1(x)$  の計算値

また、表 2 に  $z = -1$  における項数  $n$  ごとの計算値を示した。この値  $E_1(-1)$  は複素数値になる。

積分指数関数と積分三角関数の間には

$$E_1(ix) = -\text{Ci}(x) + i \left( \text{Si}(x) - \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.3)$$

$$\text{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (4.4)$$

なる関係がある。この関係を使って  $x = 2$  における積分三角関数の値を (3.17) によって計算すると、表 3 のようになる。

$$x = 2.0$$

| n  | Ci(x)                        | Si(x)                       |
|----|------------------------------|-----------------------------|
| 1  | 7.057752665×10 <sup>-1</sup> | 1.565987442×10 <sup>0</sup> |
| 2  | 4.217472949×10 <sup>-1</sup> | 1.644310548×10 <sup>0</sup> |
| 3  | 4.277820096×10 <sup>-1</sup> | 1.608552446×10 <sup>0</sup> |
| 4  | 4.239422614×10 <sup>-1</sup> | 1.605906037×10 <sup>0</sup> |
| 5  | 4.230541299×10 <sup>-1</sup> | 1.606427704×10 <sup>0</sup> |
| 6  | 4.229601356×10 <sup>-1</sup> | 1.605439434×10 <sup>0</sup> |
| 7  | 4.229701759×10 <sup>-1</sup> | 1.605443002×10 <sup>0</sup> |
| 8  | 4.229841017×10 <sup>-1</sup> | 1.605428860×10 <sup>0</sup> |
| 9  | 4.229784141×10 <sup>-1</sup> | 1.605413603×10 <sup>0</sup> |
| 10 | 4.229805788×10 <sup>-1</sup> | 1.605413775×10 <sup>0</sup> |
| 11 | 4.229809016×10 <sup>-1</sup> | 1.605413206×10 <sup>0</sup> |
| 12 | 4.229807599×10 <sup>-1</sup> | 1.605413007×10 <sup>0</sup> |
| 13 | 4.229808266×10 <sup>-1</sup> | 1.605412995×10 <sup>0</sup> |
| 14 | 4.229808304×10 <sup>-1</sup> | 1.605412980×10 <sup>0</sup> |
| 15 | 4.229808273×10 <sup>-1</sup> | 1.605412978×10 <sup>0</sup> |
| 16 | 4.229808288×10 <sup>-1</sup> | 1.605412977×10 <sup>0</sup> |
| 17 | 4.229808288×10 <sup>-1</sup> | 1.605412977×10 <sup>0</sup> |

表 3:  $x = 2$  における  $\text{Ci}(x)$  および  $\text{Si}(x)$  の計算値

このように、積分指数関数の実際の数値計算に以上述べてきた方法が使用できることがわかった。

複素数  $z$  に対して数値計算を実行するとき、項数  $n$  を一定値  $n = 20$  に固定したときの計算誤差

$$\left| E_1(z) - e^{-z} \left( J_0 + \sum_{k=1}^{20} K_k^{(m)} w_m^k \right) \right|, \quad w_m = \frac{\sqrt[m]{z} - 1}{\sqrt[m]{z} + 1} \quad (4.5)$$

の等高線図を  $z$ -平面上で与えておくと、誤差の目安がわかって都合がよい。 $z$ -平面における誤差、すなわち  $\left| E_1(z) - e^{-z} \left( J_0 + \sum_{k=1}^{20} K_k^{(m)} w_m^k \right) \right|$ ,  $m = 3$  の値を図示した。この図より、当然のことながら、 $w_3$ -平面の原点に対応する  $z = 1$  を中心に右半平面で誤差が小さく、左半平面の負の実軸に近づくにしたがって誤差が大きくなることがわかる。

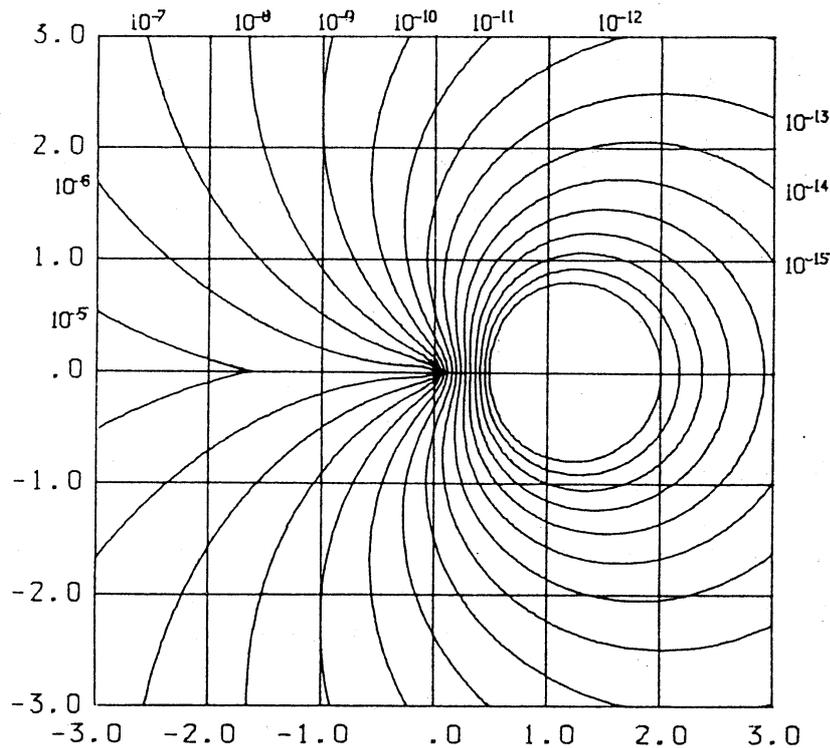


図 7:  $|E_1(z) - e^{-z} (J_0 + \sum_{k=1}^{20} K_k^{(3)} w_3^k)|$ ,  $w_3 = \frac{\sqrt[3]{z} - 1}{\sqrt[3]{z} + 1}$

## 5 定積分で定義される特殊関数への応用

これまで述べてきた方法は

$$F(z) = \int_a^b f(z;t) \mu(t) dt \quad (5.1)$$

の形で定義されるいろいろな特殊関数の数値計算に応用することができる。積分指数関数

$$E_1(z) = e^{-z} \int_0^\infty \frac{1}{z+t} e^{-t} dt \quad (5.2)$$

の場合の対応は

$$a = 0, b = \infty, f(z;t) = \frac{1}{z+t}, \mu(t) = e^{-t} \quad (5.3)$$

である。

実際の計算手順は次の通りである。まず、与えられた関数 (5.1) の  $f(z;t)$  に

$$z = \phi(w_1) \quad (5.4)$$

を代入してべき級数に展開する。

$$f(z;t) = f(\phi(w_1);t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) w_1^k \quad (5.5)$$

これを (5.1) に代入して項別積分する.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k w_1^k = \sum_{k=0}^{\infty} J_k (\phi^{-1}(z))^k, \quad J_k = \int_a^b a_k(t) \mu(t) dt \quad (5.6)$$

このべき級数 (5.6) が効率よく計算できればこれで計算する. もしも効率が悪ければ, 3 節に述べたような変数変換によって収束を加速して計算を行う.

以下にこの方法で計算できる関数の例をいくつか挙げる.

**積分指数関数 (exponential integral)**

$$E_1(z) = e^{-z} \int_0^{\infty} \frac{1}{z+t} e^{-t} dt \quad (5.7)$$

**積分三角関数 (sine and cosine integrals)**

$$\begin{cases} \text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - g_1(z) \cos z - g_2(z) \sin z \\ \text{Ci}(z) = \gamma + \log z + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt = g_1(z) \sin z - g_2(z) \cos z \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} g_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{z}{z^2 + t^2} e^{-t} dt \\ g_2(z) = \int_0^{\infty} \frac{t}{z^2 + t^2} e^{-t} dt \end{cases} \quad (5.9)$$

**誤差関数 (error function)**

$$\text{erf } z = 1 - \frac{2ze^{-z^2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2 + t^2} e^{-t^2} dt \quad (5.10)$$

**プサイ関数 (psi function)**

$$\psi(z) = \frac{d[\log \Gamma(z)]}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2 + t^2} \frac{t}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (5.11)$$

**対数ガンマ関数 (log gamma function)**

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + 2 \int_0^{\infty} \left(\arctan \frac{t}{z}\right) \frac{1}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (5.12)$$

**不完全ガンマ関数 (1) (incomplete gamma function (1))**

$$\Gamma(a, z) = e^{-z} \int_0^{\infty} (z+t)^{a-1} e^{-t} dt \quad (5.13)$$

**不完全ガンマ関数 (2) (incomplete Gamma function (2))**

$$\Gamma(a, z) = \frac{z^a e^{-z}}{\Gamma(1-a)} \int_0^{\infty} \frac{1}{z+t} t^{-a} e^{-t} dt \quad (5.14)$$

## 6 漸近級数の収束する級数への変換

漸近級数もその定義に立ち返れば、これまで述べてきた方法と同様の手順でそれを収束する級数に変換できる場合がある [1]. 例として再び積分指数関数を取り上げる.

ここでも簡単のために (2.1), すなわち

$$F(z) = e^z E_1(z) = \int_0^\infty \frac{1}{t+z} e^{-t} dt \quad (6.1)$$

を考える. いま, 収束性を無視して形式的に項別積分を行うと

$$\begin{aligned} F(z) = e^z E_1(z) &= \int_0^\infty \frac{1}{t+z} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{z} \int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{t}{z}} e^{-t} dt \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$= \frac{1}{z} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} - \frac{t^3}{z^3} + \dots \right) e^{-t} dt \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{z} \left[ 1 - \frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} - \frac{3!}{z^3} + \dots \right] \quad (6.4)$$

となる. 最後の (6.4) は公式集に出ている積分指数関数の漸近級数で, どのような  $z$  に対しても収束しない. その理由は, (6.2) の  $1/(1+t/z)$  を展開した (6.3) の積分の中の級数の収束円が  $|t| < |z|$  であるにもかかわらずその収束円を超えて  $(0, \infty)$  で積分を行っているからと考えることができる (図 8).

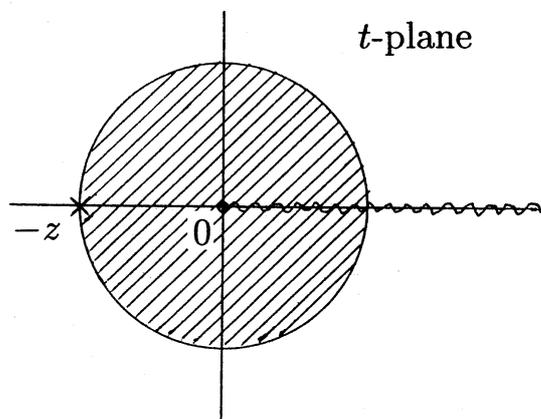


図 8: 級数の収束円と積分路

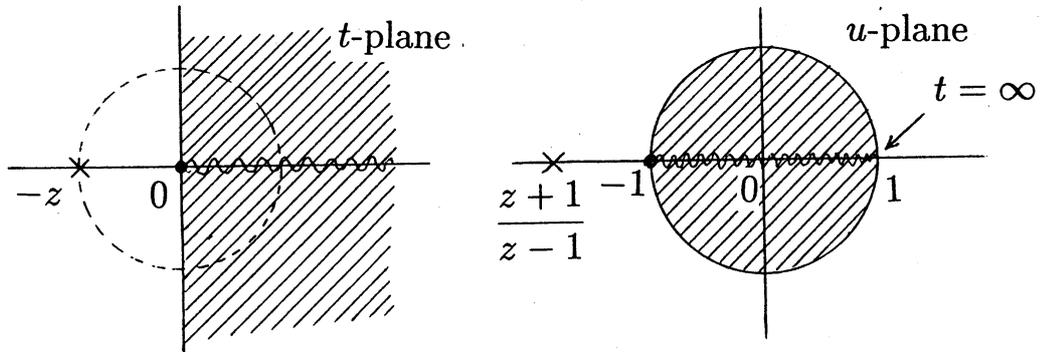
そこで, (6.2), すなわち

$$F(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{t}{z}} e^{-t} dt \quad (6.5)$$

の積分変数  $t$  に対して変数変換

$$t = \phi(u) = \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \phi^{-1}(t) = \frac{t-1}{t+1} \quad (6.6)$$

を行う。この変換によって  $t$ -平面の右半平面  $\operatorname{Re} t > 0$  は  $u$ -平面の単位円の内部  $|u| < 1$  に写像される (図 9)。このとき, (6.2) は



$$\operatorname{Re} t > 0 \iff |u| < 1$$

図 9:  $t = (1+u)/(1-u)$  による写像

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \frac{(1+u)}{z(1-u)}} e^{-\phi(u)} \phi'(u) du \\ &= \frac{1}{z+1} \int_{-1}^1 \frac{1-u}{1 - \frac{z-1}{z+1}u} e^{-\phi(u)} \phi'(u) du \\ &= \frac{1}{2}(1-w) \int_{-1}^1 \frac{1-u}{1-wu} e^{-\phi(u)} \phi'(u) du \end{aligned} \quad (6.7)$$

となる。ただし,

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (6.8)$$

とおいた。ここで,  $\operatorname{Re} z > 0$  のとき  $|w| < 1$  であるから,  $\operatorname{Re} z > 0$  のとき  $-1 < u < 1$  ならば  $|wu| < 1$  である。したがって, 積分 (6.7) の中の  $1/(1-wu)$  はべき級数に展開して  $(-1, 1)$  で項別に積分することができる。この計算を行うと,

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2}(1-w) \int_{-1}^1 (1-u)(1+wu+w^2u^2+\dots) e^{-\phi(u)} \phi'(u) du \\ &= \frac{1}{2}(1-w) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t-1}{t+1}\right) w^k \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^k e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (I_0 - I_1) + \sum_{k=1}^{\infty} (I_{k-1} - 2I_k + I_{k+1}) \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k \right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

となる。ただし,

$$I_k = \int_0^{\infty} \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^k e^{-t} dt \quad (6.10)$$

とおいた. ここで, (6.10) の  $I_k$  と (2.5) の  $J_k$  の間に

$$J_0 = \frac{1}{2}(I_0 - I_1), \quad J_k = \frac{1}{2}(I_{k-1} - 2I_k + I_{k+1}) \quad (6.11)$$

なる関係があることが確かめられる. したがって

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^k \quad (6.12)$$

を得る. すなわち, 漸近級数から出発して, 結局は 2 節で導いた (2.4) と同じ表示を得ることができた.

## 7 最適な変換

3 節で述べた変換の列 (3.1), すなわち

$$z = \phi_m(w_m) = \left( \frac{1+w_m}{1-w_m} \right)^m, \quad w_m = \frac{\sqrt[m]{z}-1}{\sqrt[m]{z}+1}, \quad m > 1 \quad (7.1)$$

において,  $m$  を増していくと収束はさらに加速し, その極限ではいわば最適な変換が導かれることも期待される. この問題は [5], [3] に議論されているが, 実際の計算を行うために解決しなければならない問題が残されている. これらは今後の課題として残しておく.

## 参考文献

- [1] 森正武, 漸近級数の収束級数への変換 — 特殊関数の計算機向き解析的表示, 京都大学数理解析研究所講究録 No.373 (1979) 「数値計算のアルゴリズムの研究」 91-113.
- [2] M. Mori, Analytic representations suitable for numerical computation of some special functions, Numer. Math. 35 (1980) 163-174.
- [3] 杉原正頭, 森正武, 楯円 modular 関数を用いた関数の解析接続について, 京都大学数理解析研究所講究録 No.717 (1990) 「数値解析と科学計算」 76-89.
- [4] 高橋秀俊, 森正武, 変数変換による Taylor 級数の収束の加速, 京都大学数理解析研究所講究録 No.172 (1973) 「数値計算のアルゴリズムの研究」 78-87.
- [5] 高橋秀俊, 複素関数論と数値解析, 京都大学数理解析研究所講究録 No.253 (1975) 「数値解析とコンピュータ」 24-37.
- [6] 高橋秀俊, 森正武, 変数変換を用いた特殊関数の新しい計算法, 京都大学数理解析研究所講究録 No.382 (1980) 「数値計算のアルゴリズムの研究」 39-53.
- [7] H. Takahasi and M. Mori, Analytic continuation of some special functions by variable transformation, Japan J. Appl. Math. 1 (1984) 337-346.