数理解析研究所講究録
1160 巻 2000 年 13-18

On the values of certain q-hypergeometric series

群馬大・工　天羽雅昭 (Masaaki Amou)
慶応大・経済　桂田昌紀 (Masanori Katsurada)

本稿は，オウル大学 (フィンランド) の K. Väänänen 氏との共同研究 [1], [2], [3] の一部の解説です.

1

以下，K は虚 2 次体を表し，q は K の整数で絶対値が 1 より大きいものを表す．また，s は自然数を表し，$P(z)\in K[z]$ は次数が s 以下で $P(0)\neq 0, P(q^{-n})\neq 0\ (n\geq 0)$ を満たす多項式を表す．このとき，整関数 $\phi(z;q)$ を

$$\phi(z;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{-s\binom{n}{2}}}{P(1)P(q^{-1})\cdots P(q^{-(n-1)})}z^{n} \tag{1}$$

で定義する．これが，表題に言う certain q-hypergeometric series である．特に，Tschakaloff 関数

$$T_{q}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{q^{\binom{n+1}{2}}}$$

は，$s=0, P(z)\equiv 1$ の場合の $\phi(qz;q)$ であり，q-指数関数

$$E_{q}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{(q-1)(q^{2}-1)\cdots(q^{n}-1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{q^{n}}\right)$$

は，$s=1, P(z)=q-z$ の場合の $\phi(z;q)$ である．後者は，

$$\lim_{q\to 1}E_{q}((q-1)z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$$

を満たし，この意味で，指数関数の q-アナログになっている．また，$s=2, P(z)=(z-q)^{2}$ の場合は

$$\phi(z;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{(1-q)^{2}(1-q^{2})^{2}\cdots(1-q^{n})^{2}} \tag{2}$$

であるが，$J(z;q):=\phi(-z^{2}/4;q)$ とおくと

$$\lim_{q\to 1}J((1-q)z;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n!)^{2}}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

となり，右辺はベッセル関数 $J_0(z)$ である．この意味で，$J(z;q)$ は $J_0(z)$ の q-アナログになっている．

さて，次節で述べる結果より，$\phi(z;q)$ が K で取る値は大抵 K に属さない．つまり，$\phi(\alpha;q)\in K$ となる $\alpha\in K$ は例外点である．いま，このような例外点全体から自明な例外点 $\alpha=0$ を除いた集合を，$\phi(z;q)$ の例外集合と呼ぶことにしよう．本稿では，$\phi(z;q)$ の例外集合を決定する問題を扱い，それに関する我々の方法および結果について報告する．

2

既知の結果の中から，我々の結果に直接関係する部分だけを取り出して説明する．先ず，Tschakaloff [9] は，$T_q(z)$ の例外集合が空であることを示した．つまり，任意の $\alpha\in K\backslash\{0\}$ に対して $T_q(\alpha)\notin K$ が成り立つ．また，Lototsky [6] は，$E_q(z)$ の例外集合がその零点全体 $\{-q^n \mid n\in \mathrm{N}\}$ であることを示した．これら二つの研究が，q-関数の無理数論 (および超越数論) の出発点であった．一般の $\phi(z;q)$ については，Stihl [8] が，P の次数が s より小さく，$K[z]$ で 1 次式に分解している場合を扱い，$\phi(z;q)$ の除外集合が空であることを示した．その後，Bézivin [4] は，P の次数が s の場合 (を含む，より広いクラスの関数) を考え，$\phi(z;q)$ の除外集合が $\{a_sq^n \mid n\in\mathbf{Z}\}$ の部分集合であることを示した．ここに，a_s は P の s 次の項の係数である．Stihl の方法 (パデ近似を使う) と Bézivin の方法 (関数の有理性判定法を使う) は異なるものであるが，共に関数 $\phi(z;q)$ をそのまま扱う点では共通している．これに対して，我々は，$\phi(z;q)$ の関数値を間接的に扱う方法を見い出した．それを次に述べよう．

3

$\alpha\in K\backslash\{0\}$ を任意に取る．このとき，

$$f(z)=f(z;\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{-s\binom{n}{2}}z^{sn}}{P(q^{-1}z)\cdots P(q^{-n}z)}\alpha^n \tag{3}$$

によって，関数 $f(z)$ を定義する．$f(z;\alpha)$ は原点で正則かつ全平面で有理型な関数で，しかも $\phi(\alpha;q)=f(q)$ を満たす．さらに，$f(z)$ は関数等式

$$P(z)f(qz)=\alpha z^s f(z)+P(z) \tag{4}$$

を満たしていて，これは，$\phi(z;q)$ が満たす関数等式

$$\{P(q\Delta)-z\Delta^s\}\phi(z)=P(q),\quad (\Delta\phi)(z):=\phi(q^{-1}z)$$

よりも簡単である．Duverney [5] によれば，この種の関数等式を満たす関数の値について，次の結果が成り立つ．

定理 1 (Duverney [5]($K = \mathbf{Q}$ の場合) ; [1]) $g(z)$ を，関数等式

$$Q(z)g(qz) = z^s g(z) + R(z), \quad Q, R \in K[z]$$

を満たす原点で正則な関数で，多項式ではないものとする．但し，$Q(0) \neq 0$ かつ Q の次数は s 以下とする．このとき，$\alpha \in K\backslash\{0\}$ が $g(z)$ の極ではないなら，$g(\alpha) \notin K$ が成り立つ．

この結果より，$f(z;\alpha)$ が多項式ではなければ，$\phi(\alpha;q) \notin K$ が分かる．一方，$f(z;\alpha)$ が多項式ならば，$f(z;\alpha) \in K[z]$ となるので，$\phi(\alpha;q) \in K$ が従う．よって，$\alpha \in K$ について

$$\phi(\alpha;q) \in K \Longleftrightarrow f(z;\alpha) \text{ は多項式}$$

という関係が得られる．特に，自明な例外点 $\alpha = 0$ に対しては，$f(z;0) \equiv 1$ が対応する．こうして，$\phi(z;q)$ の除外集合を求める問題は，$f(z;\alpha)$ が多項式になる $\alpha \neq 0$ を決定する問題に帰着される．

この観点から，Stihl および Bézivin の結果を見直してみよう．$\alpha \in K\backslash\{0\}$ とする．このとき，$f(z;\alpha)$ が定数関数ではないことはすぐ分かる．もし，$f(z;\alpha)$ が n (≥ 1) 次の多項式であるとすれば，(4) の両辺の次数を較べて，P の次数は s で，かつ，$\alpha = a_s q^n$ でなければならないことが分かる．ここに，前と同様，a_s は P の s 次の項の係数である．これは，Stihl の結果 (の拡張) および Bézivin の結果 (の改良) を意味する．特に，P の次数が s の場合の結果を改めて書けば，$\alpha \in K\backslash\{0\}$ について

$$\phi(\alpha;q) \in K \Longrightarrow \alpha \in \{a_s q^n \mid n \in \mathrm{N}\} \tag{5}$$

が成り立つ，ということになる．$E_q(z)$ についての Lototsky の結果より，一般には，この結果は最良である．

4

ここで，Lototsky の結果を少し一般化した結果を示そう．$s = 1, P(z) = Az + B$ $(AB \neq 0)$ とする．このとき，(4) の $K[[z]]$ での解を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

とおくと，$f_0=1, f_1=(Bq)^{-1}\alpha$,

$$f_n=(Bq^n)^{-1}(\alpha-Aq^{n-1})f_{n-1} \quad (n\geq 2)$$

となり，$\alpha=Aq^n$ となることが，$f(z)$ が n 次の多項式であるための必要十分条件になることが知られる．よって，この場合には (5) の逆向きの矢印も成り立つ．特に $A=-1, B=q$ の場合が，Lototsky の結果である．さらに，$P(z)=Az^s+B$ $(s\geq 1)$ の場合を考えると，対応する関数は，$s=1$ の場合で q を q^s に置き換えたものに相当するから，$\alpha\in K\backslash\{0\}$ について

$$\phi(\alpha;q)\in K \Longleftrightarrow \alpha\in\{a_s q^{sn}\mid n\in \mathrm{N}\}$$

が成り立つことが分かる．

以上より，$P(z)\neq Az^s+B$ の形の P について考えることが残された問題となる．

5

次の結果は，$P(z)\neq Az^s+B$ を満たす多くの P の場合に，対応する関数の除外集合が空になることを保証する．

定理 2 ([2], [3]) s を 2 以上の整数とし，$a_i(x)$ $(i=0,1,...,s)$ を K の整数係数の多項式で

$$a_{s-1}(1)a_{s-1}(-1)(a_{s-1}^2(-1)-2a_s(-1)a_{s-2}(-1))\neq 0$$

を満たすものとする．また，多項式 $P(z)=P(z;q)$ を

$$P(z)=\sum_{i=0}^{s}a_i z^i, \quad a_i=a_i(q)\ (i=0,1,...,s)$$

で定義し (但し，$a_s(q)a_0(q)\neq 0$ を仮定する)，これに対応する関数を $\phi(z;q)$ とする．このとき，K と $a_i(x)$ のみによる量からエフェクティブに計算できる正定数 C があって，$H(q)\geq C$ ならば，すべての $\alpha\in K\backslash\{0\}$ に対して $\phi(\alpha;q)\notin K$ となる．但し，$H(q)$ は q の高さ (q の $\mathbf{Z}$ 上の最小多項式の係数の絶対値の最大値) である．

証明は，$x_1=1+q, x_2=1-q$ が，K の素点のある有限集合 S に関する S-unit equation $x_1+x_2=2$ を満たすことを示して，2 変数の S-unit equation の解のエフェクティブな有限性に帰着させる (Shorey and Tijdeman [7] 参照)．

定理 2 で $a_i(x)$ $(i = 0, 1, ..., s)$ を 1 組固定すれば，K 毎に $C = C(K)$ が定まることになる．では，これらは実際 K に依存するのであろうか？ これについて考えるために，K を先に与えて，そこに属する q を取る代わりに，q を，有理整数全体または虚 2 次の整数全体を動く変数と考えることにする (但し，$|q| > 1$ を仮定する)．そして，q の値が指定される毎に，それを含む虚 2 次体 K を取ることにする (q が虚 2 次の整数のときは，自動的に $K = \mathbf{Q}(q)$ になる)．このとき「$a_i(x)$ のみによる量からエフェクティブに計算できる正の定数 C で，上の定理の主張を満たすものが存在するか？」という問を設定できる．今のところ，一般の場合については不明であるが，$P(z; q) = (z - q)^2 = z^2 - 2qz + q^2$ の場合に限って言えば，完全解が得られている．最後にそれを述べよう．

6

定理 3 ([3]) q を有理整数または虚 2 次の整数で $|q| > 1$ を満たすものとし，K を q を含む虚 2 次体とする．また，$\phi(z; q)$ を (2) で定義される関数とする．このとき，$\alpha \in K \backslash \{0\}$ について，

$$(q, \alpha) = (-3, -27),\ ((-1 \pm \sqrt{-7})/2, (1 \pm 3\sqrt{-7})/2)$$

の場合を除いて $\phi(\alpha; q) \notin K$ が成り立つ．

さらに，上記 2 つの例外の場合に，ともに α は $\phi(z; q)$ の零点である．

証明は，q 毎に決まる，ある線形数列 $c_n = c_n(q)$ $(n \in \mathbf{N})$ についての問題に帰着される．具体的に述べると，c_n は $c_1 = 1, c_2 = 2,$

$$c_{n+2} = 2c_{n+1} - (1 - q^n)c_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

で定義され，$s = 2, P(z) = (z - q)^2$ の場合について，

$$(4)\ \text{は}\ n\ \text{次の多項式}\ f(z)\ \text{を解に持つ} \iff \alpha = q^n\ \text{かつ}\ c_n = 0$$

という性質を持つ．よって，定理の前半を示すには，上記の (q, α) の場合に限って $c_n = 0$ となることを示せばよい．例えば，$q = -3$ のときは，$c_3 = 0, c_4 = 16, c_5 = 32$ であり，さらに，$n \geq 5$ に対して

$$|c_{n+1}| > 3|c_n|, \quad (3^n - 1)|c_n| > 5|c_{n+1}|$$

が成り立つことを容易に証明できて，例外ペア $(q, \alpha) = (-3, -27)$ を得る．

定理の後半は示すには，それぞれの場合に多項式 $f(z;\alpha)$ を求めて (容易に求まる)，$f(q;\alpha)$ を計算すればよい．

論文 [1] において，定理 1 の quantitative version が与えられている．すなわち，$g(\alpha) \notin K$ の (一つの) 無理数度が計算されている．従って，例外点以外の $\alpha \in K$ での値 $\phi(\alpha;q)$ に対しても，その無理数度が求められている．このことを含めて，詳しいことは原論文を参照して下さい．

参考文献

[1] M. Amou, M. Katsurada, and K. Väänänen, Arithmetical properties of the values of functions satisfying certain functional equations of Poincaré, submitted for publication.

[2] M. Amou, M. Katsurada, and K. Väänänen, On the values of certain q-hypergeometric series, to appear in the "Proceeding of the Turku Symposium on Number Theory in memory of Kustaa Inkeri"

[3] M. Amou, M. Katsurada, and K. Väänänen, On the values of certain q-hypergeometric series II, preprint.

[4] J.-P. Bézivin, Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles, Manuscripta Math. **61** (1988), 103-129.

[5] D. Duverney, Propriétés arithmétiques des solutions de certaines équations fonctionnelles de Poincaré, J. Théorie des Nombres Bordeaux **8** (1996), 443-447.

[6] A. V. Lototsky, Sur l'irrationalité d'un produit infini, Math. Sbornik **12(54)** (1943), 262-272.

[7] T. N. Shorey and R. Tijdeman, Exponential Diophantine Equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[8] Th. Stihl, Arithmetische Eigenschaften spezieller Heinescher Reihen, Math. Ann. **268** (1984), 21-41.

[9] L. Tschakaloff, Arithmetische Eigenschaften der unendrichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}$ I, Math. Ann. **80** (1921), 62-74; II, ibid. **84** (1921),100-114.