数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 34-42

Regularized Siegel-Weil formula について

市野 篤史 (ICHINO, Atsushi) *

Siegel-Weil formula とは Eisenstein 級数と theta 積分の間の等式で, これは Eisenstein 級数が絶対収束するという仮定の元で Weil によって示された [W]. この等式を Eisenstein 級数の絶対収束域の外へ拡張したもののひとつが, Kudla と Rallis による regularized Siegel-Weil formula である [KR2]. 彼等は Eisenstein 級数の留数がある種の theta 関数の積分と定数倍を除いて一致することを示したわけだが, 両者の比までは決定することができなかった. しかし Eisenstein 級数や L 関数の特殊値の研究のためには, この比を決定することが不可欠である. これは池田により二次形式に関するある種の仮定の元で決定され [Ik2], 今回はその仮定も外すことができたので報告したい.

1 主定理

最初に主定理を正確に述べるために, いくつか記号を導入する. k を数体とし, そのアデール環を $\mathbb{A}$ とする. (Q, U) を k 上の m 次元二次形式の空間とする. つまり $Q = {}^tQ \in \mathrm{GL}_m(k)$ で, $U = k^m$ は縦ベクトルの空間とする. $H = O_Q$ を Q の直交群, $G = \mathrm{Sp}_n$ をシンプレクティック群とすると, G と H は reductive dual pair をなす. よって自明でない character $\psi : \mathbb{A}/k \to \mathbb{C}^1$ を固定すると, $\widetilde{G(\mathbb{A})} \times H(\mathbb{A})$ の Weil 表現 ω_Q が Schwartz 空間 $\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ 上に実現される. $\Phi \in \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ に対して, theta 関数を

$$\Theta(g, h; \Phi) = \sum_{u \in U^n(k)} \omega_Q(g, h)\Phi(u), \quad g \in \widetilde{G(\mathbb{A})},\ h \in H(\mathbb{A})$$

によって定義し, さらにその積分

$$I_Q(g, \Phi) = \int_{H(k)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta(g, h; \Phi)\, dh$$

*京都大学大学院理学研究科 (博士 1 年) 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
E-mail address : ichino@kusm.kyoto-u.ac.jp

を考える．この積分が任意の Φ に対して絶対収束する条件は，Weil によって知られている [W]．すなわち，

$$\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))_{\mathrm{abc}} = \{\Phi \mid I_Q(g,\Phi) \text{ は任意の } g \text{ に対して絶対収束}\}$$

とおくと，

$$\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))_{\mathrm{abc}} = \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A})) \iff \begin{cases} Q \text{ は anisotropic,} \\ \text{または } m-r > n+1 \end{cases}$$

となる．但し r は Q の Witt index とする．

P を G の Siegel 放物型部分群，$\widetilde{K}_G$ を $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ の標準的な極大コンパクト部分群とする．$\mathcal{S}(U^n(\mathbb{A}))$ の $\widetilde{K}_G$-finite な元のなす空間を $\mathcal{S}_0(U^n(\mathbb{A}))$ で表す．$\Phi \in \mathcal{S}_0(U^n(\mathbb{A}))$ に対し，退化主系列表現の正則切断を

$$f_\Phi^{(s)}(g) = |a(g)|^{s-s_0}\omega_Q(g)\Phi(0)$$

で定める．但し $s_0 = (m-n-1)/2$ で，$g \in \widetilde{G(\mathbb{A})}$ を

$$g = pk, \quad p = \left(\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}, \zeta\right) \in \widetilde{P(\mathbb{A})},\ k \in \widetilde{K}_G$$

と岩澤分解したときに

$$|a(g)| = |\det a|$$

とする．この時，Eisenstein 級数

$$E(g, f_\Phi^{(s)}) = \sum_{\gamma \in P(k)\backslash G(k)} f_\Phi^{(s)}(\gamma g), \quad g \in \widetilde{G(\mathbb{A})}$$

は $\mathrm{Re}(s) > (n+1)/2$ のとき絶対収束し，全平面に有理型解析接続される．我々は この Eisenstein 級数の $s = s_0$ での挙動に興味がある．

さて $0 < s_0 \leq (n+1)/2$ (つまり $n+1 < m \leq 2n+2$) と仮定する．この時 $E(g, f_\Phi^{(s)})$ は $s = s_0$ で高々 simple pole を持つことが知られている．さらに $m - r \leq n+1$ と仮定し $m' = 2n+2-m$ とおくと，m' 次元二次形式 (Q', U') で Q と同じ Witt 類に属するものが存在する．この Q' を Q の complementary と呼ぶ．ここで Q' が isotropic (つまり $m-r < n+1$) ならば，$\mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))_{\mathrm{abc}} \subsetneq \mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))$ となる．一方 $\mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))_{\mathrm{abc}} \neq 0$ であることも容易に分かる．この時 theta 積分 $I_{Q'}(g, \Phi')$ を $\mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))_{\mathrm{abc}}$ 上

の $H'(\mathbb{A})$ 不変な写像とみなし, この写像を $\mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))$ 全体に $H'(\mathbb{A})$ 不変に一意的に拡張することができる. この拡張を実現するのが, Kudla と Rallis による regularized theta 積分

$$I_{\mathrm{REG},Q'}(g,\Phi') = c_\alpha^{-1} I_{Q'}(g, \omega_{Q'}(\alpha)\Phi')$$

である [KR2]. ここで α はある種の Hecke 作用素でゼロでない "固有値" c_α を持ち, $\omega_{Q'}(\alpha)\Phi' \in \mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A}))_{\mathrm{abc}}$ となるものである. ([KR2] では Hecke 作用素ではなく微分作用素を用いているため, k は実素点を持つと仮定する必要がある.) この時, 主定理は以下のように述べられる.

Theorem. $n+1 < m \le 2n+2$, $m-r \le n+1$ と仮定する. この時 $\Phi \in \mathcal{S}_0(U^n(\mathbb{A}))$ に対し,

$$\mathrm{Res}_{s=s_0} E(g, f_\Phi^{(s)}) = c_K I_{\mathrm{REG},Q'}(g, \pi_Q^{Q'} \pi_K \Phi)$$

が成り立つ. 但し

$$\begin{aligned} \pi_Q^{Q'} &: \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A})) \longrightarrow \mathcal{S}(U'^n(\mathbb{A})) \\ \pi_K &: \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A})) \longrightarrow \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A})) \end{aligned}$$

は $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ 準同型で次のように定義される:

$$\pi_Q^{Q'}\Phi(u') = \int_{M_{r_0,n}(\mathbb{A})} \Phi\begin{pmatrix} x \\ u' \\ 0 \end{pmatrix} dx,$$

$$\pi_K\Phi(u) = \int_K \Phi(ku)\, dk.$$

但し座標は

$$Q = \begin{pmatrix} & & 1_{r_0} \\ & Q' & \\ 1_{r_0} & & \end{pmatrix}, \quad r_0 = m-n-1$$

ととり, K は $H(\mathbb{A})$ のよい極大コンパクト部分群である. また c_K は Haar 測度の正規化から定まる定数で, 池田 [Ik2] によって具体的に計算されており, ある種の L 関数の特殊値等によって表せる.

Remark. k が総実, m が偶数ならば, この定理は Kudla と Rallis による regularized Siegel-Weil formula [KR2] の精密化になっている. また Q' が anisotropic のときは既に池田 [Ik2] によって示されている.

2 Fourier-Jacobi係数

主定理を証明するために, 両辺の Fourier-Jacobi 係数を比較することを考える. 実際 Q' が anisotropic のときは, このような方針で主定理は示されている [Ik2].

最初に Fourier-Jacobi 係数の理論を復習する [Ik1]. $G = \mathrm{Sp}_n$ の部分群を次のように定める:

$$V = \left\{ v(x,y,z) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x & z & y \\ & 1_{n-1} & {}^t y & \\ \hline & & 1 & \\ & & -{}^t x & 1_{n-1} \end{array} \right) \middle| \; x, y \in k^{n-1}, z \in k \right\},$$

$$Z = \{ v(0,0,z) \in V \mid z \in k \},$$

$$L = \{ v(x,0,0) \in V \mid x \in k^{n-1} \},$$

$$G_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & a & & b \\ \hline & & 1 & \\ & c & & d \end{array} \right) \middle| \; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{n-1} \right\}.$$

この時 V は Heisenberg 群でその中心は Z である. 各 $S \in k^\times$ に対し, $V(\mathbb{A})$ の Schrödinger 表現 ω_S で central character が $z \mapsto \psi(zS/2)$ となるものが, Schwartz 空間 $\mathcal{S}(L(\mathbb{A}))$ 上に実現される. 具体的には, $\phi \in \mathcal{S}(L(\mathbb{A}))$ に対し

$$\omega_S(v(x,y,z))\phi(t) = \phi(t+x)\psi((z + 2t{}^t y + x{}^t y)S/2)$$

と表せる. さらに $\widetilde{G_1(\mathbb{A})}$ は $V(\mathbb{A})$ に共役で作用しているので, ω_S を自然に $V(\mathbb{A}) \rtimes \widetilde{G_1(\mathbb{A})}$ の $\mathcal{S}(L(\mathbb{A}))$ 上の Weil 表現に拡張できる. $\widetilde{K}_{G_1}$ を $\widetilde{G_1(\mathbb{A})}$ の標準的な極大コンパクト部分群とし, $\mathcal{S}(L(\mathbb{A}))$ の $\widetilde{K}_{G_1}$-finite な元のなす空間を $\mathcal{S}_0(L(\mathbb{A}))$ とおく. $\phi \in \mathcal{S}(L(\mathbb{A}))$ に対し, theta 関数を

$$\vartheta_S^\phi(vg_1) = \sum_{t \in L(k)} \omega_S(vg_1)\phi(t), \quad v \in V(\mathbb{A}), g_1 \in \widetilde{G_1(\mathbb{A})}$$

によって定義する.

A を $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ 上の保型形式とする. $S \in k^\times$ と $\phi \in \mathcal{S}_0(L(\mathbb{A}))$ に対し, $\widetilde{G_1(\mathbb{A})}$ 上の保型形式を

$$\mathrm{FJ}_S^\phi(g_1; A) = \int_{V(k)\backslash V(\mathbb{A})} A(vg_1)\overline{\vartheta_S^\phi(vg_1)}\, dv$$

で定める．これを A の Fourier-Jacobi 係数と呼ぶ．

まず Eisenstein 級数の留数の Fourier-Jacobi 係数だが，これは池田により計算されている．

$$Q = \begin{pmatrix} S & \\ & Q_1 \end{pmatrix}$$

と仮定してよく，対応する直交分解を $U = k \oplus U_1$ で表す．また $\widetilde{G_1(\mathbb{A})}$ 準同型

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(U^n(\mathbb{A})) \otimes \mathcal{S}(L(\mathbb{A})) &\longrightarrow \mathcal{S}(U_1^{n-1}(\mathbb{A})) \\ \Phi \otimes \phi &\longmapsto \Psi(\Phi, \phi) \end{aligned}$$

を

$$\Psi(\Phi, \phi; u) = \int_{x \in L(\mathbb{A})} \Phi \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & u \end{pmatrix} \overline{\phi(x)}\, dx$$

によって定義する．

Proposition ([Ik2, Proposition 7.3]). 簡単のため $n \geq 3$ と仮定する．この時 $\phi \in \mathcal{S}_0(L(\mathbb{A}))$ と $\Phi \in \mathcal{S}_0(U^n(\mathbb{A}))$ に対し，

$$\mathrm{FJ}_S^{\phi}(g_1; \mathrm{Res}_{s=s_0} E(f_{\Phi}^{(s)})) = \int_{H_1(\mathbb{A}) \backslash H(\mathbb{A})} \mathrm{Res}_{s=s_0} E(g_1, f^{(s)}_{\Psi(\omega_Q(h)\Phi, \phi)})\, dh$$

が成り立つ．

次に theta 積分の Fourier-Jacobi 係数を計算する．(Q, U) を m 次元二次形式で $m \leq n$ と仮定する．Q が anisotropic ならば，theta 積分の Fourier-Jacobi 係数は [Ik2, §6] で計算されている．我々は isotropic な Q に対して regularized theta 積分の Fourier-Jacobi 係数

$$\begin{aligned} &\mathrm{FJ}_S^{\phi}(g_1; I_{\mathrm{REG},Q}(\Phi)) \\ &= c_{\alpha}^{-1} \int_{V(k) \backslash V(\mathbb{A})} \int_{H(k) \backslash H(\mathbb{A})} \Theta(vg_1, h; \omega_Q(\alpha)\Phi) \overline{\vartheta_S^{\phi}(vg_1)}\, dh\, dv. \end{aligned}$$

を計算したい．[Ik2, Lemma 6.1] にあるように，

$$\begin{aligned} &\int_{V(k) \backslash V(\mathbb{A})} \Theta(vg_1, h; \omega_Q(\alpha)\Phi) \overline{\vartheta_S^{\phi}(vg_1)}\, dv \\ &= \sum_{\gamma \in H_1(k) \backslash H(k)} \sum_{u \in U_1^{n-1}(k)} \omega_{Q_1}(g_1) \Psi(\omega_Q(\gamma h) \omega_Q(\alpha)\Phi, \phi; u) \end{aligned}$$

となることはすぐに計算できる．次にこれを $H(k)\backslash H(\mathbb{A})$ 上積分する．しかし，この積分は (条件収束はしているが) 項ごとには絶対収束しないという困難が生じる．つまり

$$\int_{H(k)\backslash H(\mathbb{A})} \sum_{H_1(k)\backslash H(k)} = \int_{H_1(k)\backslash H(\mathbb{A})} = \int_{H_1(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} \int_{H_1(k)\backslash H_1(\mathbb{A})}$$

と式変形したいのだが，Q が anisotropic でない限りそれは正当化されない．よって Q が isotoropic ならば，regularized theta 積分の Fourier-Jacobi 係数を計算しきることはできない．この困難を回避するためには，さらに Fourier 係数を調べる必要がある．$\beta \in \mathrm{Sym}_{n-1}(k)$ に対し，$\mathrm{FJ}_S^{\phi}(g_1; I_{\mathrm{REG},Q}(\Phi))$ の β 番目の Fourier 係数 $\mathrm{FJ}_{S,\beta}^{\phi}(g_1; I_{\mathrm{REG},Q}(\Phi))$ は，

$$c_\alpha^{-1} \int_{H(k)\backslash H(\mathbb{A})} \left[\sum_{\gamma \in H_1(k)\backslash H(k)} \sum_{{}^t u Q_1 u = 2\beta} \omega_{Q_1}(g_1)\Psi(\omega_Q(\gamma h)\omega_Q(\alpha)\Phi, \phi; u) \right] dh$$

となる．すると，この積分は $\mathrm{rank}\,\beta \geq m-1$ ならば，項ごとに絶対収束することが示せる．従って上の式変形は正当化することができて，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{FJ}_{S,\beta}^{\phi}(g_1; I_{\mathrm{REG},Q}(\Phi)) \\
&= c_\alpha^{-1} \int_{H_1(k)\backslash H(\mathbb{A})} \sum_{{}^t u Q_1 u = 2\beta} \omega_{Q_1}(g_1)\Psi(\omega_Q(h)\omega_Q(\alpha)\Phi, \phi; u)\, dh \\
&= \int_{H_1(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} \int_{H_1(k)\backslash H_1(\mathbb{A})} \sum_{{}^t u Q_1 u = 2\beta} \omega_{Q_1}(g_1, h_1)\Psi(\omega_Q(h)\Phi, \phi; u)\, dh_1\, dh \\
&= \int_{H_1(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} I_{\mathrm{REG},Q_1,\beta}(g_1, \Psi(\omega_Q(h)\Phi, \phi))\, dh
\end{aligned}$$

と計算することができる．さらに [Ik2, Proposition 6.2] と同様に計算を進めると，次を得る．

Proposition. (Q,U) を m 次元二次形式として $n+1 < m \leq 2n+2$, $m-r < n+1$ と仮定する．(Q',U') を Q の complementary とする．Q' は isotropic だから，

$$Q' = \begin{pmatrix} S & \\ & Q_1' \end{pmatrix}$$

としてよい. $Q_1 = Q_1' \oplus \mathcal{H}^{r_0}$ とおく. この時 $\beta \in \mathrm{Sym}_{n-1}(k)$ で $\mathrm{rank}\,\beta \geq m'-1$ となるものに対し,

$$\begin{aligned}&\mathrm{FJ}^{\phi}_{S,\beta}(g_1; I_{\mathrm{REG},Q'}(\pi^{Q'}_{Q}\pi_K\Phi))\\&= c_K^{-1}c_{K_1}\int_{H_1(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} I_{\mathrm{REG},Q_1',\beta}(g_1, \pi^{Q_1'}_{Q_1}\pi_{K_1}\Psi(\omega_Q(h)\Phi,\phi))\,dh\end{aligned}$$

が成り立つ.

さて $\Phi \in \mathcal{S}_0(U^n(\mathbb{A}))$ に対して,

$$A(g) = A(g,\Phi) = \mathrm{Res}_{s=s_0}E(g, f^{(s)}_{\Phi}) - c_K I_{\mathrm{REG},Q'}(g, \pi^{Q'}_{Q}\pi_K\Phi)$$

とおき, $A=0$ を n に関する帰納法で示す. Q' が anisotropic のときは, 既にこれは池田によって示されている [Ik2]. また $Q' \simeq \mathcal{H}$ ならば, 直接計算で示すことができる. (両辺とも Levi が $\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Sp}_{n-1}$ となる Sp_n の放物型部分群からの Eisenstein 級数の特殊値になる.) よって Q' は isotropic, $m' \geq 3$, $n \geq 3$, かつ $n+1 < m \leq 2n-1$ と仮定してよい. $S \in k^{\times}$ と $\beta \in \mathrm{Sym}_{n-1}(k)$ で $\mathrm{rank}\,\beta \geq m'-1$ となるものに対して, 上の命題と帰納法の仮定により,

$$\mathrm{FJ}^{\phi}_{S,\beta}(g_1; A) = 0$$

となることが分かる. さらに次の補題を示すことができる.

Lemma. $S \in k^{\times}$, $\beta \in \mathrm{Sym}_{n-1}(k)$ とする. A を $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ 上の保型形式とする. 任意の $\phi \in \mathcal{S}_0(L(\mathbb{A}))$ と $f \in \mathcal{H}(\widetilde{G(\mathbb{A})})$ に対し, $\mathrm{FJ}^{\phi}_{S,\beta}(g_1; \rho(f)A) = 0$ と仮定する. 但し $\mathcal{H}(\widetilde{G(\mathbb{A})})$ は $\widetilde{G(\mathbb{A})}$ の Hecke 環で, ρ は右移動を表す. この時

$$B = \begin{pmatrix} S/2 & \\ & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_n(k)$$

とすると, A の B 番目の Fourier 係数 A_B はゼロ.

ゆえに任意の $B \in \mathrm{Sym}_n(k)$ で $\mathrm{rank}\,B \geq m'$ となるものに対して, $A_B = 0$ となることが分かる.

3 保型形式のランク

主定理を示すためには, $A = A(\Phi)$ の大域的なランクと局所的なランクを比較する必要がある [H]. $\Phi^0 = \otimes_v \Phi_v^0 \in \mathcal{S}_0(U^n(\mathbb{A}))$ と k の有限素点 v を固定し, Φ^0 の v 成分だけを動かす. つまり $\widetilde{G}_v$ 準同型

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(U_v^n) &\longrightarrow \mathcal{A}(G) \\ \Phi_v &\longmapsto A(\Phi), \quad \Phi = \Phi_v \otimes \otimes_{v' \neq v} \Phi_{v'}^0 \end{aligned}$$

を考える. ここで $\mathcal{A}(G)$ は $\widetilde{G}(\mathbb{A})$ 上の保型形式のなす空間である. さて自然な $\widetilde{G}_v$ 準同型

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(U_v^n) &\longrightarrow \operatorname{Ind}_{\widetilde{P}_v}^{\widetilde{G}_v} \chi_{Q_v} |\det|^{s_0} \\ \Phi_v &\longmapsto [g \mapsto \omega_{Q_v}(g)\Phi_v(0)] \end{aligned}$$

の像を $R_n(U_v)$ とおく. 但し $\chi_{Q_v} : \widetilde{P}_v \to \mathbb{C}^1$ は Q_v から定まる character とする. 同様にして $R_n(U_v') \subset \operatorname{Ind}_{\widetilde{P}_v}^{\widetilde{G}_v} \chi_{Q_v} |\det|^{-s_0}$ も定義する.

まず Kudla, Rallis, Sweet による退化主系列表現の結果 [KR1, S] を用いると, Eisenstein 級数の留数 $\operatorname{Res}_{s=s_0} E(f_\Phi^{(s)})$ は

$$\mathcal{S}(U_v^n) \longrightarrow R_n(U_v) \xrightarrow{M_v^*(s_0)} R_n(U_v') \longrightarrow \mathcal{A}(G) \tag{1}$$

を経由することが示せる. 但し $M_v^*(s_0)$ は正規化された絡作用素から誘導される写像である. 一方 Rallis による invariant distribution theorem [R] より, regularized theta 積分 $I_{\mathrm{REG},Q'}(\pi_Q^{Q'} \pi_K \Phi)$ は

$$\mathcal{S}(U_v^n) \xrightarrow{\pi_{Q_v}^{Q_v'} \pi_{K_v}} \mathcal{S}(U_v'^n) \longrightarrow R_n(U_v') \longrightarrow \mathcal{A}(G) \tag{2}$$

を経由する. さらに (1) と (2) は定数倍を除いて一致することも示すことができる. ゆえに $A(\Phi)$ は

$$\mathcal{S}(U_v^n) \longrightarrow R_n(U_v') \longrightarrow \mathcal{A}(G)$$

を経由することが分かる. 一方 $R_n(U_v')$ は $\widetilde{G}_v$ の既約表現で, そのランクは m' であることが知られている [KR1, S]. よって $f \in \mathcal{S}(\mathrm{Sym}_n(k_v))$ で, その Fourier 変換 $\hat{f}$ は

$$\{x \in \mathrm{Sym}_n(k_v) \mid \operatorname{rank} x \geq m'\}$$

に support を持ち, f は $R_n(U'_v)$ にゼロで作用しないものが存在する. この時, 任意の $B \in \mathrm{Sym}_n(k)$ と $g = ((g_{v'}), \zeta) \in \widetilde{G(\mathbb{A})}$ で $g_v = 1$ となるものに対し,

$$(\rho(f)A(\Phi))_B(g) = \hat{f}(B)A(\Phi)_B(g) = 0$$

となる. 実際 $\mathrm{rank}\, B \geq m'$ ならば $A(\Phi)_B = 0$ で, $\mathrm{rank}\, B < m'$ ならば $\hat{f}(B) = 0$ となる. さらに $G(k)$ は G_v で dense だから $\rho(f)A(\Phi) = 0$ で, f は $R_n(U'_v)$ にゼロで作用せず $R_n(U'_v)$ は既約だから, 結局 $A(\Phi) = 0$ となり主定理を得る.

参考文献

[H] R. Howe, *Automorphic forms of low rank*, Noncommutative harmonic analysis and Lie groups,. Lecture Notes in Math. 880, Springer, 1981, pp. 211–248.

[Ic] A. Ichino, *On the regularized Siegel-Weil formula*, preprint, 2000.

[Ik1] T. Ikeda, *On the theory of Jacobi forms and Fourier-Jacobi coefficients of Eisenstein series*, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994), 615–636.

[Ik2] T. Ikeda, *On the residue of the Eisenstein series and the Siegel-Weil formula*, Compositio Math. **103** (1996), 183–218.

[KR1] S. S. Kudla and S. Rallis, *Ramified degenerate principal series representations for* $\mathrm{Sp}(n)$, Israel J. Math. **78** (1992), 209–256.

[KR2] S. S. Kudla and S. Rallis, *A regularized Siegel-Weil formula: the first term identity*, Ann. of Math. **140** (1994), 1–80.

[R] S. Rallis, *On the Howe duality conjecture*, Compositio Math. **51** (1984), 333–399.

[S] W. J. Sweet, Jr., *Functional equations of p-adic zeta integrals and representations of the metaplectic group*, preprint, 1995.

[W] A. Weil, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*, Acta Math. **113** (1965), 1–87.