

**Lifshitz Tail for 2D Discrete Schrödinger Operator
with Random Magnetic Field**
(ランダムな磁場を持つ2次元離散シュレディンガー作用素の Lifshitz 特異性)

東京大学数理 中村周 (Shu Nakamura)

この講演においては、2次元整数格子 \mathbb{Z}^2 上で定義された、ランダムな磁場を持つ離散的シュレディンガー作用素の状態密度 (the integrated density of states) の、スペクトルの下端での Lifshitz 特異性について論ずる。これは、スペクトルの下端に近いエネルギーを持つ粒子は極めて希だ、という物理的主張に対応している。この結果の詳細は、[3] に出版される予定である。

§1. 序

最初に、(普通の) 離散的シュレディンガー作用素の定義を思い出しておこう。 $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ ($d \geq 1$) に対して、

$$H\psi(x) = \sum_{|x-y|=1} (\psi(x) - \psi(y)) + V(x)\psi(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d$$

でハミルトニアンが定義される。磁場のある場合は、以下の説明のように拡張される。まず、ベクトル・ポテンシャルを $A = A(e)$ とおく。ただし、 e はエッジの集合：

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}^d, |x - y| = 1\}$$

の元であるとする。さらに、 A は $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ に値をとる関数、つまり $A: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{T}$ であると考えられる。また、

$$A(\bar{e}) = -A(e)$$

を仮定する。ただし、 $\bar{e} = (y, x)$ は $e = (x, y)$ の反対向きのエッジである。すると、磁場のある場合の離散的シュレディンガー作用素 (discrete magnetic Schrödinger operator) は、次のように定義される。

$$H\psi(x) = \sum_{|x-y|=1} (\psi(x) - e^{iA((x,y))}\psi(y)) + V(x)\psi(x).$$

以下では、 $d = 2$, $V(x) = 0$ の場合だけを考えることにする。

二次元平面の、単位面の集合を

$$\mathcal{F} = \{[x_1, x_1 + 1] \times [x_2, x_2 + 1] \subset \mathbb{R}^2 \mid x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2\}$$

とおこう。 $f = [x_1, x_1 + 1] \times [x_2, x_2 + 1] \in \mathcal{F}$ に対して、その(向きづけられた)境界 $\partial f \subset \mathcal{E}$ を

$$\partial f = \{(x, x + \delta_1), (x + \delta_1, x + \delta_1 + \delta_2), (x + \delta_1 + \delta_2, x + \delta_2), (x + \delta_2, x)\}$$

と定義する. ただし, $x = (x_1, x_2)$, $\delta_1 = (1, 0)$, $\delta_2 = (0, 1)$ である.

ベクトル・ポテンシャル A に対応する磁場 B は, \mathcal{F} 上の \mathbb{T} に値を持つ関数

$$B(f) = \sum_{e \in \partial f} A(e), \quad f \in \mathcal{F}$$

として定義される. シュレディンガー作用素 H のスペクトルやその性質は, 磁場 B にのみで決まり, ベクトル・ポテンシャル A には直接依らないことが知られている. つまり, ふたつのベクトル・ポテンシャル A_1, A_2 があって対応する磁場が同じであるとすれば, ゲージ変換とよばれるかけ算作用素が存在して, それにより対応するシュレディンガー作用素はユニタリー同値になる.

Anderson 型モデル: この講演で考えるモデルは, 磁場 B が Anderson 型のランダム磁場である場合である. つまり, 磁場が, 確率空間 Ω 上の, 磁場に値を持つ関数 $B = B_\omega$ で与えられ, 確率変数の集合 $\{B_\omega(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ が独立同分布 (i.i.d.) である場合を考える. このとき, $H = H_\omega$ は, ランダム・シュレディンガー作用素の一般論で言うエルゴード的作用素となるので, 一般論から, H_ω のスペクトルは確率 1 である一定の集合になり, スペクトルの性質も確率 1 で一致することが従う. さらに, この分野でよく知られた手法により, 状態密度 (the integrated density of states, IDS) が存在することが分かる. つまり,

$$k(E) = \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} \#\{\text{eigenvalues of } H_\omega^{\Lambda_L} \leq E\}$$

が存在する. ここで, Λ_L は \mathbb{Z}^2 の中の一辺が長さ $2L$ の正方形

$$\Lambda_L = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leq L\}, \quad |\Lambda_L| = \#\{\Lambda_L\},$$

$H_\omega^{\Lambda_L}$ は H_ω の $\ell(\Lambda_L)$ への制限である. $dk(E)$ のサポートは, $\sigma(H_\omega)$ と一致することが知られている. この講演の主題は, $k(E)$ の $\inf \sigma(H_\omega)$ の近くでの挙動を調べることである. そこで, $B_\omega(f)$ の分布について, 以下のような仮定をする. $f \in \mathcal{F}$ を止めたときの, $B_\omega(f)$ の (\mathbb{T} 上の) 分布を $d\mu$ と書くことにする.

仮定 A. (1) $d\mu$ は $\{0\}$ 上の点測度ではない.

(2) 定数, $C, a > 0$ が存在して,

$$d\mu([-\varepsilon, \varepsilon]) \geq C\varepsilon^a, \quad \varepsilon > 0$$

が成立する.

定理 1 ([3]). 仮定 A のもとで, 次の評価が成り立つ.

$$\lim_{E \rightarrow 0} \log(-\log k(E)) / \log E = -1.$$

つまり, 任意の $\delta > 0$ に対して $E_0 > 0$ が存在して, $0 < E < E_0$ ならば

$$\exp(-E^{-1+\delta}) \leq k(E) \leq \exp(-E^{-1-\delta})$$

が成り立つ.

注意. (1) この形の評価は, Lifshitz tail, または Lifshitz 特異性と呼ばれ, ランダム・ポテンシャルを持つシュレディンガー作用素の場合については, Pastur, Nakao, Kirsch-Martinelli 等により, 多くの場合に証明されている ([2, 1] 参照).

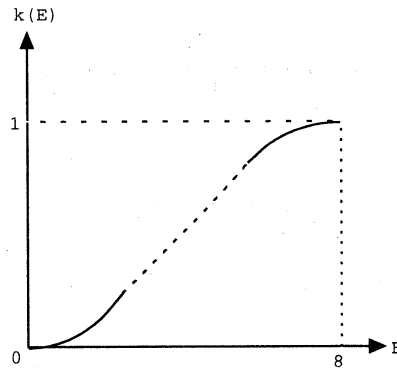


図 1: $k(E)$ の $E \sim 0$ と $E \sim 8$ での様子

- (2) ランダムな磁場を持つ, 連続な (\mathbb{R}^d 上の) シュレディンガー作用素についても, 同様の結果が成立する. ガウス型の分布の場合については上木 [6], また一般の場合については中村 [4] を参照せよ.
- (3) 我々の仮定の下で, H のスペクトルは確率 1 で $\sigma(H) = [0, 8]$ となる. 定理で述べられたような, IDS のスペクトルの下端での挙動は, 上端, つまり $E = 8$ においても成立する. $E > 8$ では $k(E) = 1$ なので, おおざっぱに言えば, $1 - k(E) \sim O(e^{-1/(8-E)})$ となる (図 1 参照).

証明の枠組み: 証明は, 次のような三つの要素から成り立っている.

1. 局所エネルギー評価: 磁場から決まる非負の関数 $W_B(x)$ が構成できて, $H \geq W_B(x)$ が成立する.
2. Dirichlet-Neumann decoupling: 有界領域上の, 磁場がある離散シュレディンガー作用素に「境界条件」を適当に定義して, 連続なシュレディンガー作用素における Dirichlet-Neumann decoupling に対応する評価を得る. この部分は, B. Simon [5] の拡張になっている.
3. Large deviation argument: Lifshitz tail の理論では必ず使われる, 「大偏差原理」のひとつの例になっている. ほとんど, Simon の論文 [5] と同じなので簡単に述べる.

記号: この講演録では, 以下のような記号を用いる. 内積は,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \overline{\varphi(x)} \psi(x), \quad \varphi, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2),$$

と書く. また, $e \in \mathcal{E}$ のとき, $e = (x, y)$ の始点と終点をそれぞれ $i(e) = x$, $t(e) = y$ で表す. 確率空間 Ω や ω に対応する確率測度を $\mathbb{P}(\cdot)$, 期待値を $\mathbb{E}(\cdot)$ で表す. しばしば, 確率空間のパラメーター $\omega \in \Omega$ は省略する. 集合 A の元の個数を $\#A$ で表す.

§2. 局所エネルギー評価

ここでは, (Anderson 型モデルに限らず), 一般の磁場 $B(x)$ を持つ離散的シュレディンガー作用素をひとつ固定して考える. このとき, スカラー関数 $W_B(x)$ を

$$W_B(x) = \sum_{x \in f} \left(1 - \cos \left(\frac{B(f)}{4} \right) \right), \quad x \in \mathbb{Z}^2$$

と定義する. ただし, $B(f)$ は \mathbb{T} の元であるから, $B(f)/4$ は自然には定義されていない. ここで

は、 $\mathbb{T} \simeq [-\pi, \pi)$ とみなして割り算を実行している。したがって $B(f)/4 \in [-\pi/4, \pi/4)$ であり、

$$1 - \cos\left(\frac{B(f)}{4}\right) \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が常に成立する。

定理 2. $H \geq W_B(x)$. つまり、任意の $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ に対して、

$$\langle \psi, H\psi \rangle \geq \langle \psi, W_B\psi \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} W_B(x) |\psi(x)|^2.$$

略証. $\langle \psi, H\psi \rangle$ を書き換えると、

$$\begin{aligned} \langle \psi, H\psi \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \left| \psi(i(e)) - e^{iA(e)} \psi(t(e)) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{f \in \mathcal{F}} \left(\sum_{e \in \partial f} \left| \psi(i(e)) - e^{iA(e)} \psi(t(e)) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

となる。

さて、 $x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Z}^2$ と $e_1, \dots, e_4 \in \mathcal{E}$ を図2のように決め、上の式の右辺の (\dots) を計算しよう。

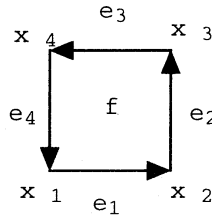


図2: x_1, \dots, x_4 と e_1, \dots, e_4 の取り方

$j = 1, \dots, 4$ に対して、

$$A(e_j) = \theta_j, \quad u_j = \psi(x_j)$$

とおく. $B(f) = \sum \theta_j$ であることに注意しよう. すると、ある行列 h_θ が存在して

$$\left(\dots \right) = \overline{(u_1, \dots, u_4)} h_\theta \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_4 \end{pmatrix}$$

と書けるが、簡単な計算で、 h_θ は以下のような行列とユニタリ同値であることが分かる。

$$h_\theta \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -e^{-iB(f)} \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -e^{iB(f)} & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

この行列の固有値, 固有関数は簡単に計算できて,

$$\sigma(h_\theta) = \left\{ 2 \left(1 - \cos \left(\frac{B(f) + 2\pi j}{4} \right) \right) \mid j = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

となる. したがって特に,

$$h_\theta \geq 2 \left(1 - \cos \left(\frac{B(f)}{4} \right) \right)$$

であることが分かる. これを上のに代入すると,

$$\left(\dots \right) \geq 2 \left(1 - \cos \left(\frac{B(f)}{4} \right) \right) \sum_{x \in f} |\psi(x)|^2$$

となる. これを $f \in \mathcal{F}$ に関して足しあわせて, 定理の不等式が導かれる. □

実はこの評価は最適である. つまり, この不等式が等号で成立するような磁場が存在する.

例 1. $b \in (-\pi, \pi)$ とする. $f = [x_1, x_1 + 1] \times [x_2, x_2 + 1]$ に対して,

$$B(f) = \begin{cases} b, & x_1 + x_2 \text{ が偶数の時,} \\ -b, & x_1 + x_2 \text{ が奇数の時,} \end{cases}$$

とおくと, このモデルは厳密に解けて,

$$\sigma(H) = [4(1 - \cos(b/4)), 4(1 + \cos(b/4))]$$

であることが分かる. この場合は, $W_B(f) = 1 - \cos(b/4)$ であるから, $\inf \sigma(H)$ と等しい.

一方, 次のような離散的な場合の「加藤の不等式」が成立する. 証明は, ほとんど自明に近い.

補題 3.

$$\langle \psi, H\psi \rangle \geq \langle |\psi|, H_0|\psi| \rangle, \quad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2).$$

ただし, H_0 は自由なシュレディンガー作用素 ($V = A = 0$ としたハミルトニアン) である.

証明. 定理 2 の証明の計算と同様に,

$$\begin{aligned} \langle \psi, H\psi \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} |\psi(i(e)) - e^{iA(e)} \psi(t(e))|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}} \left| |\psi(i(e))| - |\psi(t(e))| \right|^2 = \langle |\psi|, H_0|\psi| \rangle \end{aligned}$$

□

これらを用いて, 次のようなスペクトルに関する結果を得る.

補題 4.

$$\inf \sigma(H) \geq \frac{1}{2} \inf \sigma(H_0 + W_B).$$

§3. Dirichlet-Neumann bracketing

今回は, Dirichlet-Neumann bracketing を, 正方形分割の場合に限定して定義しておこう. $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ をパラメーターとする, 大きさ L の正方形を

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid L\alpha_j \leq x_j < L(\alpha_j + 1), j = 1, 2\}$$

と定義する. すると \mathbb{Z}^2 と $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ は

$$\mathbb{Z}^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} S_\alpha, \quad \ell^2(\mathbb{Z}^2) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \ell^2(S_\alpha)$$

と分割される. 境界の集合を

$$\Sigma = \{e \in \mathcal{E} \mid e \notin S_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^2\}$$

とする. $e \in \mathcal{E}$ に対して, 作用素 L_e^\pm を

$$L_e^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\psi(x) \pm e^{-iA(e)} \psi(t(e)) \right), & x = i(e) \text{ の場合,} \\ \frac{1}{2} \left(\psi(x) \pm e^{iA(e)} \psi(t(e)) \right), & x = t(e) \text{ の場合,} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定義すれば,

$$H = \sum_{e \in \mathcal{E}} L_e^-, \quad L_e^\pm \geq 0,$$

が成立し, また $L_e^+ + L_e^-$ は対角行列 (作用素) である. Neumann 作用素 $\tilde{H}^{L;N}$ と Dirichlet 作用素 $\tilde{H}^{L;D}$ を, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{L;N} &= H - \sum_{e \in \Sigma} L_e^- = \sum_{e \notin \Sigma} L_e^-, \\ \tilde{H}^{L;D} &= H + \sum_{e \in \Sigma} L_e^+. \end{aligned}$$

すると, $\tilde{H}^{L;N}, \tilde{H}^{L;D}$ は Σ の元に対応する成分を持たないので, 各 $\ell^2(S_\alpha)$ に独立に作用する. 言い換えると, これらの作用素は $\bigoplus_\alpha \ell^2(S_\alpha)$ の分割と交換する. そこで,

$$\tilde{H}^{L;N} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} H_\alpha^{L;N}, \quad \tilde{H}^{L;D} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} H_\alpha^{L;D} \quad \text{on} \quad \ell^2(\mathbb{Z}^2) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \ell^2(S_\alpha)$$

とおくことにする. 一方,

$$\tilde{H}^{L;N} \leq H \leq \tilde{H}^{L;D}$$

が成立する. そこで,

$$k_L^b(E) = \frac{1}{L^2} \mathbb{E} \left(\#\left\{ \text{eigenvalues of } \tilde{H}^{L;b} \leq E \right\} \right), \quad (b = N \text{ または } D)$$

と定義すると, B_ω のエルゴード性から $k_L^b(E)$ は $\tilde{H}^{L;b}$ の IDS となる. さらに, 上に注意した作用素の大小関係から,

$$k_L^D(E) \leq k(E) \leq k_L^N(E)$$

が成立することが分かる。これにより、 $k(E)$ の上限と下限が得られたから、 L を適当に選んで評価をする、と言う方針で定理 1 を証明する。

§4. 定理 1 の証明

(1) **Lower bound:** 最初に、易しい方の下限を証明する。十分小さな $E > 0$ に対して、 L を

$$L \sim \frac{2\pi}{\sqrt{E}}$$

であるように取る。仮定より、

$$\mathbb{P}\left(|B(f)| \leq \frac{E}{8L}, \forall f \in S_0\right) \geq \left[c\left(\frac{E}{8L}\right)^a\right]^{L^2}$$

が成立する。一方、 $|B(f)| \leq E/8L$ がすべての $f \in S_0$ について成立しているとする、 S_0 上のベクトル・ポテンシャル $A(e)$ で $|A(e)| \leq E/8$ であるようなものが存在する。すると、

$$\|H^{L;D} - H_0^{L;D}\| \leq \frac{E}{4}$$

が成り立つ。 $H_0^{L;D}$ のスペクトルは厳密に計算できるから、それらを組み合わせると、(十分 E が小さく、したがって L が大きいとき)

$$\inf \sigma(H^{L;D}) \leq \frac{E}{4} + 2\left(1 - \cos \frac{\pi}{L}\right) \leq \frac{E}{2}$$

がしたがう。これを用いて、単純な計算をしていくと、

$$\liminf_{E \rightarrow 0} \log(-\log k_L^D(E))/\log E \geq -1$$

が導かれ、定理の半分が証明される。

(1) **Upper bound:** 定数 $\varepsilon_0, f_0 > 0$ を次のように選ぶ。

$$\mathbb{P}\left(1 - \cos\left(\frac{B(f)}{4}\right) \geq \varepsilon_0\right) = f_0 > 0.$$

すると、Simon[5] と同様に、Temple の不等式から次が証明できる。

命題 5. 定数 $L_0, \alpha_0 > 0$ が存在して、 $L \geq L_0$ しかも

$$\frac{1}{L^2} \#\{x \in S_0 \mid W_B(x) \geq \varepsilon_0\} \geq \frac{f_0}{2}$$

であるならば、

$$\inf \sigma(H_0^{L;N} + W_B) \geq \alpha_0 L^{-2}$$

が成り立つ。

また、これも Simon[5] と同様にして、次のような大偏差原理の命題が成り立つ。

命題 6.

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{L^2} \#\left\{f \in S_0 \mid \left(1 - \cos \frac{B(f)}{4}\right) \geq \varepsilon_0\right\} < \frac{1}{2} f_0\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2} f_0^2 L^2\right)$$

これらを組み合わせて, $L \geq L_0$ ならば, 以下の評価が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} k_L^N(E) &\leq \mathbb{P}\left(\inf \sigma(H^{L;N}) \leq E\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\inf \sigma(H_0^{L;N} + W_B) \leq 2E\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2}f_0^2 L^2\right). \end{aligned}$$

この条件を満たすように,

$$L \sim \left(\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}} - \delta\right) E^{-1/2}$$

と取れば, E が十分小さいとき

$$k_L^N(E) \leq \exp(-cE^{-1})$$

がしたがう, したがって,

$$\limsup_{E \rightarrow 0} \log(-\log k(E))/\log E \leq -1$$

が導かれる. これで定理 1 の証明は終わる.

参考文献

- [1] Carmona, R., Lacroix, J.: Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. Birkhäuser 1990.
- [2] Kirsch, W.: Random Schrödinger operators. In Schrödinger Operators (H. Holden, A. Jensen eds.), Springer Lecture Notes in Physics **345** (1989).
- [3] Nakamura, S.: Lifshitz tail for 2D discrete Schrödinger operator with random magnetic field. Preprint 1999 Sep. (mp-arc:99-420). To appear in Ann. Henri Poincaré.
- [4] Nakamura, S.: Lifshitz tail for Schrödinger operator with random magnetic field. Preprint 1999 Dec. (mp-arc:99-488). To appear in Commun. Math. Phys.
- [5] Simon, B.: Lifshitz tails for the Anderson model. J. Stat. Phys. **38**, 65–76 (1985).
- [6] Ueki, N.: Simple examples of Lifshitz tails in Gaussian random magnetic fields. To appear in Ann. Henri Poincaré.