数理解析研究所講究録
1194 巻 2001 年 67-72

可能性理論に基づくファジィ集合間の順序指標に関する一考察

金沢学院大学 経営情報学部　　桑野 裕昭 (Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1　はじめに

ファジィ概念を含む数理計画問題において，その制約式系のパラメータは確定的な数であるにも関わらず，等号・不等号の成立に関してファジネスを含む問題やパラメータがファジネスを含み，それゆえ順序関係にも曖昧さが生じる問題を考えることができることが知られている．これと同様に目的関数についてもパラメータにはファジネスを含まないが希求水準を設定し，それと目的関数の順序性にファジネスを想定する問題や，目的関数に含まれるパラメータがファジネスを持つため，ファジィ数などのファジィ集合間に順序関係を新たに定義した問題の研究もなされている．たとえば，この最適化の基準として，ファジィマックス順序や可能性測度や必然性測度を用いた指標を用いる場合がある．ただ，これらの基準を用いる場合には，それらがファジィ数，より一般には $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合間の擬順序・半順序関係を利用するために，目的関数は一つでなければならず，複数の目的関数を持つ場合には適用できない．そこで，本研究においては，複数の目的関数を持ち，その目的関数系に現れるパラメータがファジネスを含むファジィ計画問題に，$\mathbb{R}^n$ 上のある種のファジィ集合間の順序関係，もしくはそれらの指標を利用できるように，ファジィマックス順序や可能性測度を用いた順序関係の指標を 1 次元の場合と整合的に多次元において定義し，これらの関係を明らかにすることを目的とする．

2　諸定義といくつかの結果

まず，ファジィベクトルの定義を与える．ファジィベクトルの定義についてはいくつかの定義が存在するが，ここでは以下の定義を採用する．

定義 2.1 (ファジィベクトル, ファジィ数).　n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上で定義された上半連続かつ擬凹なメンバーシップ関数 $\mu_{\tilde{a}}$ が唯一点でのみグレード 1 をとる場合，このメンバーシップ関数によって特徴づけられるファジィ集合 $\tilde{a}$ をファジィベクトルと呼ぶ．特に，$n=1$ の場合，それをファジィ数と呼ぶ．

一般に集合 X 上に定義されたメンバーシップ関数 $\mu_{\tilde{a}}$ によって特徴づけられたファジィ集合 $\tilde{a}$ のレベル集合を次のように表記する．

$$[\tilde{a}]^\alpha = \begin{cases} \{x \in X \,|\, \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}, & \text{if } \alpha \in (0,1], \\ \mathrm{cl}\left(\displaystyle\bigcup_{0<\alpha\leq 1} [\tilde{a}]^\alpha\right), & \text{if } \alpha = 0 \end{cases}$$

ここで，$\mathrm{cl}(S)$ は集合 S の閉包を表す.

定義 2.2 (ファジィマックス順序 [4]). $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ をファジィ数とする．このとき，これらのファジィ数間の二項関係 $\precsim$ を

$$\widetilde{a} \precsim \widetilde{b} \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \sup[\widetilde{a}]^\alpha \leq \sup[\widetilde{b}]^\alpha \ \& \ \inf[\widetilde{a}]^\alpha \leq \inf[\widetilde{b}]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

によって定義し，ファジィマックス順序と呼ぶ.

よく知られているようにファジィマックス順序はファジィ数間の半順序関係を与える.

命題 2.1 ([4]). ファジィ数 $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ に対して $\widetilde{a} \precsim \widetilde{b}$ が成り立つことと,

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ s.t. \ x \leq y \ \& \ \mu_{\widetilde{a}}(x) \leq \mu_{\widetilde{b}}(y), \\ \forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \ s.t. \ x \leq y \ \& \ \mu_{\widetilde{a}}(x) \geq \mu_{\widetilde{b}}(y) \end{cases}$$

が成り立つことは必要十分条件をなす.

命題 2.2 ([4]). ファジィ数 $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ に対して $\widetilde{a} \precsim \widetilde{b}$ が成り立つことと，$\widetilde{\max}\{\widetilde{a}, \widetilde{b}\} = \widetilde{b}$ 及び $\widetilde{\min}\{\widetilde{a}, \widetilde{b}\} = \widetilde{a}$ は同値である．ここで $\widetilde{\max}$, $\widetilde{\min}$ は拡張原理による実数の二項関係 max 及び min のファジィ化である.

次に、可能性理論 (Possibility theory) に基づくファジィ数の順序関係に対する指標を定義するため、いくつかの定義を与える.

定義 2.3 ([1]). ファジィ数 $\widetilde{a}$ に対して、ファジイ集合 $[\widetilde{a}, \infty)$, $(\widetilde{a}, \infty)$, $(-\infty, \widetilde{a}]$ 及び $(-\infty, \widetilde{a})$ のメンバーシップ関数をそれぞれ次のように定義する.

$$\mu_{[\widetilde{a},\infty)}(y) = \sup_{x: x \leq y} \mu_{\widetilde{a}}(x), \qquad \mu_{(\widetilde{a},\infty)}(y) = \sup_{x: x \geq y} \mu_{\widetilde{a}}(x),$$
$$\mu_{(-\infty,\widetilde{a}]}(y) = \inf_{x: x \leq y} \{1 - \mu_{\widetilde{a}}(x)\}, \qquad \mu_{(-\infty,\widetilde{a})}(y) = \sup_{x: x \geq y} \{1 - \mu_{\widetilde{a}}(x)\}$$

定義 2.4 (cf. [5]). ファジイ集合 $\widetilde{a}$ に対して，ファジィ数 $\widetilde{b}$ によって定められる可能性測度 $\Pi_{\widetilde{b}}$ 及び必然性測度 $\mathcal{N}_{\widetilde{b}}$ を次のように定義する.

$$\Pi_{\widetilde{b}}(\widetilde{a}) = \sup_x \min\left\{\mu_{\widetilde{a}}(x), \mu_{\widetilde{b}}(x)\right\}, \qquad \mathcal{N}_{\widetilde{b}}(\widetilde{a}) = 1 - \Pi_{\widetilde{b}}(\widetilde{a}^c) = \inf_x \max\left\{\mu_{\widetilde{a}}(x), 1 - \mu_{\widetilde{b}}(x)\right\}$$

ここで $\widetilde{a}^c$ は $\widetilde{a}$ の補集合を表す.

可能性理論に基づくファジィ数の順序関係に対する 4 つの指標を次のように定義する.

定義 2.5 ([1]). $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ をファジィ数とする．このとき，"$\widetilde{a} \leq \widetilde{b}$ である可能性の度合"，"$\widetilde{a} < \widetilde{b}$ である可能性の度合"，"$\widetilde{a} \leq \widetilde{b}$ である必然性の度合" 及び "$\widetilde{a} < \widetilde{b}$ である必然性の度合" の各指標を次のように定義する.

$$\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}\right) = \Pi_{\widetilde{b}}([\widetilde{a}, \infty)) = \sup_{\substack{x,y: \\ x \leq y}} \min\left\{\mu_{\widetilde{a}}(x),\ \mu_{\widetilde{b}}(y)\right\},$$
$$\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} < \widetilde{b}\right) = \Pi_{\widetilde{b}}((\widetilde{a}, \infty)) = \sup_y \inf_{\substack{x: \\ x \geq y}} \min\left\{1 - \mu_{\widetilde{a}}(x),\ \mu_{\widetilde{b}}(y)\right\},$$
$$\mathrm{Nec}\left(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}\right) = \mathcal{N}_{\widetilde{b}}([\widetilde{a}, \infty)) = 1 - \Pi_{\widetilde{b}}((-\infty, \widetilde{a})) = \inf_y \sup_{\substack{x: \\ x \leq y}} \max\left\{\mu_{\widetilde{a}}(x),\ 1 - \mu_{\widetilde{b}}(y)\right\},$$
$$\mathrm{Nec}\left(\widetilde{a} < \widetilde{b}\right) = \mathcal{N}_{\widetilde{b}}((\widetilde{a}, \infty)) = 1 - \Pi_{\widetilde{b}}((-\infty, \widetilde{a}]) = \inf_{\substack{x,y: \\ x \geq y}} \max\left\{1 - \mu_{\widetilde{a}}(x),\ 1 - \mu_{\widetilde{b}}(y)\right\}$$

命題 2.3 ([1]). 上記の4つの指標の間には次の関係式が成り立つ.

$$\mathrm{Nec}\left(\widetilde{a}<\widetilde{b}\right) \leq \left\{\begin{array}{c} \mathrm{Pos}\left(\widetilde{a}<\widetilde{b}\right) \\ \mathrm{Nec}\left(\widetilde{a}\leq\widetilde{b}\right) \end{array}\right\} \leq \mathrm{Pos}\left(\widetilde{a}\leq\widetilde{b}\right)$$

これらの指標については更に様々な性質を列挙することができるが，詳細はDubois & Prade [1]を参照していただきたい.

次に，これらの指標と上述のファジィマックス順序の間には次の関係が成り立っていることを思い出しておく.

定理 2.1. 三角型ファジィ数$\widetilde{a}, \widetilde{b}$に対して，次の (i), (ii), (iii) が成立する.

$$\text{(i)}\quad \mathrm{Nec}\left(\widetilde{a}<\widetilde{b}\right)=1 \;\Rightarrow\; \widetilde{a}\precsim\widetilde{b}$$

$$\text{(ii)}\quad \widetilde{a}\precsim\widetilde{b} \;\Rightarrow\; \mathrm{Pos}\left(\widetilde{a}\leq\widetilde{b}\right)=1$$

$$\text{(iii)}\quad \mathrm{Pos}\left(\widetilde{a}<\widetilde{b}\right)=\mathrm{Nec}\left(\widetilde{a}\leq\widetilde{b}\right)=1 \;\Rightarrow\; \widetilde{a}\precsim\widetilde{b}$$

3 ファジィベクトルへの拡張

$\mathbb{R}^n$ における順序を定義するために pointed な閉凸錐 K をその順序錐とし，ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，二項関係 $\boldsymbol{x} \preccurlyeq_K \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} \in K$ によって定義する. $\succcurlyeq_K$ も同様に考えることとする.

定義 3.1 ([2]). $\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}}$ をファジィベクトルとする. このとき，これらのファジィベクトル間の二項関係 $\widetilde{\boldsymbol{a}} \preccurlyeq_K \widetilde{\boldsymbol{b}}$ を

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\ \exists \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } \boldsymbol{x}\preccurlyeq_K \boldsymbol{y}\ \&\ \mu_{\widetilde{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{x}) \leq \mu_{\widetilde{\boldsymbol{b}}}(\boldsymbol{y}), \\ \forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\ \exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } \boldsymbol{x}\preccurlyeq_K \boldsymbol{y}\ \&\ \mu_{\widetilde{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{x}) \geq \mu_{\widetilde{\boldsymbol{b}}}(\boldsymbol{y}) \end{array}\right.$$

によって定義し，ファジィマックス順序と呼ぶ.

このファジィマックス順序はファジィベクトルの集合において擬順序となっている. ([2])

定義 3.2 ([2], cf. [3] Definition 2.1). $\mathbb{R}^n$ のコンパクト凸集合 A, B に対して二項関係 $A \preccurlyeq_K B$ を

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\ \exists \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } \boldsymbol{x}\preccurlyeq_K \boldsymbol{y}, \\ \forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\ \exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } \boldsymbol{x}\preccurlyeq_K \boldsymbol{y} \end{array}\right.$$

によって定義する.

このとき、次の補題が成立することが知られている.

補題 3.1 ([2]). $\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}}$ をファジィベクトルとする. このとき，$\widetilde{\boldsymbol{a}} \preccurlyeq_K \widetilde{\boldsymbol{b}}$ と，すべての $\alpha \in (0,1]$ に対して，$[\widetilde{a}]^\alpha \preccurlyeq_K [\widetilde{b}]^\alpha$ が成り立つことは必要十分条件をなす.

また，この補題は次のように表現することもできる.

補題 3.2 (cf. [3]). $\widetilde{\boldsymbol{a}}, \widetilde{\boldsymbol{b}}$ をファジィベクトルとする. このとき，$\widetilde{\boldsymbol{a}} \preccurlyeq_K \widetilde{\boldsymbol{b}}$ と，すべての $\alpha \in (0,1]$ に対して，$[\widetilde{a}]^\alpha \Cap K \supseteq [\widetilde{b}]^\alpha$ が成り立つことは必要十分条件をなす. ここで $[\widetilde{a}]^\alpha \Cap K = \bigcap_{\boldsymbol{a}\in[\widetilde{\boldsymbol{a}}]^\alpha} (\{\boldsymbol{a}\}+K)$ である.

注意 *3.1.* 上記補題より，$\widetilde{a} \preccurlyeq_K \widetilde{b}$ が成立することと [3] に示されている 6 つの集合に関する順序関係の一つ $\leq_K^{(\mathrm{i})}$ の意味ですべてのレベル集合間に順序がつくことは同値であることが分かる．

例 3.1. $n = 2$ とし，順序錐 $K = \mathbb{R}_+^2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \,|x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ の場合について例を挙げる．

$\widetilde{\boldsymbol{a}}$, $\widetilde{\boldsymbol{b}}_1$ 及び $\widetilde{\boldsymbol{b}}_2$ をそれぞれ

$$\mu_{\widetilde{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 - (x_1 + x_2)/5 & \text{if } \boldsymbol{x} \succcurlyeq_K \boldsymbol{0}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{\boldsymbol{b}}_1}(\boldsymbol{x}) = \max\{\min\{1 - |x_1 - 6|, 1 - |x_2 - 6|\}, 0\},$$

$$\mu_{\widetilde{\boldsymbol{b}}_2}(\boldsymbol{x}) = \max\{\min\{1 - |x_1 - 4|, 1 - |x_2 - 4|\}, 0\}$$

によって定義すると $\widetilde{a} \preccurlyeq_K \widetilde{b}_1$ が成り立ち，$\widetilde{a} \preccurlyeq_K \widetilde{b}_2$ は成り立たないことが補題 3.2 及び以下の図によって分かる．

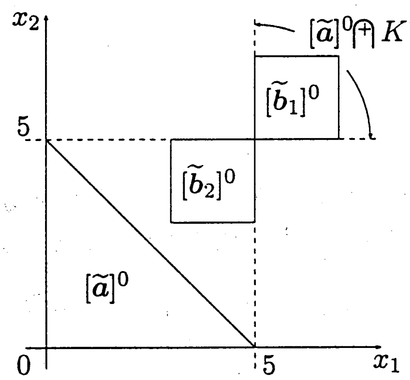

図 1: 0-レベル集合

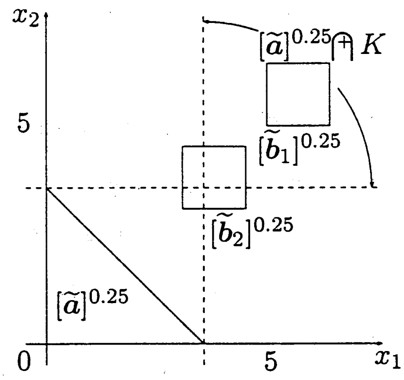

図 2: 0.25-レベル集合

ファジィベクトルに対するファジィマックス順序がファジィ数のそれの自然な拡張 (命題 2.1) であったの同様に，可能性理論に基づくファジィ数の順序関係に対する指標をファジィベクトル間の関係へと自然な拡張を試みる．

まず，ファジィベクトル $\widetilde{a}$ に対して，$[\widetilde{a}, \infty)_K$ を $\widetilde{a} + K$ によって定義する．

命題 3.1. ファジィ集合 $[\widetilde{a}, \infty)_K$ のメンバーシップ関数について次の等式が成立する．

$$\mu_{[\widetilde{\boldsymbol{a}},\infty)_K}(\boldsymbol{y}) = \Pi_{\widetilde{\boldsymbol{a}}}(\{\boldsymbol{y}\} - K)$$

ここで $\Pi_{\widetilde{a}}$ はファジィベクトル $\widetilde{a}$ によって定められる可能性測度である．

注意 *3.2.* 特に $n = 1$, $K = [0, \infty)$ のとき，この結果は Dubois & Prade[1] の $\mu_{[\widetilde{a},\infty)}(y) = \Pi_{\widetilde{a}}((-\infty, y])$ と一致する．

定義 3.3. $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ をファジィベクトルとし，“$\widetilde{a} \leq_K \widetilde{b}$ である可能性の度合” を表す指標を次のように定義する．

$$\mathrm{Pos}\left(\widetilde{\boldsymbol{a}} \leq_K \widetilde{\boldsymbol{b}}\right) = \Pi_{\widetilde{\boldsymbol{b}}}([\widetilde{\boldsymbol{a}}, \infty)_K)$$

命題 3.2. $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ をファジィベクトルとする．このとき，次式が成立する．

$$\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} \leq_K \widetilde{b}\right) = \sup_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}: \\ \boldsymbol{x} \preccurlyeq_K \boldsymbol{y}}} \min\left\{\mu_{\widetilde{a}}(\boldsymbol{x}),\ \mu_{\widetilde{b}}(\boldsymbol{y})\right\}$$

例 3.2. $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ として，通常のベクトルとコンパクト凸集合を取った場合の可能性の度合を表す指標 $\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} \leq_K \widetilde{b}\right)$ についてしめす．以下で I_S により集合 S の定義関数を表す．

$\widetilde{a}, \widetilde{b}$ **がクリスプなベクトル** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ **の場合**

$$\mathrm{Pos}(\boldsymbol{a} \leq_K \boldsymbol{b}) = \sup_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}: \\ \boldsymbol{x} \preccurlyeq_K \boldsymbol{y}}} \min\left\{I_{\{\boldsymbol{a}\}}(\boldsymbol{x}),\ I_{\{\boldsymbol{b}\}}(\boldsymbol{y})\right\} = I_K(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

すなわち，$\boldsymbol{a} \preccurlyeq_K \boldsymbol{b}$ が成立すれば，可能性は 1 となり，それ以外の場合は 0 となる．

$\widetilde{a}, \widetilde{b}$ **がクリスプなコンパクト凸集合** A, B **の場合**

$$\begin{aligned}\mathrm{Pos}(A \leq_K B) &= \sup_{\substack{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}: \\ \boldsymbol{x} \preccurlyeq_K \boldsymbol{y}}} \min\left\{I_A(\boldsymbol{x}),\ I_B(\boldsymbol{y})\right\} = \sup_{\boldsymbol{y}} \min\left\{\sup_{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x} \preccurlyeq_K \boldsymbol{y}} I_A(\boldsymbol{x}),\ I_B(\boldsymbol{y})\right\} \\ &= \sup_{\boldsymbol{y}} \min\left\{I_{A+K}(\boldsymbol{y}),\ I_B(\boldsymbol{y})\right\} = \sup_{\boldsymbol{y}} I_{(A+K)\cap B}(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

すなわち，$(A+K) \cap B \neq \emptyset$ が成立すれば，可能性は 1 となり，それ以外の場合は 0 となる．

注意 *3.3.* 上述のコンパクト凸集合の場合の例から分かるように，$\mathrm{Pos}(A \leq_K B) = 1$ であることと $(A+K) \cap B \neq \emptyset$ は同値となるが，これは [3] に示されている 6 つの集合に関する順序関係の一つ $\leq_K^{(\mathrm{iv})}$ と一致している．

定理 3.3. $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ をファジィベクトルとする．このとき，任意の $\alpha \in (0,1]$ に対して $\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} \leq_K \widetilde{b}\right) \geq \alpha$ と $[\widetilde{a}]^\alpha + K \cap [\widetilde{b}]^\alpha \neq \emptyset$ は必要十分条件をなす．

系 3.4. $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ をファジィベクトルとする．このとき $\widetilde{a} \preccurlyeq_K \widetilde{b}$ ならば $\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} \leq_K \widetilde{b}\right) = 1$ である．

例 3.3. 例 3.1 で与えたファジィベクトル $\widetilde{a}, \widetilde{b}_1$ 及び $\widetilde{b}_2$ に対して $\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} \leq_K \widetilde{b}_i\right) = 1\ (i = 1, 2)$ が成り立つ．

4 最後に

本研究では，ファジィ数に対して定義される可能性理論を用いた順序関係の指標のひとつをファジィベクトルに対して適用できるように拡張した定義を与えた後，これまでに知られているファジィベクトルに対するファジィマックス順序や集合間の順序関係との概念間の関係を述べた．ここで対象としたファジィベクトルに対する順序関係および順序指標は，必ずしも noninteractive なファジィ数の円筒的拡張によって得られたファジィベクトルに限らず，interactive なファジィベクトルに対しても適用可能であると思われる．しかしながら，一般的に interactive なファジィ集合間の演算が容易でないため，今後は，容易に interactive なファジィ集合間の演算を行えるメンバーシップ関数 (可能性分布関数) のクラスについても研究が必要であると思われる．

参考文献

[1] D. Dubois and H. Prade, "Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory", *Information Sciences*, Vol.30, pp.183-224, 1983.

[2] M. Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami and Y. Yoshida, "Ordering of fuzzy sets – A brief survey and new results", *J. Operations Research Society of Japan*, Vol.43, No.1, pp.138-148, 2000.

[3] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T.X.D. Ha, "On convex convexity of set-valued maps", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, Vol.30, No.3, pp.1487–1496, 1997.

[4] J. Ramík and J. Římánek, "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.16, pp.123-138, 1985.

[5] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, pp.3-28, 1978.