

前処理付反復法の比較定理

岡山理科大学 総合情報学部 河野敏行 (Toshiyuki Kohno)
仁木 滉 (Hiroshi Niki)
Faculty of Informatics,
Okayama University of Science

1 はじめに

次の前処理化線形方程式に, Gauss-Seidel 反復法の適用を考える.

$$PAx = Pb$$

ここで, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は既約優対角な Z 行列, $x, b \in \mathbf{R}^n$ である. そして P は前処理行列であり, 正則である. このとき, 反復公式は係数行列の分離 $PA = M_p - N_p$ に対して,

$$M_p x^{(k+1)} = N_p x^{(k)} + Pb$$

と表される. 小武守らは前処理行列 P として $P_\beta = (I + \beta U)$ を用いる方法を提案した [6]. ここで, 前処理を用いるために行列 A は, $A = I - L - U$ と分離可能な行列とする, ただし, I は単位行列, L, U はそれぞれ狭義下三角, 狭義上三角行列である. この前処理において, β はある正の実数であり, $\beta = 1$ の場合, $P_1 A = (I + U)A = I - L - UL - U^2$ と展開される. そして $UL = D + E + F$ と分解する. ただし, D, E, F はそれぞれ, UL の対角, 狭義下, 狭義上三角要素である.

これまでの比較定理は James の上界公式 [1] を用いて収束定理を導いており, 大変複雑なものであった. 今回, 我々は I. Marek と D. B. Szyld の比較定理 [2] を利用することによって, 係数行列 A が既約優対角 Z 行列であるときの明快な証明を導いた.

2 前処理行列 $(I + \beta U)A$ について

比較定理を示すために, β の振る舞いについて必要な議論を行う. まず, ある正のパラメータ β に対して, 前処理付係数行列 A_β は次のように表される,

$$A_\beta = (I - \beta D - (L + \beta E)) - (U - \beta U + \beta F + \beta U^2).$$

[6] において A_β が対角優位行列となるようにパラメータ β の上限 β' を定めている. さらに, 彼らは最適 β の推定法を開発した. この論文で用いる β の範囲は $\beta < \beta'$ かつ $I - \beta D > 0$ を満たすものとする. $I - \beta D \neq 0$ のとき $(I - \beta D - (L + \beta E))^{-1}$ が存在し, A_β に対する Gauss-Seidel 反復行列 T_β は,

$$T_\beta = (I - \beta D - (L + \beta E))^{-1}(U - \beta U + \beta F + \beta U^2),$$

と表される. ここで, $M_\beta = I - \beta D - (L + \beta E), N_\beta = U - \beta U + \beta F + \beta U^2$ と置く. そして N_β の (i, j) 要素の値を $(N_\beta)_{ij}$ と表す. このとき $(N_\beta)_{ii+1}$ は $(U - \beta U + \beta F)_{ii+1}$ となり, $(\beta U)_{ii+1} > (U + \beta F)_{ii+1}$ のとき $(N_\beta)_{ii+1}$ の値は非負とならず, $A_\beta \notin Z$ である. このとき, A_β の要素は $a_{\beta,ij} = a_{ij} - \beta \sum_{k=i+1}^n a_{ik} a_{kj}$ と表される. そして, A_1 の $(n-1, n)$ の要素は次式で示すように零となる.

$$\begin{aligned} a_{1,n-1n} &= a_{n-1n} - a_{n-1n} a_{nn} \\ &= a_{n-1n} - a_{n-1n} = 0 \end{aligned}$$

しかし, A_β の $(n-1, n)$ の要素は $a_{n-1n} \neq 0$ のとき, 次式で示すように正の値をもつ.

$$\begin{aligned} a_{\beta,n-1n} &= a_{n-1n} - \beta a_{n-1n} a_{nn} \\ &= (1 - \beta) a_{n-1n} > 0 \end{aligned}$$

従って, $(n-1)$ 行の対角優位度は A_1 の対角優位度よりも良いとは限らない. このことから $(n-1, n)$ 行目にのみ $\beta = 1$ と置き, 議論する.

本論文において, 収束するための β の範囲については [6] を利用し, これ以上の詳しい議論は行わない.

3 記法と補助定理

次の定理と定義を用いて, 前処理付 Gauss-Seidel 反復法の比較定理を導く.

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ の全ての要素に対して $a_{ij} \leq b_{ij}$ のとき, $A \leq B$ と書く. そして, $A \geq 0$ のとき A を非負行列と呼ぶ. $A = (a_{ij})$ が $i \neq j$ に対して, $a_{ij} \leq 0$ を満たす行列を Z 行列と呼び, $A \in Z^{n \times n}$ と表す. 正則行列 A が $A^{-1} \geq 0$ を満たすとき, M 行列と呼ぶ. さらに, $A = (a_{ij})$ が $i = j$ に対して $|a_{ij}|$, 非対角要素に対して $-|a_{ij}|$ と置いた行列を比較行列と呼び, $\langle A \rangle$ と表す. $\langle A \rangle$ が M 行列のとき, A は H 行列という.

定義 3.1 [3] A を実行列とする. $A = M - N$ を A の分離とする, ただし, M は正則行列である. このとき, 次の分離を定義する.

- (i) $\rho(M^{-1}N) < 1$ のときは, 収束分離.
- (ii) $M^{-1} \geq 0$ かつ $N \geq 0$ のときは, 正則分離.
- (iii) $M^{-1} \geq 0$ かつ $M^{-1}N \geq 0$ のとき, 弱正則分離.
- (iv) M が M -matrix かつ $N \geq 0$ のとき, M 分離.
- (v) $\langle M \rangle - |N|$ が M -matrix のとき, H 分離.
- (vi) $\langle A \rangle = \langle M \rangle - |N|$ のとき, H -compatible 分離.

定義 3.2 A の分離 $A = M - N$ を $M = \widetilde{D} - \widetilde{E}$, $N = \widetilde{F}$ とおくと, Gauss-Seidel 分離と呼ぶ. ただし, \widetilde{D} は係数行列 A の対角要素, $\widetilde{E}, \widetilde{F}$ は A の狭義下三角, 狭義上三角要素を表し, $A = \widetilde{D} - \widetilde{E} - \widetilde{F}$ と分離したものとする. そして, $(\widetilde{D} - \widetilde{E})^{-1} \geq 0$ かつ $\widetilde{F} \geq 0$ ならば, A を Gauss-Seidel 正則分離と呼ぶ.

定理 3.3 [3] A を $A = M - N$ 分離とする. このとき, 次の条件が成立する.

- (i) 正則もしくは、弱正則分離のとき、 $\rho(M^{-1}N) < 1$ となるための必要十分条件は $A^{-1} \geq 0$ である。
- (ii) A が M 分離のとき、 $\rho(M^{-1}N) < 1$ となる必要十分条件は A が M 行列であることである。
- (iii) A が H 分離のとき、 A と M は H 行列であり、 $\rho(M^{-1}N) \leq \rho(\langle M \rangle^{-1} |N|) < 1$ である。
- (iv) A が M 分離のとき、 A は正則分離である。
- (v) A が M 分離かつ M 行列のとき、 A は H 分離かつ H -compatible 分離である。
- (vi) A が H -compatible 分離かつ H 行列のとき、 A は H 分離かつ、収束分離である。

定理 3.4 [5] $A \in Z^{n \times n}$ を既約行列とする。このとき、以下の条件は、 A が正則な M 行列であることと等価である。

- (i) $A^{-1} \geq 0$ 。
(ii) $x > 0$ に対して $Ax \geq 0$ 。

補題 3.5 [3] $T \geq 0$ に対して、 $Tx \leq \alpha x$ を満たす $x > 0$ と $\alpha > 0$ が存在するとき、 $\rho(T) \leq \alpha$ を満たす。さらに、 $Tx < \alpha x$ ならば、 $\rho(T) < \alpha$ である。

定理 3.6 [7] $A = M - N$ を A の正則分離とする。このとき A が $A^{-1} \geq 0$ であるための必要十分条件は $\rho(M^{-1}N) < 1$ すなわち、

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)} < 1$$

である。

定理 3.7 [2] $A_1 = M_1 - N_1$ と $A_2 = M_2 - N_2$ を2つの弱正則分離とする、そして各反復行列 $T_1 = M_1^{-1}N_1$ 、 $T_2 = M_2^{-1}N_2$ は性質 "d" を持つと仮定する。そして、 $x \geq 0$ 、 $z \geq 0$ 、 $T_1x = \rho(T_1)x$ 、 $T_2z = \rho(T_2)z$ とおく。このとき、

$$M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$$

かつ $(A_1 - A_2)x \geq 0$ 、 $A_1x \geq 0$ または $(A_1 - A_2)z \geq 0$ 、 $A_1z \geq 0$ 、 $z \geq 0$ を満たすとき、

$$\rho(T_1) \leq \rho(T_2)$$

が成立する。さらに $M_1^{-1} > M_2^{-1}$ かつ $N_1 \neq N_2$ のとき

$$\rho(T_1) < \rho(T_2)$$

である。

4 比較定理

比較定理を導くために必要な補題を与える。

補題 4.1 A を Gauss-Seidel 正則分離、 $A_1 = (I+U)A = M_1 - N_1$ と置く。ここで $M = I - L$ 、 $M_1 = I - D - (L + E)$ である。このとき、

$$M_1^{-1} \geq M^{-1} \geq 0 \tag{1}$$

が成立する。