数理解析研究所講究録
1199 巻 2001 年 70-89

代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について

お茶の水女子大学大学院　中村　弥生(Yayoi NAKAMURA) *
新潟大学工学部情報工学科　田島　慎一(Shinichi TAJIMA) †

本稿では, 零次元多様体に台を持つような代数的局所コホモロジー類を annihilate する微分作用素の構成法について述べる.

大阿久俊則氏 (東京女子大学) により, 与えられた代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系を計算する, 一般的なアルゴリズムが構成された ([3], [4]). このアルゴリズムは, 微分作用素環のグレブナ基底を deterministic に与えるものであり, 計算が終了した場合は, 必要な作用素を確実に得ることができる. 一方で, グレブナ基底を答えとして返すため, 生成元のみが必要な場合には不必要な計算を行っていることになる. 一般に, 微分作用素環でのグレブナ基底の計算には, 膨大なメモリーを要するために, 計算が終了しないことがしばしばある.

我々は, regular sequence をなす $X=\mathbb{C}^n$ 上の n 個の多項式 $f_1=f_1(z),\ldots,f_n=f_n(z)\in\mathbb{C}[z]$ が定義する代数的局所コホモロジー類 $\sigma=[1/f_1\cdots f_n]$ を対象とする.

$f_1,\ldots,f_n$ が単純に交わる場合, つまり, $f_1,\ldots,f_n$ の共通零点の重複度が全て 1 である場合, コホモロジー類 σ の annihilating ideal は, 零階の微分作用素のみで生成される. また, 各共通零点の重複度が高い場合でも, 多くの場合, annihilating ideal は高々1 階の微分作用素により生成される. しかし, 共通零点の重複度が高く, 交わり方が複雑な場合, annihilating ideal の生成元として, 2 階以上の作用素が必要となることがある. 例えば, 次のような結果がある ([2]).

$f(z)=f(z_1,\ldots,z_n)$ を原点に孤立特異点を持つ半擬斉次多項式で Unimodal 例外型特異点の標準形を与えるものとする. $f_j=\partial f/\partial z_j, j=1,\ldots,n$ とおく. 原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $\sigma=[1/f_1\cdots f_n]|_0$ に対し,

$$\mathcal{A}nn^{(j)}=\{RP\in\mathcal{D}_X\mid RP\sigma=0,\mathrm{ord}(P)\leq j,\ {}^{\forall}R\in\mathcal{D}_X\}$$

と置く.

*nakamura@math.ocha.ac.jp
†tajimageb.ge.niigata-u.ac.jp

このとき, 次が成り立つ.

(i) ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}$ の原点における重複度 $=2$.

(ii) ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(2)}$ の原点における重複度 $=1$.

この場合, 代数的局所コホモロジー類の annihilating ideal を構成するには, 2 階の annihilator までを計算すれば十分であることになる.

さて, $Y=\{z\in X \mid f_1(z)=\cdots=f_n(z)=0\}$ に台を持つ n 次代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^n_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$([1] 参照) に対し, Cěch cohomology を用いた次の同型が成り立つことが知られている.

$$\mathcal{H}^n_{[Y]}(\mathcal{O}_X)\cong\frac{\mathcal{O}_X[*Y_1\cup\cdots\cup Y_n]}{\sum_{i=1}^n\mathcal{O}_X[*Y_1\cup\cdots\cup Y_{i-1}\cup\widehat{Y_i}\cup Y_{i+1}\cup\cdots\cup Y_n]}. \tag{1}$$

但し, $Y_j=\{z\in X \mid f_j(z)=0\}$ であり, $\mathcal{O}_X[*A]$ は A に極を持つ有理型関数とする. 本稿では, この同型を利用して, 代数的局所コホモロジー類 σ に対し, 生成元の階数を 1 階と 2 階に制限した annihilating ideal $\mathcal{A}nn^{(1)}$ および $\mathcal{A}nn^{(2)}$ の構成法を与える.

1 $\mathcal{A}nn^{(1)}$ の構成法

$X=\mathbb{C}^n$ 上の n 個の多項式 $f_1,\ldots,f_n\in\mathbb{Z}[z]$ が, regular sequence をなすとする. 代数的局所コホモロジー類 $\sigma=[1/f_1\cdots f_n]$ に対し,

$$P=a_{11}\partial_1+\cdots+a_{1n}\partial_n+a_0,\quad a_{11},\ldots,a_{1n},a_0\in\mathbb{Z}[z]$$

の形をした annihilator の構成法を 2 つ与える. それぞれの方法で求めた annihilating ideal は, 同値であることが分かる（§§1.3 参照）.

$z=(z_1,\ldots,z_n)$ に対し, $\partial_j=\partial/\partial z_j$, $f_{ij}=\partial f_i/\partial z_j$, $i,j=1,\ldots,n$ と置く. このとき,

$$\begin{aligned}P\sigma &= [\frac{-(a_{11}f_{11}+\cdots+a_{1n}f_{1n})}{f_1^2f_2\cdots f_n}]+\cdots+[\frac{-(\sum_{j=1}^n a_{1j}f_{ij})}{f_1\cdots f_i^2\cdots f_n}]+\cdots\\ &\quad+[\frac{-(a_{11}f_{n1}+\cdots+a_{1n}f_{nn})}{f_1\cdots f_n^2}]+[\frac{a_0}{f_1\cdots f_n}]\end{aligned} \tag{2}$$

である.

1.1 構成法その1

$P\sigma = 0$ であるから, (2) において

$$[\frac{-(a_{11}f_{11} + \cdots + a_{1n}f_{1n})}{f_1^2 f_2 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{-(\sum_{j=1}^n a_{1j}f_{ij})}{f_1 \cdots f_i^2 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{-(a_{11}f_{n1} + \cdots + a_{1n}f_{nn})}{f_1 \cdots f_n^2}]$$
$$= -[\frac{a_0}{f_1 \cdots f_n}]$$

が成り立つ. 各 $i = 1, \ldots, n$ に対し, $f_i \cdot$ 右辺 $= 0$ が成り立つことから,

$$f_i \cdot \text{左辺} = [\frac{-(a_{11}f_{i1} + \cdots + a_{1n}f_{in})}{f_1 \cdots f_n}] = 0$$

が従う. つまり,

$$-(a_{11}f_{i1} + \cdots + a_{1n}f_{in}) \in \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \tag{3}$$

が成り立つ. すなわち, 次を満たす $c_{i1}, \ldots, c_{in} \in \mathbb{Z}[z]$ が存在することになる.

$$-(a_{11}f_{i1} + \cdots + a_{1n}f_{in}) = c_{i1}f_1 + \ldots + c_{in}f_n, \ i = 1, \ldots, n.$$

これらを (2) に代入すると,

$$\begin{aligned} P\sigma &= [\frac{c_{11}f_1 + \ldots + c_{1n}f_n}{f_1^2 f_2 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{c_{i1}f_1 + \ldots + c_{in}f_n}{f_1 \cdots f_i^2 \cdots f_n}] + \cdots \\ &\quad + [\frac{c_{n1}f_1 + \ldots + c_{nn}f_n}{f_1 \cdots f_n^2}] + [\frac{a_0}{f_1 \cdots f_n}] \\ &= [\frac{c_{11}}{f_1 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{c_{ii}}{f_1 \cdots f_n}] + \cdots + [\frac{c_{nn}}{f_1 \cdots f_n}] + [\frac{a_0}{f_1 \cdots f_n}] \end{aligned}$$

を得る. これらのことをまとめると, $P\sigma = 0$ を満たす1階の微分作用素 $P = a_{11}\partial_1 + \cdots + a_{1n}\partial_n + a_0$ は, 連立方程式

$$\begin{cases} -(a_{11}f_{11} + \cdots + a_{1n}f_{1n}) = c_{11}f_1 + \ldots + c_{1n}f_n, \\ \qquad \ldots, \\ -(a_{11}f_{n1} + \cdots + a_{1n}f_{nn}) = c_{n1}f_1 + \ldots + c_{nn}f_n \end{cases} \tag{4}$$

を解くことによって,

$$P = a_{11}\partial_1 + \cdots + a_{1n}\partial_n - (c_{11} + \cdots + c_{nn})$$

で与えられることが分かる.

この連立方程式 (4) を満たす $a_{11}, \ldots, a_{1n}, c_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ は $n(n+1)$ 組のベクトル

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ \cdots \\ \cdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} f_{1n} \\ f_{2n} \\ \cdots \\ \cdots \\ f_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} f_n \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

に対する sygyzies $(a_{11},\dots,a_{1n},c_{11},c_{12},\dots,c_{nn})$ として与えることができる. 代数的局所コホモロジー類 σ を annihilate する一階の微分作用素の構成は, ベクトル量 (5) の syzygies の計算に帰着されたことになる.

1.2 構成法その2

この節では, ベクトルの syzygies を計算せずに, σ の一階の annihilators を求める方法を述べる.

代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1\cdots f_n]$ に一階の微分作用素 $P = a_{11}\partial_1 + \cdots + a_{1n}\partial_n + a_0$ を施した (2) は, 分母を $f_1^2\cdots f_n^2$ にそろえることにより,

$$P\sigma = [\frac{h}{f_1^2\cdots f_n^2}] \tag{6}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} h &= -(a_{11}f_{11} + \cdots + a_{1n}f_{1n})f_2\cdots f_n - \cdots - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{1j})f_1\cdots \widehat{f_j}\cdots f_n \\ &\quad - \cdots - (a_{n1}f_{n1} + \cdots + a_{nn}f_{nn})f_1\cdots f_{n-1} + a_0 f_1\cdots f_n \end{aligned}$$

である. 微分作用素 P が, $P\sigma = 0$ を満たす必要十分条件は,

$$h \in \langle f_1^2,\dots,f_n^2\rangle \tag{7}$$

で与えられる. すなわち,

$$h = u_1 f_1^2 + \cdots + u_n f_n^2 \tag{8}$$

を満たす $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{Z}[z]$ が存在することになる. よって, $P\sigma = 0$ を満たす一階の微分作用素 $P = a_{11}\partial_1 + \cdots + a_{1n}\partial_n + a_0$ は, 方程式

$$\sum_{i=1}^{n}((\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{1j})f_1\cdots \widehat{f_j}\cdots f_n) - a_0 f_1\cdots f_n + (u_1 f_1^2 + \cdots + u_n f_n^2) = 0$$

を解いて, 構成することができる.

これらの係数 $a_{11},\dots,a_{1n},a_0,u_1,\dots,u_n$ は多項式

$$\begin{cases} f_{11}f_2\cdots f_n + \cdots + f_1\cdots f_{n-1}f_{n1}, \\ f_{12}f_2\cdots f_n + \cdots + f_1\cdots f_{n-1}f_{n2}, \\ \dots, \\ f_{1n}f_2\cdots f_n + \cdots + f_1\cdots f_{n-1}f_{nn}, \\ -f_1\cdots f_n, \\ f_1^2, \\ \dots, \\ f_n^2 \end{cases}$$

の syzygies を計算することにより求めることができる.

1.3 構成法その 1 と構成法その 2 の同値性

簡単のため, 2 次元の場合に, 構成法その 1 と構成法その 2 の同値性を示す. 3 次元以上の場合も同様に, 構成法その 1 と構成法その 2 が同値であることを証明することができる.

2 変数多項式の regular sequence f_1, f_2 によって定義される代数的局所コホモロジー類を, $\sigma = [1/f_1 f_2]$ と置く. また, $P = a_{11}\partial_1 + \cdots + a_{1n}\partial_n + a_0$ と置く.

まず, 構成法その 1 によって求めた微分作用素が構成法その 2 の条件 (7) を満たすことを示す. 構成法その 1 において, 微分作用素 P が σ の annihilator である必要十分条件は (3)

$$-(a_{11}f_{i1} + \cdots + a_{1n}f_{in}) = c_{i1}f_1 + \cdots + c_{in}f_n,\ i = 1, \ldots, n$$

を満たす $c_{in}, \ldots, c_{in}$ が存在することであった. 条件 (3) の両辺を $f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_n$ 倍すると,

$$-(a_{11}f_{i1} + \cdots + a_{1n}f_{in})f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_n = (c_{i1}f_1 + \cdots + c_{in}f_n)f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_n$$

となる. $i = 1, \ldots, n$ について和を取り, 整理すると,

$$\begin{aligned} & -\sum(a_{11}f_{i1} + \cdots + a_{1n}f_{in})f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_n - (c_{11} + \cdots + c_{nn})f_1 \cdots f_n \\ = \ & (c_{12}f_2 + \cdots + c_{1n}f_n)f_2 \cdots f_n + (c_{21}f_1 + c_{23}f_3 + \cdots + c_{2n}f_n)f_1 f_3 \cdots f_n \\ & + \cdots + (c_{n1}f_1 + \cdots + c_{n(n-1)}f_{n-1})f_1 \cdots f_{n-1} \end{aligned}$$

となる. このことから,

$$-\sum(a_{11}f_{i1} + \cdots + a_{1n}f_{in})f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_n - (c_{11} + \cdots + c_{nn})f_1 \cdots f_n \in \langle f_1^2, \ldots, f_n^2 \rangle$$

が成り立つ. よって, $-(c_{11} + \cdots + c_{nn}) = a_0$ と置くことにより, 構成法その 2 における条件 (7) を得る.

逆に, 構成法その 2 において, 一階の微分作用素 $P = a_{11}\partial_1 + a_{12}\partial_2 + a_0$ がコホモロジー類 $\sigma = [1/f_1 f_2]$ を annihilate する必要十分条件から, 構成法その 1 における条件 (3) を導こう. 構成法その 2 における条件 (8)

$$-(a_{11}f_{11} + a_{12}f_{12})f_2 - (a_{21}f_{21} + a_{22}f_{22})f_1 + a_0 f_1 f_2 - (u_1 f_1^2 + u_2 f_2^2) = 0$$

を整理すると,

$$(a_{11}f_{11} + a_{12}f_{12} + u_2 f_2)f_2 + (a_{21}f_{21} + a_{22}f_{22} + u_1 f_1)f_1 = a_0 f_1 f_2$$

となる. 今, 仮定より f_1, f_2 は regular sequence であるため,

$$\begin{cases} a_{11}f_{11} + a_{12}f_{12} + u_2 f_2 = v_1 f_1, \\ a_{21}f_{21} + a_{22}f_{22} + u_1 f_1 = v_2 f_2 \end{cases}$$

を満たす $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}[z]$ が存在する. よって,

$$\begin{cases} a_{11}f_{11} + a_{12}f_{12} \in \langle f_1, f_2 \rangle, \\ a_{21}f_{21} + a_{22}f_{22} \in \langle f_1, f_2 \rangle \end{cases}$$

を得る. これは, 構成法その 1 における条件 (3) である.

よって, 2 次元の場合, 構成法その 1 で求めた作用素と構成法その 2 で求めた作用素は同値である事がいえた.

2 $\mathcal{A}nn^{(2)}$ の構成法

代数的局所コホモロジー類 σ に対し, $\mathcal{A}nn^{(2)}$ の構成法を与える. $\mathcal{A}nn^{(1)}$ の場合と同様に, 2 つの方法を与える. 簡単のため, $X = \mathbb{C}^3 \ni (x, y, z)$ の場合についてのみ説明を与え, 一般の n 次元の場合については, syzygies の計算に関連する個所のみ述べることにする. また, §§1.3 と同様の議論を行うことにより, 2 つの構成法で求めた $\mathcal{A}nn^{(2)}$ は, 同値であることを示すことができるが, ここでは省略する.

多項式 f_1, f_2, f_3 が, regular sequence をなすとする. 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1f_2f_3]$ に対し, $P = D_2 + D_1 + D_0$,

$$\begin{aligned} D_2 &= a_{200}\partial_x^2 + a_{020}\partial_y^2 + a_{002}\partial_z^2 + a_{110}\partial_x\partial_y + a_{101}\partial_x\partial_z + a_{011}\partial_y\partial_z, \\ D_1 &= a_{100}\partial_x + a_{010}\partial_y + a_{001}\partial_z, \\ D_0 &= a_{000} \end{aligned}$$

の形をした annihilators を計算する. 但し, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$, $\partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2$, $\partial_z^2 = \partial^2/\partial z^2$, $\partial_x\partial_y = \partial^2/\partial x\partial y$, $\partial_x\partial_z = \partial^2/\partial x\partial z$, $\partial_y\partial_z = \partial^2/\partial y\partial z$ である. $j = 1, 2, 3$ に対し, $f_{jx} = \partial f_j/\partial x$, $f_{jy} = \partial f_j/\partial y$, $f_{jz} = \partial f_j/\partial z$, $f_{jxx} = \partial^2 f_j/\partial x^2$, $f_{jyy} = \partial^2 f_j/\partial y^2$, $f_{jzz} = \partial^2 f_j/\partial z^2$, $f_{jxy} = \partial^2 f_j/\partial x\partial y$, $f_{jxz} = \partial^2 f_j/\partial x\partial z$, $f_{jyz} = \partial^2 f_j/\partial y\partial z$ とおくと, $D_2\sigma$, $D_1\sigma$, $D_0\sigma$ はそれぞれ次のように表すことができる.

$$D_2\sigma = [\frac{b_{2211}}{f_1^2f_2f_3} + \frac{b_{2121}}{f_1f_2^2f_3} + \frac{b_{2112}}{f_1f_2f_3^2} + \frac{b_{2311}}{f_1^3f_2f_3} + \frac{b_{2131}}{f_1f_2^3f_3} + \frac{b_{2113}}{f_1f_2f_3^3} + \frac{b_{2221}}{f_1^2f_2^2f_3} + \frac{b_{2212}}{f_1^2f_2f_3^2} + \frac{b_{2122}}{f_1f_2^2f_3^2}], \tag{9}$$

$$D_1\sigma = [\frac{b_{1211}}{f_1^2f_2f_3} + \frac{b_{1121}}{f_1f_2^2f_3} + \frac{b_{1112}}{f_1f_2f_3^2}], \tag{10}$$

$$D_0\sigma = [\frac{a_{000}}{f_1f_2f_3}]. \tag{11}$$

但し, $b_{2211}, b_{2121}, b_{2112}, b_{2311}, b_{2131}, b_{2113}, b_{2221}, b_{2212}, b_{2122}, b_{1211}, b_{1121}, b_{1112} \in \mathbb{Z}[z]$ は次で与えられる.

b_{2211}	$-a_{200}f_{1xx} - a_{020}f_{1yy} - a_{002}f_{1zz}$ $-a_{110}f_{1xy} - a_{101}f_{1xz} - a_{011}f_{1yz}$
b_{2121}	$-a_{200}f_{2xx} - a_{020}f_{2yy} - a_{002}f_{2zz}$ $-a_{110}f_{2xy} - a_{101}f_{2xz} - a_{011}f_{2yz}$
b_{2112}	$-a_{200}f_{3xx} - a_{020}f_{3yy} - a_{002}f_{3zz}$ $-a_{110}f_{3xy} - a_{101}f_{3xz} - a_{011}f_{3yz}$
b_{2311}	$2a_{200}f_{1x}^2 + 2a_{020}f_{1y}^2 + 2a_{002}f_{1z}^2$ $2a_{110}f_{1x}f_{1y} + 2a_{101}f_{1x}f_{1z} + 2a_{011}f_{1y}f_{1z}$
b_{2131}	$2a_{200}f_{2x}^2 + 2a_{020}f_{2y}^2 + 2a_{002}f_{2z}^2$ $2a_{110}f_{2x}f_{2y} + 2a_{101}f_{2x}f_{2z} + 2a_{011}f_{2y}f_{2z}$
b_{2113}	$2a_{200}f_{3x}^2 + 2a_{020}f_{3y}^2 + 2a_{002}f_{3z}^2$ $2a_{110}f_{3x}f_{3y} + 2a_{101}f_{3x}f_{3z} + 2a_{011}f_{3y}f_{3z}$
b_{2221}	$2a_{200}f_{1x}f_{2x} + 2a_{020}f_{1y}f_{2y} + 2a_{002}f_{1z}f_{2z}$ $a_{110}f_{1x}f_{2y} + a_{101}f_{1x}f_{2z} + a_{011}f_{1y}f_{2z}$ $a_{110}f_{2x}f_{1y} + a_{101}f_{2x}f_{1z} + a_{011}f_{2y}f_{1z}$
b_{2212}	$2a_{200}f_{1x}f_{3x} + 2a_{020}f_{1y}f_{3y} + 2a_{002}f_{1z}f_{3z}$ $a_{110}f_{1x}f_{3y} + a_{101}f_{1x}f_{3z} + a_{011}f_{1y}f_{3z}$ $a_{110}f_{3x}f_{1y} + a_{101}f_{3x}f_{1z} + a_{011}f_{3y}f_{1z}$
b_{2122}	$2a_{200}f_{2x}f_{3x} + 2a_{020}f_{2y}f_{3y} + 2a_{002}f_{2z}f_{3z}$ $a_{110}f_{2x}f_{3y} + a_{101}f_{2x}f_{3z} + a_{011}f_{2y}f_{3z}$ $a_{110}f_{3x}f_{2y} + a_{101}f_{3x}f_{2z} + a_{011}f_{3y}f_{2z}$
b_{1211}	$-a_{100}f_{1x} - a_{010}f_{1y} - a_{001}f_{1z}$
b_{1121}	$-a_{100}f_{2x} - a_{010}f_{2y} - a_{001}f_{2z}$
b_{1112}	$-a_{100}f_{3x} - a_{010}f_{3y} - a_{001}f_{3z}$

(12)

2.1 構成法その 1

条件 $P\sigma = 0$ を, 次のように表しておく.

$$D_2\sigma = -(D_1 + D_0)\sigma.$$

今, 右辺を f_1 倍すると,

$$f_1(-D_1 - D_0)\sigma = [-\frac{b_{1211}}{f_1f_2f_3}] \tag{13}$$

となるので,

$$\begin{aligned} f_1D_2\sigma &= [\frac{b_{2211}}{f_1f_2f_3}] + [\frac{b_{2311}}{f_1^2f_2f_3}] + [\frac{b_{2221}}{f_1f_2^2f_3}] + [\frac{b_{2212}}{f_1f_2f_3^2}] & (14) \\ &= [-\frac{b_{1211}}{f_1f_2f_3}] & (15) \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. さらに, $[-\frac{b_{1211}}{f_1f_2f_3}]$ を $f_j, j = 1,2,3$ 倍すると, $f_j[-\frac{b_{1211}}{f_1f_2f_3}] = 0$ となるから,

$$\begin{aligned} f_1([\frac{b_{2211}}{f_1f_2f_3}] + [\frac{b_{2311}}{f_1^2f_2f_3}] + [\frac{b_{2221}}{f_1f_2^2f_3}] + [\frac{b_{2212}}{f_1f_2f_3^2}]) &= [\frac{b_{2311}}{f_1f_2f_3}] \\ &= 0 \\ f_2([\frac{b_{2211}}{f_1f_2f_3}] + [\frac{b_{2311}}{f_1^2f_2f_3}] + [\frac{b_{2221}}{f_1f_2^2f_3}] + [\frac{b_{2212}}{f_1f_2f_3^2}]) &= [\frac{b_{2221}}{f_1f_2f_3}] \\ &= 0 \\ f_3([\frac{b_{2211}}{f_1f_2f_3}] + [\frac{b_{2311}}{f_1^2f_2f_3}] + [\frac{b_{2221}}{f_1f_2^2f_3}] + [\frac{b_{2212}}{f_1f_2f_3^2}]) &= [\frac{b_{2212}}{f_1f_2f_3}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $b_{2311}, b_{2221}, b_{2212} \in \langle f_1, f_2, f_3\rangle$ を得る. つまり,

$$\begin{aligned} b_{2311} &= u_1f_1 + v_1f_2 + w_1f_3 \\ b_{2221} &= u_4f_1 + v_4f_2 + w_4f_3 \\ b_{2212} &= u_5f_1 + v_5f_2 + w_5f_3 \end{aligned}$$

を満たす $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{Z}[z], i = 1,4,5$ を取ることができる. このとき, $f_1P\sigma = 0$ であるから,

$$f_1P\sigma = [\frac{b_{2211} + u_1 + v_4 + w_5}{f_1f_2f_3}] + [\frac{b_{1211}}{f_1f_2f_3}] = 0$$

となり,

$$b_{2211} + u_1 + v_4 + w_5 + b_{1211} \in \langle f_1, f_2, f_3\rangle$$

を得る. つまり,

$$b_{2211} + u_1 + v_4 + w_5 + b_{1211} = u_7f_1 + v_7f_2 + w_7f_3$$

を満たす $u_7, v_7, w_7 \in \mathbb{Z}[z]$ を取ることができる.

(13) において, $-(D_1 + D_0)\sigma$ を f_2 倍, f_3 倍し, 同様の議論を行うことにより,

$$
\begin{aligned}
&b_{2131} = u_2 f_1 + v_2 f_2 + w_2 f_3 \\
&b_{2113} = u_3 f_1 + v_3 f_2 + w_3 f_3 \\
&b_{2122} = u_6 f_1 + v_6 f_2 + w_6 f_3 \\
&b_{2121} + v_2 + u_4 + w_6 + b_{1121} = u_8 f_1 + v_8 f_2 + w_8 f_3 \\
&b_{2112} + w_3 + u_5 + v_6 + b_{1112} = u_9 f_1 + v_9 f_2 + w_9 f_3
\end{aligned}
$$

となる $u_j, v_j, w_j, j = 2, 3, 6, 8, 9$ を取ることができる.

このとき,

$$P\sigma = [\frac{u_7 + v_8 + w_9 + a_{000}}{f_1 f_2 f_3}]$$

となる. よって, $D_0 = a_{000} = -(u_7 + v_8 + w_9)$ と置けば, $P = D_2 + D_1 + D_0$ が σ の 2 階の annihilator となる. 以上により, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1 f_2 f_3]$ に対する高々 2 階の annihilator

$$P = a_{200}\partial_x^2 + a_{020}\partial_y^2 + a_{002}\partial_z^2 + a_{110}\partial_x\partial_y + a_{101}\partial_x\partial_z + a_{011}\partial_y\partial_z + a_{100}\partial_x + a_{010}\partial_y + a_{001}\partial_z + a_{000}$$

は, 連立方程式

$$
\left\{
\begin{aligned}
&2a_{200}f_{1x}^2 + 2a_{020}f_{1y}^2 + 2a_{002}f_{1z}^2 + 2a_{110}f_{1x}f_{1y} + 2a_{101}f_{1x}f_{1z} + 2a_{011}f_{1y}f_{1z} \\
&\qquad\qquad = u_1 f_1 + v_1 f_2 + w_1 f_3 \\
&2a_{200}f_{2x}^2 + 2a_{020}f_{2y}^2 + 2a_{002}f_{2z}^2 + 2a_{110}f_{2x}f_{2y} + 2a_{101}f_{2x}f_{2z} + 2a_{011}f_{2y}f_{2z} \\
&\qquad\qquad = u_2 f_1 + v_2 f_2 + w_2 f_3 \\
&2a_{200}f_{3x}^2 + 2a_{020}f_{3y}^2 + 2a_{002}f_{3z}^2 + 2a_{110}f_{3x}f_{3y} + 2a_{101}f_{3x}f_{3z} + 2a_{011}f_{3y}f_{3z} \\
&\qquad\qquad = u_3 f_1 + v_3 f_2 + w_3 f_3 \\
&2a_{200}f_{1x}f_{2x} + 2a_{020}f_{1y}f_{2y} + 2a_{002}f_{1z}f_{2z} + a_{110}f_{1x}f_{2y} + a_{101}f_{1x}f_{2z} \\
&\qquad + a_{011}f_{1y}f_{2z} + a_{110}f_{2x}f_{1y} + a_{101}f_{2x}f_{1z} + a_{011}f_{2y}f_{1z} = u_4 f_1 + v_4 f_2 + w_4 f_3 \\
&2a_{200}f_{1x}f_{3x} + 2a_{020}f_{1y}f_{3y} + 2a_{002}f_{1z}f_{3z} + a_{110}f_{1x}f_{3y} + a_{101}f_{1x}f_{3z} \\
&\qquad + a_{011}f_{1y}f_{3z} + a_{110}f_{3x}f_{1y} + a_{101}f_{3x}f_{1z} + a_{011}f_{3y}f_{1z} = u_5 f_1 + v_5 f_2 + w_5 f_3 \\
&2a_{200}f_{2x}f_{3x} + 2a_{020}f_{2y}f_{3y} + 2a_{002}f_{2z}f_{3z} + a_{110}f_{2x}f_{3y} + a_{101}f_{2x}f_{3z} \\
&\qquad + a_{011}f_{2y}f_{3z} + a_{110}f_{3x}f_{2y} + a_{101}f_{3x}f_{2z} + a_{011}f_{3y}f_{2z} = u_6 f_1 + v_6 f_2 + w_6 f_3 \\
&-a_{200}f_{1xx} - a_{020}f_{1yy} - a_{002}f_{1zz} - a_{110}f_{1xy} - a_{101}f_{1xz} - a_{011}f_{1yz} \\
&\qquad + u_1 + v_4 + w_5 - a_{100}f_{1x} - a_{010}f_{1y} - a_{001}f_{1z} = u_7 f_1 + v_7 f_2 + w_7 f_3 \\
&-a_{200}f_{2xx} - a_{020}f_{2yy} - a_{002}f_{2zz} - a_{110}f_{2xy} - a_{101}f_{2xz} - a_{011}f_{2yz} \\
&\qquad + v_2 + u_4 + w_6 - a_{100}f_{2x} - a_{010}f_{2y} - a_{001}f_{2z} = u_8 f_1 + v_8 f_2 + w_8 f_3 \\
&-a_{200}f_{3xx} - a_{020}f_{3yy} - a_{002}f_{3zz} - a_{110}f_{3xy} - a_{101}f_{3xz} - a_{011}f_{3yz} \\
&\qquad + w_3 + u_5 + v_6 - a_{100}f_{3x} - a_{010}f_{3y} - a_{001}f_{3z} = u_9 f_1 + v_9 f_2 + w_9 f_3
\end{aligned}
\right.
\tag{16}
$$

を解き,

$$\begin{aligned} P &= a_{200}\partial_x^2 + a_{020}\partial_y^2 + a_{002}\partial_z^2 + a_{110}\partial_x\partial_y + a_{101}\partial_x\partial_z + a_{011}\partial_y\partial_z \\ &\quad + a_{100}\partial_x + a_{010}\partial_y + a_{001}\partial_z - (u_7 + v_8 + w_9) \end{aligned}$$

で与えられることが分かった.

この連立方程式 (16) の解

$$\begin{aligned} &a_{200}, a_{020}, a_{002}, a_{110}, a_{101}, a_{011}, \\ &u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, \\ &u_4, v_4, w_4, u_5, v_5, w_5, u_6, v_6, w_6, \\ &a_{100}, a_{010}, a_{001}, \\ &u_7, v_7, w_7, u_8, v_8, w_8, u_9, v_9, w_9 \end{aligned}$$

を, ベクトルに対する syzygies として求めることができる. ここで, ベクトル

$$\begin{gathered} {}^t(A_{11}, \cdots, A_{p1}, B_{11}, \cdots, B_{q1}, C_{11}, \cdots, C_{r1}), \\ \cdots, \\ {}^t(A_{1k}, \cdots, A_{pk}, B_{1k}, \cdots, B_{qk}, C_{1k}, \cdots, C_{rk}) \end{gathered}$$

に対する syzygies を $(s_1, \ldots, s_k)$ と表せば,

$$\begin{aligned} &s_1^t(A_{11}, \cdots, A_{p1}, B_{11}, \cdots, B_{q1}, C_{11}, \cdots, C_{r1}) + \ldots \\ &\qquad + s_k^t(A_{1k}, \cdots, A_{pk}, B_{1k}, \cdots, B_{qk}, C_{1k}, \cdots, C_{rk}) = 0 \end{aligned}$$

となるが, このことを, 表を用いて次のように表すことにする.

s_1	$\cdots$	s_k
A_{11}	$\cdots$	A_{1k}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_{p1}	$\cdots$	A_{pk}
B_{11}	$\cdots$	B_{1k}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
B_{q1}	$\cdots$	B_{qk}
C_{11}	$\cdots$	C_{1k}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
C_{r1}	$\cdots$	C_{rk}

第 2 段目からがベクトルの要素であり, 第 1 段目は対応する syzygies を表す. n 変数の場合における説明の便宜上, ベクトルを 3 つのブロックに分けてある. なお, 空欄における各要素は全て 0 とする.

この表示を用いると, $\sigma = [1/f_1 f_2 f_3]$ の 2 階の annihilators は, 次の表中の縦ベクトルで与える 36 組の 9 次元ベクトルに対する syzygies を計算することにより, 求めることができる.

a_{200}	a_{020}	a_{002}	a_{110}	a_{101}	a_{011}
$2f_{1x}^2$	$2f_{1y}^2$	$2f_{1z}^2$	$2f_{1x}f_{1y}$	$2f_{1x}f_{1z}$	$2f_{1y}f_{1z}$
$2f_{2x}^2$	$2f_{2y}^2$	$2f_{2z}^2$	$2f_{2x}f_{2y}$	$2f_{2x}f_{2z}$	$2f_{2y}f_{2z}$
$2f_{3x}^2$	$2f_{3y}^2$	$2f_{3z}^2$	$2f_{3x}f_{3y}$	$2f_{3x}f_{3z}$	$2f_{3y}f_{3z}$
$2f_{1x}f_{2x}$	$2f_{1y}f_{2y}$	$2f_{1z}f_{2z}$	$f_{1x}f_{2y}+f_{1y}f_{2x}$	$f_{1x}f_{2z}+f_{1z}f_{2x}$	$f_{1y}f_{2z}+f_{1z}f_{2y}$
$2f_{1x}f_{3x}$	$2f_{1y}f_{3y}$	$2f_{1z}f_{3z}$	$f_{1x}f_{3y}+f_{1y}f_{3x}$	$f_{1x}f_{3z}+f_{1z}f_{3x}$	$f_{1y}f_{3z}+f_{1z}f_{3y}$
$2f_{2x}f_{3x}$	$2f_{2y}f_{3y}$	$2f_{2z}f_{3z}$	$f_{2x}f_{3y}+f_{2y}f_{3x}$	$f_{2x}f_{3z}+f_{2z}f_{3x}$	$f_{2y}f_{3z}+f_{2z}f_{3y}$
$-f_{1xx}$	$-f_{1yy}$	$-f_{1zz}$	$-f_{1xy}$	$-f_{1xz}$	$-f_{1yz}$
$-f_{2xx}$	$-f_{2yy}$	$-f_{2zz}$	$-f_{2xy}$	$-f_{2xz}$	$-f_{2yz}$
$-f_{3xx}$	$-f_{3yy}$	$-f_{3zz}$	$-f_{3xy}$	$-f_{3xz}$	$-f_{3yz}$

u_1	v_1	w_1	u_2	v_2	w_2	u_3	v_3	w_3
$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$						
			$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$			
						$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$
1								
				1				
								1

u_4	v_4	w_4	u_5	v_5	w_5	u_6	v_6	w_6
$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$						
			$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$			
						$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$
	1				1			
1								1
			1				1	

a_{100}	a_{010}	a_{001}	u_7	v_7	w_7	u_8	v_8	w_8	u_9	v_9	w_9
$-f_{1x}$	$-f_{1y}$	$-f_{1z}$	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$						
$-f_{2x}$	$-f_{2y}$	$-f_{3z}$				$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$			
$-f_{3x}$	$-f_{3y}$	$-f_{3z}$							$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$

さて, $X = \mathbb{C}^n$ の場合, $n = 3$ の場合と同様の議論を行うことにより, 代数的局所コホモロジー類 σ の 2 階の annihilators を, ベクトルの syzygies を計算することにより求めることができる.

2 階の微分作用素を $P = D_2 + D_1 + D_0$ とおく. ここで,

$$D_2 = a_{20\cdots 0}\partial_1^2 + \cdots + a_{0\cdots 02}\partial_n^2 + a_{110\cdots 0}\partial_1\partial_2 + a_{101\cdots 0}\partial_1\partial_2 + \cdots + a_{0\cdots 011}\partial_{n-1}\partial_n \tag{17}$$

$$D_1 = a_{10\cdots 0}\partial_1 + \cdots + a_{0\cdots 01}\partial_n \tag{18}$$

$$D_0 = a_{0\cdots 0} \tag{19}$$

とする.

このとき, 下の表で与える $n + \dfrac{n(n-1)}{2} + n^2 + n\dfrac{n(n-1)}{2} + n + n^2 (= \dfrac{n(n+1)(n+3)}{2})$ 組の $n + {}_nC_2 + n (= \dfrac{n(n+3)}{2})$ 次元ベクトルに対する syzygies

$$a_{20\cdots 0}, \ldots, a_{0\cdots 0}, u_{i,j},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, 3n$$

を計算し,

$$a_{0\cdots 0} = -u_{1,2n+1} - u_{2,2n+2} - \cdots - u_{n,2n+n}$$

と置く. この時, P は $\sigma = [1/f_1 \cdots f_n]$ の annihilator となる. これらのベクトルを表すため,

3 次元の場合と同様にベクトルの組を次のようにブロック分けする.

	$\leftarrow n \rightarrow$	$\leftarrow \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow$	$\leftarrow n^2 \rightarrow$	$\leftarrow n\frac{n(n-1)}{2} \rightarrow$	$\leftarrow n \rightarrow$	$\leftarrow n^2 \rightarrow$
	$[s.1]$	$[s.2]$	$[s.3]$	$[s.4]$	$[s.5]$	$[s.6]$
$\uparrow$ n $\downarrow$	$[1.1]$	$[1.2]$	$[1.3]$	0	0	0
$\uparrow$ ${}_nC_2$ $\downarrow$	$[2.1]$	$[2.2]$	0	$[2.4]$	0	0
$\uparrow$ n $\downarrow$	$[3.1]$	$[3.2]$	$[3.3]$	$[3.4]$	$[3.5]$	$[3.6]$

第 1 段目の syzygies は, 次で与えられる.

$$[s.1] \quad : \quad a_{20\cdots0}, \cdots, a_{0\cdots02} \tag{20}$$

$$[s.2] \quad : \quad a_{110\cdots0}, \cdots, a_{0\cdots011} \tag{21}$$

$[s.2]$ の j 番目は, 2 階微分 $\partial_i\partial_{\ell_j}$ の係数である. つまり, j 番目の a に対する添え字は, $[j/n]+1$ 番目と, ℓ_j 番目が 1 であり, 他は全て 0 である. 但し, $\ell_j = [j/n] + j - \sum_{k=1}^{[j/n]-1}(n-k)$ とする. $[j/n]$ はガウス記号であり, j/n を超えない最大の整数を表す.

$$\begin{aligned}
&[s.3] : u_{1,1}, u_{2,1}, \cdots, u_{n,n} \\
&[s.4] : u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, \cdots, u_{n,n+n} \\
&[s.5] : a_{10\cdots0}, \ldots, a_{0\cdots01} \\
&[s.6] : u_{1,2n+1}, u_{2,2n+1}, \cdots, u_{n,2n+n}
\end{aligned}$$

また, 0 でない各ブロックの成分は次で与えられる.

$$[1.1] : \begin{pmatrix} 2(\frac{\partial f_1}{\partial z_1})^2, & \cdots, & 2(\frac{\partial f_1}{\partial z_n})^2 \\ & \cdots & \\ 2(\frac{\partial f_n}{\partial z_1})^2, & \cdots, & 2(\frac{\partial f_n}{\partial z_n})^2 \end{pmatrix}$$

$$[1.2] : \begin{pmatrix} 2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_1}{\partial z_2}, & \cdots, & 2\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ & \cdots & \\ 2\frac{\partial f_n}{\partial z_1}\frac{\partial f_n}{\partial z_2}, & \cdots, & 2\frac{\partial f_n}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

$$[1.3]:\begin{pmatrix} -f_1 \ldots -f_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -f_1 \ldots -f_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -f_1 \ldots -f_n \end{pmatrix}$$

$$[2.1]:\begin{pmatrix} 2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_2}{\partial z_1}, & \ldots, & 2\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ 2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_3}{\partial z_1}, & \ldots, & 2\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\frac{\partial f_3}{\partial z_n} \\ & \ldots & \\ 2\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_1}\frac{\partial f_n}{\partial z_1}, & \ldots, & 2\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_n}\frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

$$[2.2]:\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_2}{\partial z_2}+\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\frac{\partial f_2}{\partial z_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial f_2}{\partial z_n}+\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\frac{\partial f_2}{\partial z_{n-1}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial f_3}{\partial z_2}+\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\frac{\partial f_3}{\partial z_1} & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial f_3}{\partial z_n}+\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\frac{\partial f_3}{\partial z_{n-1}} \\ & \ldots & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_1}\frac{\partial f_n}{\partial z_2}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_2}\frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \ldots, & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial f_n}{\partial z_n}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_n}\frac{\partial f_n}{\partial z_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$[2.4]:\begin{pmatrix} -f_1 \ldots -f_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -f_1 \ldots -f_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -f_1 \ldots -f_n \end{pmatrix}$$

$$[3.1]:\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2}, & \ldots, & -\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_n^2} \\ & \ldots & \\ -\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_1^2}, & \ldots, & -\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_n^2} \end{pmatrix}$$

$$[3.2]:\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_{n-1}\partial z_n} \\ & \ldots & \\ -\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_1 \partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_{n-1}\partial z_n} \end{pmatrix}$$

$$[3.3]:\left(\begin{array}{c|c|c|c} 1\,0\cdots 0 & 0\,0\,0\cdots 0 & \cdots & 0\cdots 0\,0 \\ 0\,0\cdots 0 & 0\,1\,0\cdots 0 & \cdots & 0\cdots 0\,0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,0\cdots 0 & 0\,0\,0\cdots 0 & \cdots & 0\cdots 0\,1 \end{array}\right)$$

[3.3] を n 個の $n\times n$ 行列が並んでいると捉える. すると, $j=1,\ldots,n$ 番目の行列は (j,j) 成分が 1 で, 他の成分は全て 0 である.

$$[3.4]:\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\,1\,0\cdots0 & 0\,0\,1\,0\cdots0 & \cdots & \\ 1\,0\,0\cdots0 & 0\,0\,0\,0\cdots0 & \cdots & \\ 0\,0\,0\cdots0 & 1\,0\,0\,0\cdots0 & \cdots & \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & 0\,0\,0\cdots0\,0 \\ & & \cdots & 0\,0\,0\cdots0\,1 \\ & & \cdots & 0\,0\,0\cdots1\,0 \end{array}\right)$$

[3.4] を $n(n-1)/2$ 個の $n\times n$ 行列が並んでいると捉える. すると, $j=1,\ldots,n(n-1)/2$ 番目の行列は, $([j/n]+1,[j/n]+1+j-\sum_{k=1}^{[j/n]}(n-k))$ 成分と, $([j/n]+1+j-\sum_{k=1}^{[j/n]}(n-k),[j/n]+1)$ 成分のみ 1 で, 他の成分は全て 0 である. 但し, $[j/n]$ はガウス記号である.

$$[3.5]:\begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & -\frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ & \cdots & \\ -\frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & -\frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

$$[3.6]:\begin{pmatrix} -f_1\ldots-f_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -f_1\ldots-f_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -f_1\ldots-f_n \end{pmatrix}$$

2.2 構成法その 2

(9), (10), (11) において, 分母を $f_1^3f_2^3f_3^3$ でそろえると, $P\sigma=[h/f_1^3f_2^3f_3^3]$ となる. ここで,

$$\begin{aligned} h \;=\; & (b_{2211}+b_{1211})f_1f_2^2f_3^2+(b_{2121}+b_{1121})f_1^2f_2f_3^2+(b_{2112}+b_{1112})f_1^2f_2^2f_3 \\ & +b_{2311}f_2^2f_3^2+b_{2131}f_1^2f_3^2+b_{2113}f_1^2f_2^2 \\ & +b_{2221}f_1f_2f_3^2+b_{2212}f_1f_2^2f_3+b_{2122}f_1^2f_2f_3 \\ & +a_{000}f_1^2f_2^2f_3^2 \end{aligned}$$

である. $P\sigma=0$ より, $h\in\langle f_1^3,f_2^3,f_3^3\rangle$ が成り立つ. つまり, $h=u_1f_1^3+u_2f_2^3+u_3f_3^3$ を満たす $u_1,u_2,u_3\in\mathbb{Z}[z]$ が存在する.

これらの係数 $a_{200}, a_{020}, a_{002}, a_{110}, a_{101}, a_{011}, a_{100}, a_{010}, a_{001}, a_{000}, u_1, u_2, u_3$ は, 多項式

$$
\begin{cases}
-f_{1xx}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2xx}f_1^2f_2f_3^2 - f_{3xx}f_1^2f_2^2f_3 + 2f_{1x}^2f_2^2f_3^2 + 2f_{2x}^2f_1^2f_3^2 + 2f_{3x}^2f_1^2f_2^2 \\
\qquad +2f_{1x}f_{2x}f_1f_2f_3^2 + 2f_{1x}f_{3x}f_1f_2^2f_3 + 2f_{2x}f_{3x}f_1^2f_2f_3, \\
-f_{1yy}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2yy}f_1^2f_2f_3^2 - f_{3yy}f_1^2f_2^2f_3 + 2f_{1y}^2f_2^2f_3^2 + 2f_{2y}^2f_1^2f_3^2 + 2f_{3y}^2f_1^2f_2^2 \\
\qquad +2f_{1y}f_{2y}f_1f_2f_3^2 + 2f_{1y}f_{3y}f_1f_2^2f_3 + 2f_{2y}f_{3y}f_1^2f_2f_3, \\
-f_{1zz}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2zz}f_1^2f_2f_3^2 - f_{3zz}f_1^2f_2^2f_3 + 2f_{1z}^2f_2^2f_3^2 + 2f_{2z}^2f_1^2f_3^2 + 2f_{3z}^2f_1^2f_2^2 \\
\qquad +2f_{1z}f_{2z}f_1f_2f_3^2 + 2f_{1z}f_{3z}f_1f_2^2f_3 + 2f_{2z}f_{3z}f_1^2f_2f_3, \\
-f_{1xy}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2xy}f_1^2f_2f_3^2 - f_{3xy}f_1^2f_2^2f_3 + 2f_{1x}f_{1y}f_2^2f_3^2 + 2f_{2x}f_{2y}f_1^2f_3^2 + 2f_{3x}f_{3y}f_1^2f_2^2 \\
\qquad +(f_{1x}f_{2y} + f_{1y}f_{2x})f_1f_2f_3^2 + (f_{1x}f_{3y} + f_{1y}f_{3x})f_1f_2^2f_3 + (f_{2x}f_{3y} + f_{2y}f_{3x})f_1^2f_2f_3, \\
-f_{1xz}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2xz}f_1^2f_2f_3^2 - f_{3xz}f_1^2f_2^2f_3 + 2f_{1x}f_{1z}f_2^2f_3^2 + 2f_{2x}f_{2z}f_1^2f_3^2 + 2f_{3x}f_{3z}f_1^2f_2^2 \\
\qquad +(f_{1x}f_{2z} + f_{1z}f_{2x})f_1f_2f_3^2 + (f_{1x}f_{3z} + f_{1z}f_{3x})f_1f_2^2f_3 + (f_{2x}f_{3z} + f_{2z}f_{3x})f_1^2f_2f_3, \\
-f_{1yz}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2yz}f_1^2f_2f_3^2 - f_{3yz}f_1^2f_2^2f_3 + 2f_{1y}f_{1z}f_2^2f_3^2 + 2f_{2y}f_{2z}f_1^2f_3^2 + 2f_{3y}f_{3z}f_1^2f_2^2 \\
\qquad +(f_{1y}f_{2z} + f_{1z}f_{2y})f_1f_2f_3^2 + (f_{1y}f_{3z} + f_{1z}f_{3y})f_1f_2^2f_3 + (f_{2y}f_{3z} + f_{2z}f_{3y})f_1^2f_2f_3, \\
-f_{1x}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2x}f_1^2f_2f_3^3 - f_{3x}f_1^2f_2^2f_3, \\
-f_{1y}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2y}f_1^2f_2f_3^3 - f_{3y}f_1^2f_2^2f_3, \\
-f_{1z}f_1f_2^2f_3^2 - f_{2z}f_1^2f_2f_3^3 - f_{3z}f_1^2f_2^2f_3, \\
f_1^2f_2^2f_3^2, \\
f_1^3, \\
f_2^3, \\
f_3^3
\end{cases}
$$

に対する syzygies として計算することができる.

さて, $X = \mathbb{C}^n$ の場合における annihilators の計算も, $n = 3$ の場合と同様の議論を行うことにより, syzygies の計算に帰着することができる. regular sequence をなす多項式 $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Z}[z]$ の定義する代数的局所コホモロジー類を $\sigma = [1/f_1 \cdots f_n]$ とおく. (9), (10), (11) に対応する $D_2\sigma, D_1\sigma, D_0\sigma$ を計算する. $P\sigma = (D_2 + D_1 + D_0)\sigma$ の分母を $f_1^3 \cdots f_n^3$ でそろえ, 分子を h と置く. このとき, $P\sigma = 0$ であるから, $h \in \langle f_1^3, \ldots, f_n^3 \rangle$ が成り立つ. つまり,

$$h = u_1 f_1^3 + \cdots + u_n f_n^3 \tag{22}$$

を満たす $u_1, \ldots, u_n$ が存在する. $h - (u_1 f_1^3 + \cdots + u_n f_n^3) = 0$ を, 微分作用素 P の係数 $a_{20\ldots0}, \ldots, a_{0\ldots02}, a_{110\ldots0}, \ldots, a_{0\ldots011}$ (添え字の取り方については, (21) に従う), $a_{10\ldots0}, \ldots,$

$a_{0\ldots01}, a_0$ と $u_1, \ldots, u_n$ について整理したものを,

$$\begin{aligned} & h_{20\ldots0}a_{20\ldots0} + \cdots + h_{0\ldots02}a_{0\ldots02} \\ + \quad & h_{110\ldots0}a_{110\ldots0} + \cdots + h_{0\ldots011}a_{0\ldots011} \\ + \quad & h_{10\ldots0}a_{10\ldots0} + \cdots + h_{0\ldots01}a_{0\ldots01} \\ + \quad & a_0(f_1^2 \cdots f_n^2) + (u_1 f_1^3 + \cdots + u_n f_n^3) \\ = \quad & 0 \end{aligned}$$

とおく. このとき, $a_{20\ldots0}, \ldots, a_{0\ldots02}, a_{110\ldots0}, \ldots, a_{0\ldots011}, a_{10\ldots0}, \ldots, a_{0\ldots01}, a_0$ は, 多項式

$$h_{20\ldots0}, \ldots, h_{0\ldots02}, h_{110\ldots0}, \ldots, h_{0\ldots011}, h_{10\ldots0}, \ldots, h_{0\ldots01}, f_1^2 \cdots f_n^2, f_1^3, \ldots, f_n^3$$

に対する syzygies を計算することにより求めることができる.

3 具体例

与えられた regular sequence $f_1, \ldots, f_n$ に対し, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1 \ldots f_n]$ の annihilating ideal を $\mathcal{A}nn$ と置く.

$$\mathcal{A}nn = \{P \in \mathcal{D}_X \mid P\sigma = 0\}.$$

$\mathcal{A}nn^{(j)}, j = 0, 1, 2, \ldots$ に対し,

$$\mathcal{A}nn^{(0)} \subseteq \mathcal{A}nn^{(1)} \subseteq \mathcal{A}nn^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}nn$$

が成り立つ. また, ある k が存在し, $k \le \ell$ である全ての ℓ に対して, $\mathcal{A}nn^{(\ell)} = \mathcal{A}nn^{(k)}$ となり, $\mathcal{A}nn^{(k)} = \mathcal{A}nn$ が成り立つ.

以下に, $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(j)}, j = 0, 1, 2$ となる例をそれぞれ見ていく.

3.1 $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(0)}$ となる場合

$\sigma = [1/f_1 \cdots f_n]$ の高々零階の annihilators が生成するイデアル $\mathcal{A}nn^{(0)}$ は, 明らかに $f_1, \cdots, f_n$ が $\mathcal{D}_X$ 上生成するイデアルである. さて一般に, $I = \langle f_n, \ldots, f_n \rangle$ に対し, ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/I$ の, 点 $\alpha \in Y = V(I)$ での微分加群としての重複度 (正確には, 対応する cotangent bandle 上の点での重複度) は, 点 α の可換環論の意味での重複度に等しい. 特性サイクルの概念を用いて表現すると, $\mathrm{Ch}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(0)}) = \sum_{\alpha \in Y} \mu_\alpha T^*_{\{\alpha\}}X$ となる. 但し, μ_α は, 点 α の可換環論の意味での重複度である. $f_1, \ldots, f_n$ の共通零点が全て simple である場合は, $\mathrm{Ch}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(0)}) = \sum_{\alpha \in Y} T^*_{\{\alpha\}}X$ となり, よって, 次が成り立つ.

定理 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1 \cdots f_n]$ の annihilating ideal $\mathcal{A}nn$ が, 零階の annihilators の生成するイデアル $\mathcal{A}nn^{(0)}$ と等しい必要十分条件は, regular sequence $f_1, \ldots, f_n$ の共通零点が全て可換環論の意味で simple となることである.

例えば, 次のような場合がある. $f_1 = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3$, $f_2 = 2x^2+2y^2-1$ は, 6 個の simple な共通零点を持つ. f_1, f_2 により定義される代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1f_2]$ の annihilating ideal $\mathcal{A}nn$ は, 2 個の 零階の微分作用素 $-16y^3+6y+1$ と $2x^2+2y^2-1$ で生成される. これは, 多項式環上のイデアル $\langle f_1, f_2 \rangle$ に対する辞書式順序 $y \succ x$ によるグレブナ基底と等しい. つまり, $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(0)} = \langle f_1, f_2 \rangle$ であることが分かる.

ここで, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1f_2]$ に対し, 我々の方法で $\mathcal{A}nn^{(1)}$ を計算すると, 次の 12 個の微分作用素を得る. 但し, syzygies をとる際の計算は, 全次数辞書式順序を用いて行った.

$$
\begin{aligned}
&x^4 + (2y^2+3y)x^2 + y^4 - y^3,\\
&2x^2 + 2y^2 - 1,\\
&(2x^2+2y^2-1)\partial_y + 4y,\\
&(2x^2+2y^2-1)\partial_x + 4x,\\
&(x^2-8y^3+y^2+3y)\partial_y - 24y^2 + 2y + 3,\\
&((8y+1)x^2+y^2-y)\partial_x + (-8x^3+(-8y^2+4)x)\partial_y + 2x,\\
&(16y^3-6y-1)x\partial_x + ((-16y^2+4y+5)x^2 - 32y^4 + 12y^3 + 19y^2 - 4y - 3)\partial_y\\
&\qquad +32y^2 - 14y - 8,\\
&(64y^4+16y^3-24y^2-10y-1)x\partial_x +\\
&\qquad ((-64y^3+24y+4)x^2 - 128y^5 + 16y^4 + 96y^3 + 2y^2 - 19y - 3)\partial_y - 3,\\
&((4y+1)x^2 - 4y^3 + y^2 + y)\partial_x + (-4x^3 + (-4y^2+2)x)\partial_y + 2x,\\
&(x^2-8y^3+y^2+3y)\partial_y - 24y^2 + 2y + 3,\\
&((16y^2+8y+1)x^2 - y^2)\partial_x +\\
&\qquad ((-16y-4)x^3 + (-32y^3-4y^2+14y+3)x)\partial_y + (-48y^2+8y+8)x,\\
&((16y+4)x^3 + (4y^2-2y-1)x)\partial_x +\\
&\qquad (-16x^4 + (-32y^2+15)x^2 - 8y^3 + 9y^2 + 2y - 3)\partial_y - 32y^2 + 14y + 8.
\end{aligned}
$$

本稿で述べた計算法では, 生成元を見つけ出すという処理はしていないので, 計算結果には, 零階の作用素から作られる自明な作用素も含んでいる. 実際, これらの作用素のグレブナ基底を計算すると, 確かに $\mathcal{A}nn^{(1)} = \{-16y^3+6y+1, 2x^2+2y^2-1\}$ を得る. また同様に, $\mathcal{A}nn^{(2)}$ は 37 個の作用素からなるが, グレブナ基底は, 同じく, $\{-16y^3+6y+1, 2x^2+2y^2-1\}$ となる. よって, $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(0)}$ が確かめられる.

3.2 $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(1)}$ となる例

与えられた regular sequence $f_1, \ldots, f_n$ の共通零点の重複度が高い場合でも, 多くの場合, 代数的局所コホモロジー類の annihilating ideal は高々 1 階の微分作用素で生成される.

$f_1, \ldots, f_n$ が shape base を持つ場合, $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(1)}$ が成り立つことが示される. 例えば, 次のような場合がある.

- $f_1 = (x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3,\ f_2 = x^2+y^2-1$

  $(0,1), (-\sqrt{3}/2, -1/2), (\sqrt{3}/2, -1/2)$ に重複度 2 の共通零点を持つ.

この例に関する計算結果も含め, 詳しくは, [6] を参照されたい.

また, shape base を持たない次のような場合でも, f_1, f_2 の定義する代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1f_2]$ の annihilating ideal は, f_1, f_2 で定義される 零階の微分作用素と, 1 階の微分作用素とで生成される. 詳しくは [5] を参照されたい. (なお, 次の §3.3 の例は, [5] における conjecture の反例となっている.)

- $f_1 = x^7,\ f_2 = y^2 + x(x^4 + 2x^3y - 3x^5y - x^6)$

  原点に重複度 14 の共通零点を持つ.

- $f_1 = x^6 + (y^2-3)x^4 + (y^4+y^2+3)x^2 + y^6 - y^4 + y^2 - 1,$
  $f_2 = x^6 + (3y^2-3)x^4 + (3y^4+3y^2+3)x^2 + y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1$

  $(0,1), (0,-1)$ に重複度 2 の共通零点を持ち, $(1,0), (-1,0)$ に重複度 6 の共通零点を持つ. その他に, 16 個の simple な共通零点を持つ.

3.3 $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(2)}$ となる例

はじめにも述べたように, 与えられた regular sequence $f_1, \ldots, f_n$ の共通零点の重複度が高く, 交わり方が複雑な場合, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1 \cdots f_n]$ の annihilating ideal の生成元として, 2 階以上の微分作用素が必要となることがある.

Unimodal 例外型孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジー類 の annihilators は零階の微分作用素と, 2 階の微分作用素により生成される ([2] 参照). ここでは, その例として, Q_{10} 型特異点の場合の計算結果を紹介する.

Q_{10} 型特異点 $f = x^3 + y^4 + yz^2 + xy^3$ に対し, $f_1 = \partial f/\partial x,\ f_2 = \partial f/\partial y,\ f_3 = \partial f/\partial z$ と置く. f_1, f_2, f_3 の定義する代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_1f_2f_3]$ に対する $\mathcal{A}nn^{(1)}$ を, 我々の方法で計算すると, 21 個の作用素を得る. このとき, $\mathcal{A}nn^{(1)}$ の生成元は, f_1, f_2, f_3 と,

次に与える 3 個の一階の偏微分作用素である.

$$
\begin{aligned}
&2xz\partial_x + 2yz\partial_y + 3z^2\partial_z + 15z,\\
&(18x^2 + 24xy)\partial_x + (12xy + 16y^2)\partial_y + (21xz + 24yz)\partial_z + 111x + 136y,\\
&(162x^3 + (72y - 1152)x^2 - 512xy - 32z^2)\partial_x + (108x^2y - 768xy)\partial_y\\
&\quad + (189x^2z - 1344xz)\partial_z + 999x^2 + (144y - 7104)x + 192y^2 - 1024y.
\end{aligned}
$$

ホロノミック系 $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}$ の原点における重複度は 2 となり, $\mathcal{A}nn^{(1)} \neq \mathcal{A}nn$ であることが確かめられる. 次に, $\mathcal{A}nn^{(2)}$ を我々の方法で計算すると, 73 個の微分作用素を得る. グレブナ基底の計算を行うことにより, $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(2)}$ は simiple なホロノミック系であることが分かる. よって, $\mathcal{A}nn = \mathcal{A}nn^{(2)}$ が成り立つ. さらに, $\mathcal{A}nn$ は, f_1, f_2, f_3 で与えられる 零階の微分作用素と, 次で与えられる 2 階の偏微分作用素 P で生成されることが分かる. 但し, syzygies をとる際の計算は, 計算効率を考え, 全次数辞書式順序を用いて行った.

$$
\begin{aligned}
P =& (1536x - 384y^2)\partial_x^2 + (768x + 1024y)\partial_y\partial_x + 1536z\partial_z\partial_x + (-1458x - 1080y + 10240)\partial_x\\
&+ (432x + 486y^2 + 3168y)\partial_y^2 + 4224z\partial_z\partial_y + (3888y + 21696)\partial_y\\
&+ (1296x^2 - 2304y^2)\partial_z^2 + 729z\partial_z + 2187.
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

[1] R. Hartshorne, "Local Cohomology", Lecture Notes in Mathematics, Vol. 41. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[2] 中村弥生, 田島慎一, Unimodal 例外型特異点における代数的局所コホモロジー類, 京都大学数理解析研究所講究録「微分方程式の漸近解析・超局所解析」, 掲載予定.

[3] T. Oaku, *Algorithms for b-Funtions, Induced Systems, and Algebraic Local Cohomology of $\mathcal{D}$-Modules*, Proc. Japan Acad. **72**, Ser. A (1996), 173–178.

[4] T. Oaku, *Algorithms for b-Funtions, Restrictions, and Algebraic Local Cohomology Groups of $\mathcal{D}$-Modules*, Adv.in Appl.Math. **19** (1997), 61–105.

[5] S. Tajima and Y. Nakamura, *Conjectures about the differential operators used in an algorithm for computing the residues*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1159**「超局所解析と複素領域の偏微分方程式系」(2000), 81–86.

[6] S. Tajima and Y. Nakamura, *Computational aspects of Grothendieck residue via differential operators –The shape basis case–*, preprint.

[7] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (http://www. openxm. org).