数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 13-25

合同 zeta 函数に関する Artin-Tate 公式について

諏訪紀幸　中央大学理工学部

研究集会では ⟨Some remarks on the Artin-Tate formula for diagonal hypersurfaces⟩ と題して講演したが，実際にはより一般の代数多様体に対する Artin-Tate 公式について解説した．本稿では第 3 節で Artin-Tate 公式の導出の粗筋を，特に de Rham-Witt complex に関する結果がどこに利いているかを主眼に説明する．第 1 節では合同 zeta 函数の理論の中での Artin-Tate 公式の位置について，第 2 節では Artin-Tate 公式を記述し証明するための道具立てについて手短かに復習する．第 4 節で diagonal hypersurface に関する幾つかの結果を述べる．第 4 節の詳細については [12] を参照されたい．

記号．

scheme の上の層はすべて étale 位相で考える．したがって，層の cohomology はすべて étale cohomology を意味する．

M を可換群とする．M の torsion subgroup を M_{tors} で，剰余群 M/M_{tors} を M/tors で表わす．

v を $v(q)=1$ によって正規化された $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の p 進加法付値とする．また，$|\ |_l$ を $|l|_l=\dfrac{1}{l}$ によって正規化された $\bar{\mathbb{Q}}_l$ の l 進乗法付値とする．

1．歴史

1.1. (Weil 予想) X を有限体 $k=\mathbb{F}_q$ の上の代数多様体とする．X の合同 zeta 函数 $Z(X/k,t)$ は

$$Z(X/k,t)=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n}t^n\right]$$

によって定義された．変数変換 $t=q^{-s}$ によって $Z(X/k,t)$ から Hasse-Weil の zeta 函数

$$\zeta(X,s)=\prod_{x\in X_0}\frac{1}{1-\#k(x)^{-s}}\quad (X_0\text{ は }X\text{ の閉点全体})$$

を得る．

Riemann-Weil 仮説は $\zeta(X,s)$ の極と零点の分布に関する定理であるが，振り返ってみると，X が非特異射影的で $\dim X=N$ であるとき，

(1) $Z(X/k,t)$ は t の有理函数；

(2) $Z(X/k,t)$ は

$$Z(X/k,t)=\frac{P_1(t)\dots P_{2N-1}(t)}{P_0(t)\dots P_{2N}(t)},\ P_i(t)=P_i(X;t)=\prod_j(1-\alpha_{ij}t),\ |\alpha_{ij}|=q^{\frac{i}{2}}$$

と因数分解される．さらに，$P_i(X;t)$ は t の整係数多項式，

が Weil の研究を端緒として Grothendieck，Deligne によって示さた．周知のように，$P_i(X;t)$ は線型代数の言葉で記述される．実際，Φ を X の k の上の相対 Frobenius 写像，$H^*(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l)$ を l 進 étale cohomology 群とすれば，

$$P_i(X;t) = \det[1 - \Phi^* t; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l)]$$

が成立する．また，$H^*(X/W)_K$ を crystalline cohomology 群とすれば，

$$P_i(X;t) = \det[1 - \Phi^* t; H^i(X/W)_K]$$

が成立する．

1.2. (Tate 予想) ρ_r を $\zeta(X,s)$ の $s=r$ における極の位数とすれば，ρ_r は q の $P_{2r}(X;t)=0$ の逆根としての重複度に等しい．Tate [13] は次のように ρ_r を algebraic cycle と関連付けて議論した．

$Z^r(X)$，$Z^r(X_{\bar{k}})$ をそれぞれ X あるいは $X_{\bar{k}}$ の余次元 r の algebraic cycle の群とする．このとき，cycle 写像とよばれる準同型 $\gamma : Z^r(X_{\bar{k}}) \to H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))$ が定義される．明らかに γ の $Z^r(X)$ による像は $H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ に含まれる．Tate 予想は逆が成立することを主張する：Φ^* の $H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))$ の上への作用は半単純で，ρ_r は $Z^r(X)$ の γ よる像によって生成される $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l)$ の部分空間の次元に等しい．

今の所，Tate 予想は主立った所では
(1) X が Abel 多様体，$r=1$ (Tate [14])；
(2) X が K3 曲面で $\widehat{\mathrm{Br}}_{X/k}$ が finite height，$r=1$ (Nygaard，Ogus)；
(3) X が次元と次数に関する幾つかの条件をみたす Fermat 多様体で $r=N/2$ (塩田，桂，青木 [8, 9, 10, 1])
の場合に示されている．

1.3. (Artin-Tate 公式) 次に，$\zeta(X,s)$ の $s=r$ における特殊値が問題になるが，最初，$N=2$，$r=1$ の場合に Artin と Tate によって特殊値の公式が予想され，Tate [15] によって p と素な部分に対して l 進 étale cohomology を用いて証明された．p 部分に対しては l 進 étale cohomology の代わりに p 進 flat cohomology を用いることによって Milne [6] によって証明された．一般次元の場合は，Milne [7] が Illusie によって定義された logarithmic Hodge-Witt cohomology を用いて Artin-Tate 公式を一般化した．第 3 節で Milne の結果を改良した形で示す．

2．道具と準備

k を体，X を k の上の非特異射影多様体とする．

2.1. (étale cohomology) l を k の標数と異なる素数とする．

$$H^i(X, \mathbb{Z}_l(r)) = \varprojlim_n H^i(X, \mu_{l^n}^{\otimes r})$$

と定義した．

k が代数的閉体なら，$H^i(X, \mathbb{Z}_l(r))$ は有限型 $\mathbb{Z}_l$ 加群.

$$H^i(X, \mathbb{Q}_l(r)) = H^i(X, \mathbb{Z}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

と定義した．また，殆ど全ての素数 l に対して $H^i(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}} = 0$ となる (Gabber の定理).

2.2. (de Rham cohomology) 正則微分形式の複体 $\Omega^*_{X/k}$ の hypercohomology として de Rham cohomology $H^*_{DR}(X/k)$ を定義した．定義から spectral sequence

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_X) \Rightarrow H^{i+j}_{DR}(X/k)$$

(Hodge spectral sequence) が存在する．$\dim_k H^j(X, \Omega^i_{X/k})$ を X の (i,j) Hodge number とよび，$h^{ij}(X)$ で表わす.

以下，k は標数 $p > 0$ の完全体であると仮定する.

2.3. (crystalline cohomology と de Rahm-Witt complex [4, 5]) $H^*(X/W)$ によって X の crystalline cohomology を表わす．$H^*(X/W)/\mathrm{tors}$ は F-crystal の構造をもつ．また，pro-sheaf の複体

$$W\Omega^*_X : W\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} W\Omega^1_X \xrightarrow{d} W\Omega^2_X \xrightarrow{d} \cdots$$

(de Rham-Witt complex) が存在して $H^*(X/W)$ は $W\Omega^*_X$ の hepercohomology に同型となる (Deligne-Illusie)．$W\mathcal{O}_X$ の上の Frobenius 写像 F，Verschiebung 写像 V は $W\Omega^*_X$ の上に延長され，$FV = VF = p$, $FdV = d$ が成立する．spectral sequence

$$E_1^{ij} = H^j(X, W\Omega^i_X) \Rightarrow H^*(X/W).$$

(slope spectral sequence) は E_1 で退化する．特に，直和分解

$$H^n(X/W)_K = \bigoplus_{i+j=n} H^j(X, W\Omega^i_X)_K$$

を得る．さらに，

$$H^j(X, W\Omega^i_X)_K = H^{i+j}(X/W)_K^{[i,i+1[}$$

次に，

$$Z^i = \mathrm{Ker}[d : H^j(X, W\Omega^i_X) \to H^j(X, W\Omega^{i+1}_X)],$$
$$B^i = \mathrm{Im}[d : H^j(X, W\Omega^{i-1}_X) \to H^j(X, W\Omega^i_X)]$$

とおく．また，

$$V^{-\infty}Z^i = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ker}[dV^n : H^j(X, W\Omega^i_X) \to H^j(X, W\Omega^{i+1}_X)],$$
$$F^{\infty}B^i = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}[F^n d : H^j(X, W\Omega^{i-1}_X) \to H^j(X, W\Omega^i_X)]$$

とおく．このとき，$V^{-\infty}Z^i$, $F^\infty B^i$ は F, V で安定な $H^j(X, W\Omega_X^i)$ の部分 W 加群で，

$$B^i \subset F^\infty B^i \subset V^{-\infty}Z^i \subset Z^i$$

さらに，$V^{-\infty}Z^i/F^\infty B^i$ は有限型 W 加群．また，有限次元の unipotent formal group Ψ^{ji} が存在して $H^j(X, W\Omega_X^i)/V^{-\infty}Z^i$ は Ψ^{ji} の Cartier 加群に同型となる．$V^{-\infty}Z^i/F^\infty B^i$ を $\mathrm{Heart}^i\, H^j(X, W\Omega_X^*)$ で，$d : H^j(X, W\Omega_X^i)/V^{-\infty}Z^i \to F^\infty B^{i+1}$ を $\mathrm{Domino}^i\, H^j(X, W\Omega_X^*)$ で表わす．

$$T^{ij}(X) = \dim \mathrm{Domino}^i\, H^j(X, W\Omega_X^*) = \dim \Psi^{ji}$$

と定義した (Illusie-Raynaud)．また，

$$\begin{aligned} h_W^{ij}(X) = \dim_k H^j(X, W\Omega_X^i)/(\mathrm{tors} + V) + \dim_k H^{j+1}(X, W\Omega_X^{i-1})/(\mathrm{tors} + F) \\ + T^{i,j}(X) - 2T^{i-1,j+1}(X) + T^{i-2,j+2}(X) \end{aligned}$$

と定義した (Ekedahl)．$h_W^{ij}(X)$ を X の (i,j) Hodge-Witt number とよぶ．

補註 2.4. (1) $H^*(X/W)$ が torision-free で，(2) Hodge spectral sequence が E_1 で退化するとき，X は Mazur-Ogus 型であるという．X が Mazur-Ogus 型なら，各 (i,j) に対して $h_W^{ij} = h^{ij}$ が成立する (Ekedahl の定理)．例えば，Abel 多様体，射影空間の中の smooth complete intersection は Mazur-Ogus 型．

2.5. (logarithmic Hodge-Witt cohomology [5], [3]) 対数微分形式によって生成される $W_n\Omega_X^i$ の部分層を $W_n\Omega_{X,\log}^i$ で表わす．

$$H^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) = \varprojlim_n H^{i-r}(X, W_n\Omega_{X,\log}^r)$$

と表わすことにする．k の上の pro-algebraic group $\underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ が存在して，

$$H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r)) = \underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})$$

となる．$\underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ の unipotent part を $\underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ で，étale part を $\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ で表わせば，pro-algebraic group の完全列

$$0 \to \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \to \underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \to \underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \to 0$$

を得る．

$$\dim \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) = \dim \mathrm{Domino}^{r-1}\, H^{i-r}(X, W\Omega_X^*)$$

が成立する．また，k が代数的閉体なら

$$\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(k) = \mathrm{Ker}[F - 1 : \mathrm{Heart}^i\, H^j(X, W\Omega_X^*) \to \mathrm{Heart}^i\, H^j(X, W\Omega_X^*)]$$

したがって，$\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(k)$ は有限型 $\mathbb{Z}_p$ 加群．

以下，$k=\mathbb{F}_q$ を標数 p の有限体，$\Gamma=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ とし，$\varphi\in\Gamma$ を $k=\mathbb{F}_q$ の上の Frobenius 写像とする．X を k の上の非特異射影多様体とする．

Γ 加群 M に対して $M^\Gamma=\mathrm{Ker}[1-\varphi:M\to M]$, $M_\Gamma=\mathrm{Coker}[1-\varphi:M\to M]$ と記す．

補題 2.6. $P_i(X;t)=\prod_\alpha(1-\alpha t)$ とおく．このとき，

$$\det[1-\varphi t;H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_l(r))]=\begin{cases}\prod_\alpha\Big(1-\dfrac{q^r}{\alpha}\Big) & (l\neq p)\\ \prod_{v(\alpha)=r}\Big(1-\dfrac{q^r}{\alpha}\Big) & (l=p)\end{cases}$$

補題 2.7. $i\neq 2r$ と仮定する．このとき，$H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^\Gamma$, $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_\Gamma$ は有限群．特に，$H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^\Gamma$ は $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}$ に同型．さらに，

$$|H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_p(r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}|=q^{T^{r-1,i-r}(X)}|\underline{D}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^\Gamma_{\mathrm{tors}}|,$$
$$|H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_p(r))_\Gamma|=|\underline{D}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_\Gamma|$$

が成立する．

証． Riemann-Weil 仮説から，$1-\varphi$ は $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))/\mathrm{tors}$ の上で単射．したがって，完全列

$$0\to H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}\to H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))\to H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))/\mathrm{tors}\to 0$$

に $1-\varphi$ をほどこすことによって同型

$$H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^\Gamma\xrightarrow{\sim}H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^\Gamma_{\mathrm{tors}}$$

および完全列

$$0\to H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors},\Gamma}\to H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_\Gamma\to(H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))/\mathrm{tors})_\Gamma\to 0$$

を得る．また，$(H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))/\mathrm{tors})_\Gamma$ は有限群．$l\neq p$ の場合，これで結論を得る．

$l=p$ の場合．$H^1(\Gamma,\underline{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k}))=0$ なので，pro-algebraic group の完全列

$$0\to\underline{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))\to\underline{H}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))\to\underline{D}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))\to 0$$

から，完全列

$$0\to\underline{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(k)\to H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_p(r))^\Gamma\to\underline{D}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^\Gamma\to 0$$

および同型

$$H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_p(r))_\Gamma\xrightarrow{\sim}\underline{D}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_\Gamma$$

を得る．$\dim\underline{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))=T^{r-1,i-r}$ なので，

$$|\underline{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(k)|=q^{T^{r-1,i-r}}$$

が成立する．

さらに，$\underline{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})$ が torsion group なので，完全列

$$0 \to \underline{U}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(k) \to H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_p(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}} \to \underline{D}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}} \to 0$$

を得る．これから上記と併せて結論を得る．

補題 2.8. $i \neq 2r,\ 2r+1$ と仮定する．$H^i(X,\mathbb{Z}_l(r))$ は有限群で，

$$|H^i(X,\mathbb{Z}_l(r))| = |H^{i-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}||H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|$$

証. Hochschild-Serre の spectral sequence

$$E_2^{ij} = H^i(\Gamma, H^j(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))) \ \Rightarrow\ H^{i+j}(X,\mathbb{Z}_l(r))$$

から得られる完全列

$$0 \to H^{j-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma} \to H^j(X,\mathbb{Z}_l(r)) \to H^j(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma} \to 0$$

に注意すればよい．

補題 2.9. $H^{2r}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}$，$H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}$ は有限群．特に，

$$|H^{2r}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}| = |H^{2r-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}||H^{2r}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|$$

さらに，

$$|H^{2r}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_p(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}| = q^{T^{r-1,i-r}(X)}|\underline{D}^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|$$

証. Hochschild-Serre の spectral sequence から得られる完全列

$$0 \to H^{j-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma} \to H^j(X,\mathbb{Z}_l(r)) \to H^j(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma} \to 0$$

を考えて，$H^{2r}(X,\mathbb{Z}_l(r))$，$H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_l(r))$ が有限型 $\mathbb{Z}_p$ 加群であることが従う．さらに，$H^{2r-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}$ が有限群なので，

$$0 \to H^{2r-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma} \to H^{2r}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}} \to H^{2r}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}} \to 0$$

は完全列．

3. Artin-Tate 公式

$k=\mathbb{F}_q$ を標数 p の有限体，$\Gamma=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ とし，X を k の上の次元 N の非特異射影多様体とする

補題 3.1. $P_i(X;t)=\prod_{\alpha}(1-\alpha t)$ とおく．このとき，

$$\sum_{v(\alpha)<r}(r-v(\alpha)) = \sum_{j=0}^{r-1}(r-j)h_W^{j,i-j}(X) - T^{r-1,i-r+1}(X).$$

証. F-isocrystal $H^i(X/W)_K$ の slope は $\{v(\alpha)\}_\alpha$ で与えられる (Manin の定理). ここで, $H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)_K = H^i(X/W)_K^{[j,j+1[}$ なので,

$$\dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\mathrm{tors}+V) = \sum_{j\le v(\alpha)<j+1} (j+1-v(\alpha)),$$
$$\dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\mathrm{tors}+F) = \sum_{j\le v(\alpha)<j+1} (v(\alpha)-j)$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)h_W^{j,i-j}(X) - T^{r-1,i-r+1}(X)\\
&=\sum_{j=0}^{r-1}\Big\{(r-j)\dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\mathrm{tors}+V) + (r-j-1)\dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\mathrm{tors}+F)\Big\}\\
&=\sum_{j=0}^{r-1}\Big\{(r-j)\sum_{j\le v(\alpha)<j+1}(j+1-v(\alpha)) + (r-j-1)\sum_{j\le v(\alpha)<j+1}(v(\alpha)-j)\Big\}\\
&=\sum_{v(\alpha)<r}(r-v(\alpha)).
\end{aligned}$$

定理 3.2. (Artin-Tate 公式 I) $i \neq 2r$ と仮定する. このとき,

$$|P_i(X;q^{-r})|_l^{-1} =
\begin{cases}
\dfrac{|H^{i+1}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}{|H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}||H^{i+1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|} & (l\neq p)\\[2ex]
q^{-\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)h_W^{j,i-j}(X)}\dfrac{|H^{i+1}(X,\mathbb{Z}_p(r))_{\mathrm{tors}}|}{|\underline{D}^i(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}||\underline{D}^{i+1}(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|} & (l=p)
\end{cases}$$

が成立する.

証. $l \neq p$ のとき,

$$|P_i(X;q^{-r})|_l^{-1} = \left|\prod_\alpha\Big(1-\frac{q^r}{\alpha}\Big)\right|_l^{-1} = \Big|\det[1-\varphi; H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_l(r))]\Big|_l^{-1}$$

ここで,

$$\Big|\det[1-\varphi; H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_l(r))]\Big|_l^{-1} = |(H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))/\mathrm{tors})_\Gamma|$$

さらに, $H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}$ が有限群なので,

$$\frac{1}{|(H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))/\mathrm{tors})_\Gamma|} = \frac{|H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^\Gamma|}{|H^i(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_\Gamma|}$$

したがって, 補題 2.7 と補題 2.8 あるいは補題 2.9 から結論を得る.

$l = p$ のとき，

$$\left|\prod_{v(\alpha)=r}\left(1-\frac{q^r}{\alpha}\right)\right|_p^{-1} = \left|\det[1-\varphi; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(r))]\right|_p^{-1}$$

ここで，

$$\left|\det[1-\varphi; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(r))]\right|_p^{-1} = |(H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\mathrm{tors})_\Gamma| = |(\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})/\mathrm{tors})_\Gamma|$$

さらに，$\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\mathrm{tors}}$ が有限群なので，

$$\frac{1}{|(\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})/\mathrm{tors})_\Gamma|} = \frac{|\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^\Gamma|}{|\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_\Gamma|}$$

また，$v(\alpha) < r$ なら $v(1-\frac{\alpha}{q^r}) = v(\alpha) - r$，$v(\alpha) > r$ なら $v(1-\frac{\alpha}{q^r}) = 0$ なので，

$$\begin{aligned}|P_i(X; q^{-r})|_p^{-1} &= \left|\prod_{v(\alpha)<r}\left(1-\frac{q^r}{\alpha}\right)\right|_p^{-1}\left|\prod_{v(\alpha)=r}\left(1-\frac{q^r}{\alpha}\right)\right|_p^{-1}\left|\prod_{v(\alpha)>r}\left(1-\frac{q^r}{\alpha}\right)\right|_p^{-1} \\ &= q^{-\sum_{v(\alpha)<r}(r-v(\alpha))}\left|\prod_{v(\alpha)=r}\left(1-\frac{q^r}{\alpha}\right)\right|_p^{-1}\end{aligned}$$

したがって，補題 2.7，補題 2.8 あるいは補題 2.9 に補題 3.1 を併せて結論を得る．

3.3. $i = 2r$ の場合，Tate [15] の工夫に従って議論を進める．

$\varepsilon_l^{2r} : H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r)) \to H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))$ を $1 \in \mathbb{Z}_l = H^1(k, \mathbb{Z}_l)$ との cup 積によって定義される写像とする．このとき，$f : H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma \to H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_\Gamma$ を合成

$$H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma \to H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r)) \to H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_\Gamma$$

によって定義される準同型とすれば図式

$$\begin{array}{ccc} H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r)) & \xrightarrow{\varepsilon_l^{2r}} & H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r)) \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma & \xrightarrow[f]{} & H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_\Gamma \end{array}$$

は可換．

可換群の準同型 $\beta : M \to N$ に対して $\mathrm{Ker}\,\beta$，$\mathrm{Coker}\,\beta$ が有限群であるとき，$z(\beta) = |\mathrm{Ker}\,\beta|/|\mathrm{Coker}\,\beta|$ と定義する．

定理 3.4.(Artin-Tate 公式 II) 各 l に対して Φ^* の $H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))$ 上への作用が半単純で

あると仮定する．このとき，

$$\Bigl|\prod_{\alpha\neq q^r}\Bigl(1-\frac{\alpha}{q^r}\Bigr)\Bigr|_l^{-1} =$$

$$\begin{cases} |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1}\dfrac{|H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}{|H^{2r}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}||H^{2r+1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|} & (l\neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)h_W^{j,i-j}(X)}|\det(\varepsilon_p^{2r})|_p^{-1}\dfrac{|H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(r))_{\mathrm{tors}}|}{|\underline{D}^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}||\underline{D}^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|} & (l=p) \end{cases}$$

が成立する．

証． Φ^* の $H^{2r}(X_{\bar{k}},\mathbb{Q}_l(r))$ 上への作用が半単純なので，$z(f)$ が定義され，

$$z(\varepsilon_l^{2r}) = z(i)z(f)z(j)$$

が成立する．ここで，

$$\begin{aligned} z(\varepsilon_l^{2r}) &= |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1}\frac{|H^{2r}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}{|H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|} \\ z(j) &= |H^{2r-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}|, \\ z(i) &= \frac{1}{|H^{2r+1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}|} \end{aligned}$$

したがって，

$$z(f)^{-1} = z(\varepsilon_l^{2r})^{-1}z(i)z(j) = |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1}\frac{|H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}{|H^{2r}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}\frac{|H^{2r-1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}|}{|H^{2r+1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}|}$$

ここで，補題 2.7，補題 2.8 から

$$|H^{2r+1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}| = |H^{2r+1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|,$$

$$|H^{2r}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}| = \frac{|H^{2r-1}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}{|H^{2r}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|}$$

したがって，

$$z(f)^{-1} = |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1}\frac{|H^{2r+1}(X,\mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}{|H^{2r}(X,\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}||H^{2r+1}(X_{\bar{k}},\mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}|}$$

$l\neq p$ のとき，

$$z(f) = \Bigl|\prod_{\alpha\neq q^r}\Bigl(1-\frac{\alpha}{q^r}\Bigr)\Bigr|_l$$

に注意して結論を得る．$l=p$ のとき，

$$z(f) = |\underline{U}^{2r}(X,\mathbb{Z}_p(r))(k)|\Bigl|\prod_{\substack{v(\alpha)=r\\ \alpha\neq q^r}}\Bigl(1-\frac{\alpha}{q^r}\Bigr)\Bigr|_p = q^{T^{r-1,r}(X)}\Bigl|\prod_{\substack{v(\alpha)=r\\ \alpha\neq q^r}}\Bigl(1-\frac{\alpha}{q^r}\Bigr)\Bigr|_p$$

なので，補題3.1と併せて結論を得る．

例 3.5. X が Abel 多様体あるいは射影空間における smooth complete intersection なら，各 $l \neq p$ に対して $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}} = 0$. また，$H^i(X/W)_{\mathrm{tors}} = 0$. したがって，$\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\mathrm{tors}} = 0$. また，$h^{ij} = h^{ij}_W$. これから，Artin-Tate 公式 I, II はそれぞれ

$$|P_i(X; q^{-r})|_l^{-1} = \begin{cases} |H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}| & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)h^{j,i-j}(X)}|H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\mathrm{tors}}| & (l = p) \end{cases}$$

あるいは

$$\Big|\prod_{\alpha \neq q^r}\Big(1 - \frac{\alpha}{q^r}\Big)\Big|_l^{-1} = \begin{cases} |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1}|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}| & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)h^{j,i-j}(X)}|\det(\varepsilon_p^{2r})|_p^{-1}|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\mathrm{tors}}| & (l = p) \end{cases}$$

となる．

補註 3.6. $N = 2r$ と仮定する．Poincaré の双対定理から

$$|H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}| = |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors},\Gamma}| = |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}| \ (l \neq p)$$

を，logarithmic Hodge-Witt cohomology に対する双対定理から

$$|\underline{D}^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}| = |\underline{D}^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\mathrm{tors},\Gamma}| = |\underline{D}^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|$$

を得る．したがって，公式は

$$\Big|\prod_{\alpha \neq q^r}\Big(1 - \frac{\alpha}{q^r}\Big)\Big|_l^{-1} = \begin{cases} |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1}\dfrac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\mathrm{tors}}|}{|H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|^2} & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)h_W^{j,i-j}(X)}|\det(\varepsilon_p^{2r})|_p^{-1}\dfrac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\mathrm{tors}}|}{|\underline{D}^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}|^2} & (l = p) \end{cases}$$

と書き直せる．さらに，Tate 予想が成立すれば，ε_l^{2r} は余次元 r の algebraic cycle の intersection form の判別式の l 部分を与える．

例 3.7. $N = 2$, $r = 1$ とする．このとき，同型

$$\mathrm{NS}(X_{\bar{k}})_{l\text{-tors}} \xrightarrow{\sim} H^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_{\mathrm{tors}}$$

および

$$H^2(X, \mathbb{G}_m)_{l\text{-cotors}} \xleftarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))_{\mathrm{cotors}} \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Z}_l(1))_{\mathrm{tors}}$$

が存在する．また，

$$h_W^{02}(X) = \dim \mathrm{Alb}_{X/k} - h^{01}(X) + h^{02}(X)$$

さらに，Tate予想が成立するなら，$H^2(X, \mathbb{G}_m)$ は有限群で，$\det(\varepsilon_l^2) = \det[\mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l]$.
以上をまとめて本来のArtin-Tate公式

$$\prod_{\alpha \neq q}\left(1 - \frac{\alpha}{q}\right) = \pm \frac{1}{q^{\dim \mathrm{Alb}_{X/k} - h^{01}(X) + h^{02}(X)}} \frac{\det \mathrm{NS}(X)\ |H^2(X, \mathbb{G}_m)|}{|NS(X)_{\mathrm{tors}}|^2}$$

を得る.

註記 3.8. 講演ではMilne [7] が

$$e^i(r) = T^{r-1, i-r} - \sum_{v(\alpha)<r} (r - v(\alpha)),$$
$$\alpha^r(X) = T^{r-1, r+1} - 2T^{r-1, r} + \sum_{v(\alpha)<r} (r - v(\alpha))$$

によって定義した不変量 $e^i(r)$, $\alpha^r(X)$ が

$$e^i(r) = T^{r-1, i-r}(X) + T^{r-1, i-r+1}(X) - \sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, i-j}(X),$$
$$\alpha^r(X) = -2T^{r-1, r}(X) + \sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, 2r-j}(X)$$

と表わせることを注意して，Milneの一般化したArtin-Tate公式をそのまま引用したが，ここでは $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))$ を $\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})$ で置き換えて幾分簡略な形にした.

註記 3.9. [2](Prop.8.4) では3.5を，X がdiagonal hypersurface of Hodge-Witt typeの場合に示している.

4. Diagonal hypersurfaces

4.1. N, m を整数 ≥ 1 とする. k を体とし，X を

$$c_0 T_0^m + c_1 T_1^m + \cdots + c_{N+1} T_{N+1}^m = 0$$

$(c_0, c_1, \ldots, c_{N+1}) \in k^\times$ によって定義される $\mathbb{P}_k^{N+1}$ のdiagonal hypersurfaceとする. $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n+1} = 1$ なら，X は次元 n，次数 m のFermat多様体に他ならない.

以下，k はすべての1の m 乗根を含み，k が標数 $p > 0$ なら $(m, p) = 1$ と仮定する. μ_m によって k の1の m 乗根の群を表わす. 群 $G = (\mu_m)^{n+2}/(\mathrm{diagonal})$ は X の上に

$$(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{N+1})(t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}) = (\zeta_0 t_0, \zeta_1 t_1, \ldots, \zeta_{N+1} t_{N+1}).$$

によって作用する. G の指標群 $\hat{G}$ は

$$\{\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N+1}); a_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ \sum_{i=0}^{N+1} a_i = 0\};$$

に同一視できる．$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ の $\hat{G}$ の上への作用を

$$t\boldsymbol{a} = (ta_0, \ldots, ta_{N+1}) \in \hat{G}$$

で定義する．$\bar{\mathbb{Q}}$ における 1 の m 乗根 ζ_m を一つ固定する．$\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_{N+1}) \in \hat{G}$ の $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ の作用による軌道 A に対して G の $\mathbb{Q}$ 指標 χ_A を

$$\chi_A(g) = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_m^d)/\mathbb{Q}}(\boldsymbol{a}(g)^{-1})$$

によって定義する．ここで，$d = \gcd(m, a_0, \ldots, a_{n+1})$．指標 χ_A は $\mathbb{Q}$ 既約．

4.2. $N^r(X_{\bar{k}})$ を $X_{\bar{k}}$ の上の余次元 r の algebraic cycle の numerical equivalence を法とする群とする．$N^r(X_{\bar{k}})$ は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ 加群．さらに，intersection number によって定義される $N^r(X_{\bar{k}})$ の上の対称双一次形式は非退化．$N^r(X)$ によって $Z^r(X) \to Z^r(X_{\bar{k}}) \to N^r(X_{\bar{k}})$ の像を表わす．$X(N, m)$ によって次元 N，次数 m の Fermat 多様体を表わす．このとき，

$$(t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}) \to (\sqrt[m]{c_0}t_0, \sqrt[m]{c_1}t_1, \ldots, \sqrt[m]{c_{n+1}}t_{n+1})$$

は X から $X(N, m)$ への，G の X あるいは $X(N, m)$ の上への作用と同変な，$\bar{k}$ 同型を定義する．これから特に同型

$$\left[N^r(X(N,m)_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\right]^{(\chi_A)} \xrightarrow{\sim} \left[N^r(X_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\right]^{(\chi_A)}$$

を得る．

命題 4.3. k を体，X を $\mathbb{P}_k^{2r+1}$ の次数 m の diagonal hypersuface とする．同一視

$$\left[N^r(X_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\right]^{(\chi_A)} = \left[N^r(X(N,m)_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\right]^{(\chi_A)}$$

の下で

$$\left[N^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\right]^{(\chi_A)} = \left[N^r(X(N,m)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\right]^{(\chi_A)}$$

または

$$\left[N^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\right]^{(\chi_A)} = 0$$

が成立する．

証． 実際，X が m の巾を割る k の拡大の上で $X(N, m)$ に同型であることに注意すればよい．

系 4.4. k を体，X を $\mathbb{P}_k^{2r+1}$ の次数 m の diagonal hypersuface とする．m が素数なら，$B_n(X) - \mathrm{rk}\, N^r(X)$ は $m-1$ で割り切れる．

命題 4.5. k を標数 $p \geq 0$ の完全体，X を $\mathbb{P}_k^{2r+1}$ の次数 m の diagonal hypersuface とする．

(1) $n=2$,
(2) $n \geq 4$ で m は $n+2$ より小さい素数で割り切れない，あるいは,
(3) $n \geq 4$ で m は素数または4,
と仮定する．$p=0$ または $p \equiv 1 \mod m$ なら，$\det N^r(X)$ は m のある巾を割る.

証. Fermat 多様体の場合については [12] で示してあるが，一般の diagoanal hypersurface については4.3から Fermat 多様体の場合に帰着される.

補註 4.6. **命題** 4.5 の仮定の下では numerical equivalence と homological equivalence は一致する.

註記 4.7. [2](p.8) は $n=2r \geq 4$ に対して，Lichtenbaum complex $\mathbb{Z}(r)$ の存在を仮定して m が素数で k が有限体の場合に 4.5 を示している.

References

[1] N. Aoki - On some arithmetic problems related to the Hodge cycles on the Fermat varieties. Math. Ann. 266 (1983) 23-54

[2] F. Gouvêa, N. Yui - Arithmetic of diagonal hypersurfaces over finite fields. Max Planck Institut Preprint MPI 94-36 (1994)

[3] M. Gros, N. Suwa - Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébriques. Duke Math. J. 57 (1988) 579-613

[4] L. Illusie - Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4^e serie 12 (1979) 501-661

[5] L.Illusie, M. Raynaud - Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt. Publ. Math. IHES 57 (1983) 73-212

[6] J-S. Milne - On a conjecture of Artin-Tate. Ann. of Math. 102 (1975) 517-533

[7] J-S. Milne - Values of zeta functions of varieties over finite fields. Amer. J. Math. 108 (1986) 297-360

[8] T. Shioda - The Hodge conjecture and the Tate conjecture for Fermat varieties. Proc. of Japan Acad. 55 Ser. A (1979) 111-114

[9] T. Shioda - The Hodge conjecture for Fermat varieties. Math. Ann. 245 (1979) 175-184

[10] T. Shioda, T. Katsura - On Fermat varieties. Tohoku Math. J. 31 (1979) 97-115

[11] N. Suwa - Fermat motives and the Artin-Tate formula I, II. Proc. Japan Acad. 67 (1991) 104-107, 135-138

[12] N. Suwa - Fermat motives and the Artin-Tate formula. Preprint

[13] J. Tate - Algebraic cycles and poles of zeta functions. Arithmetic algebraic geometry, Harper and Row (1965) 93-110

[14] J. Tate - Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Invent. Math. 2 (1966) 133-144

[15] J. Tate - On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. Sém. Bourbaki exposé 306, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam (1968) 189-214