数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 71-81

Differential operators and structures of vector valued Siegel modular forms

伊吹山知義 (Tomoyoshi Ibukiyama) 大阪大学理学研究科

概要

正則線形偏微分作用素をジーゲル保型形式の構成に応用し、2次対称テンソル表現と行列式のべきの積をウェイトに持つベクトル値ジーゲル保型形式の空間を決定する。これらに必要な微分作用素の理論などもあわせて述べる。

1 序

筆者が保型形式に作用する微分作用素に興味をもったのは1990年ごろが初めてで、Zagier の九州大学滞在の折りの、代数曲線3個の積の算術交点理論に使えるはずだ、という彼の強い意見に触発されて、一般論を与えた。しかし実はこのような微分作用素を現実のジーゲル保型形式に適用して何か有用なことが起きるとは全く思っていなかった。ところが昨年ちょっとしたことを発見して見方が変わった。井草の定理でよく知られているように、2次の $Sp(2,\mathbb{Z})$ に関するジーゲル保型形式は、ϕ_4. ϕ_6, χ_{10}, χ_{12} という4つのウェイトが 4, 6, 10, 12 の代数的独立な保型形式と、ウェイト 35 の保型形式 χ_{35} で生成される。今となっては、ϕ_4, ϕ_6, χ_{10}, χ_{12} は齋藤・黒川リフトで1変数の保型形式から全く容易に構成される。しかしたとえば χ_{35} のテータ定数による表示などは、いかにも複雑である。しかし、実は次のような単純な構成が存在する。今、

$$H_n = \{Z = X + iY; X = {}^tX,\ Y = {}^tY \in M_n(R);\ Y > 0\}.$$

を n 次のジーゲル上半空間として、$n = 2$ のときに、その変数 $Z \in H_2$ の成分を

$$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix}$$

と書く。ここで

$$\chi_{35} = \begin{vmatrix} 4\phi_4 & 6\phi_6 & 10\chi_{10} & 12\chi_{12} \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial\tau} & \frac{\partial\phi_6}{\partial\tau} & \frac{\partial\chi_{10}}{\partial\tau} & \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial z} & \frac{\partial\phi_6}{\partial z} & \frac{\partial\chi_{10}}{\partial z} & \frac{\partial\chi_{12}}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_4}{\partial\tau'} & \frac{\partial\phi_6}{\partial\tau'} & \frac{\partial\chi_{10}}{\partial\tau'} & \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\tau'} \end{vmatrix}$$

がわかるのである。この観察はきわめて単純で、いったんこう気がついたら証明の方法は山ほどある。にもかかわらず、私が調べたり聞いたりした限りでは、この公式に気がついていた人はいなかったようである。これは後で述べる Rankin-Cohen 微分作用素の一般化である。ここに至って、なかなか微分作用素は役に立つと納得するに至ったのである。たとえば、一般次数の $Sp(n,\mathbb{Z})$ に対応するジーゲルモジュラー多様体は n がおおきければ general type なので複雑だというのがふつうの考え方であろう。しかし、これは必ずしも保型形式環が極端に複雑であることを意味しないのではないか。いや、複雑というのは単なる思いこみではないのか。最近の Ikeda lifting などの事情を考慮に入れると、一般次数でももしかしたら意外に単純な操作で生成元がすべて得られるということもあり得ると考える方が夢があると思うのである。現実問題として、このような観点から露峰氏の次数3のジーゲル保型形式環に関する結果（最小の関係式を書ききってはいないという点では完成してない点もある結果）を見直すというのはこの方向の問題として意味のあることに違いないと考える。

2　記号の準備と問題

$GL(2)$ の ν 次対称テンソル表現を $Sym(\nu)$ と書くことにする。$GL(2)$ の有理表現 ρ はすべて $\rho_{k,\nu} = \det^k Sym(\nu)$ の形をしている。$\rho_{k,\nu}$ の表現空間を $V_{k,\nu}$ と書こう。

定義 1 H_2 上の $V_{k,\nu}$ に値をとるベクトル値正則関数 F は

$$F(\gamma Z) = \rho(CZ+D)F(Z)$$

がすべての

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{Z})$$

について成り立つとき、ウェイト $\rho_{k,\nu}$ のベクトル値ジーゲル保型形式という。このような保型形式全体の空間を $M_{k,\nu}(Sp(2,Z)) = M_{k,\nu}$ と書く。また、簡単のために $\nu = 0$ のときは $M_k = M_{k,0}$ と書くことにする。

対称テンソル表現の次数 ν が奇数ならば、すべての k に対し $M_{k,\nu}=0$ となる。$M:=\oplus_{k=0}^{\infty}M_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ の構造はすでに述べた。次は、$\oplus_{k=0}^{\infty}M_{k,2}$ が問題になるが、det のべきが偶数の場合は $\oplus_{k=0}^{\infty}M_{2k,2}$ の構造は佐藤孝和氏により 1986 年頃からわかっている。今回の新結果は、k が奇数の時に、$\oplus_{k=0,odd}\infty M_{k,2}$ の M-module としての構造を与えることである。そのポイントは、偶数ウェイトの保型形式から奇数ウェイトの保型形式を構成できるという新しい観察にある。さて、このように次数の小さいところから順番に空間の構造を決めることにどのような意義があるかということについての感想を述べてみたい。次のような加群

$$\oplus_{k,\nu=0}^{\infty}M_{k,\nu}(Sp(2,\mathbb{Z}))$$

を考えると、表現のテンソル積の分解が重複度 1 であることより、これはテンソル積を積と見なすことにより環と見なすことができる。これはもちろん非常に大きな環であって、この環が有限生成というのはちょっと望めないが、その事情は若干 Jacobi 形式の無限生成の事情に似ている。Eichler-Zagier では、すべてのウェイトとインデックスにわたるヤコービ形式の空間の和は無限生成だが、weak Jacobi というものを考えるとこれは有限生成で構造も単純という結果を出している。最終的にはベクトル値ジーゲル保型形式でも似たことがあるのではないかという気がするのである。すなわち、意外に単純な部分が切り出せて、トータルな k と ν にわたる次元公式の母関数がそれでよく説明できるといったことを夢見ても良いように思う。

3 Rankin-Cohen 微分作用素の一般化とその特徴付け

古典的な Rankin-Cohen 微分作用素というのは次のように述べられる。f, g を $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するウェイトが k, l の保型形式としよう。これらから新しい保型形式を作るには fg をとるのが一番簡単だが、たとえば

$$\{f,g\}_1=lf'g-kfg'$$

とおくと、$\{f,g\}_2$ はウェイトが $k+l+2$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ の保型形式になる。同様に

$$\{f,g\}_\nu=\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu\binom{k+\nu-1}{\mu}\binom{l+\nu-1}{\nu-\mu}f^{(\mu)}g^{(\nu-\mu)}$$

とおけばウェイト $k+l+2\nu$ の保型形式を得る。これらを証明する方法はいろいろある。保型性から単純に組み合わせ的な計算を行うだけでも証明できるし、もともとそのようにして証明されたものと思われる。

さて、なるほど証明は単純かもしれないが、以上の説明はこのままではいろいろ納得のいかないところがある。まず第1にこの作用素は線形とは言い難

い。そこでまず、変数を z_1, z_2 と２つ用意することにして

$$\mathcal{D}_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu \binom{k+\nu-1}{\mu}\binom{l+\nu-1}{\nu-\mu}\frac{\partial^\mu}{\partial z_1^\mu}\frac{\partial^{\nu-\mu}}{\partial z_2^{\nu-\mu}}.$$

とおく。すると $F(z_1,z_2) = f(z_1)g(z_2)$ とおくとき、D で微分してから対角成分に制限することを考えると、

$$\{f,g\}_\nu = \mathrm{Res}_{z=z_1=z_2}(\mathcal{D}_\nu(F))$$

と書けるのである。この結果、もともとの作用のかわりに定数係数正則線形偏微分作用素 D_ν と考えればよいことになって、わかりやすい。もうひとつ気に入らない点は、離散群を指定して話をしているところである。このような理論は全く形式的な話なので、離散群が関係するような話ではない。実際、f, g が保型形式という条件を忘れて、ともに単なる上半平面上の正則関数として、任意のこのような関数 f, g と任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ について次の関係式

$$\mathrm{Res}_{z=z_1=z_2}\left(\mathcal{D}_\nu\left(F\left(\frac{az_1+b}{cz_1+d}, \frac{az_2+b}{cz_2+d}\right)(cz_1+d)^{-k}(cz_2+d)^{-l}\right)\right)$$

$$= \left((\mathrm{Res}_{z=z_1=z_2}(\mathcal{D}_\nu F))\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)(cz+d)^{-l-k-2\nu},$$

を満たすような D_ν が Rankin-Cohen operator だとする方が筋が通っている。これはすなわち、D_ν は $SL_2(\mathbb{R})$ の無限次元表現のテンソル積の既約分解への intertwining operator を与えているということになる。以上のような発想によれば Rankin-Cohen の高次元版を定式化するのは容易である。

以下、一般化を述べる。一般次数では定義の定式化以外にさらには Rankin-Cohen operator が具体的にどのような作用素になるのかという問題が別にあるわけだが、これについても不変調和多項式による特徴付けを与えることができる。これらについて次に述べる。H_n の r 個の積 D と、その対角成分 $\Delta \cong H_n$ を考えよう。

$$\begin{aligned} D &= H_n \times H_n, \\ \Delta &= (Z, \ldots, Z) \subset H_n. \end{aligned}$$

D 上の関数 $F(Z_1, \ldots, Z_r)$ と整数 $k_1, k_2, \ldots, k_r$, および $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n.\mathbb{R})$ に対して

$$F|_{k_1,\ldots,k_r}[g](Z_1, \ldots, Z_r) = F(gZ_1, \ldots, gZ_r)\prod_{i=1}^{r}\det(CZ_i+D)^{-k_i}$$

とおく。一方、$GL_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現 (ρ, V) に対して、H_n 上の関数 V-valued な関数 $G(Z)$ と $g \in Sp(n,\mathbb{R})$ に対して、

$$G|_\rho[g] = \rho(CZ+D)^{-1}G(Z)$$

(ρ, V) を上の通りとする。また $\mathcal{D}$ を D 上の関数に対する V 値定数係数同次正則線形偏微分作用素とする。ここで V 値というのはすなわち、$\mathcal{D}$ は V の次元分だけの成分を持つ微分作用素のベクトルということである。よって、$\mathbb{C}$ 値関数 F について、$\mathcal{D}F$ は関数を成分にもつベクトルであるが、ベクトル値関数と言っても同じ事である。$\mathcal{D}$ について、次の交換関係を考える。

交換関係 1 領域 D 上の任意の正則関数 F と自然数 $k_1, \ldots, k_r$ について

$$\mathrm{Res}_\Delta(\mathcal{D}F|_{k_1,\ldots,k_r}[g]) = (\mathrm{Res}_\Delta(\mathcal{D}F))|_{\det^{k_1+\cdots+k_r}\rho}[g].$$

ただし、*Res* は D から Δ への制限をあらわし、右辺では Δ と H_n を同一視している。

ここで、$\mathcal{D}$ を同次定数係数線形と仮定したことによって、$\mathcal{D}$ を多項式を用いて表すことができる。すなわち、${}^tR_i = R_i$ $(1 \le i \le r)$ を成分が変数の n 次対称行列として、$Q(R_1, \ldots, R_r)$ を $rn(n+1)/2$ 変数の V への同次多項式、すなわち成分が V の次元個の多項式ベクトルとする。ジーゲル上半空間の変数 $Z = (z_{ij}) \in H_n$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)$$

とおけば、$\mathcal{D}$ は適当な Q に対して

$$\mathcal{D} = Q\left(\frac{\partial}{\partial Z_1,}, \ldots, \frac{\partial}{\partial Z_r}\right)$$

と書ける。このとき

定理 1 (cf. [5]) すべての i $(1 \le i \le r)$ に対して、$2k_i \ge n$ と仮定する。$\mathcal{D}$ が上の交換関係を満たすための必要十分条件は Q が次の２つの条件を満たすことである。

(1) $Q(AR_1{}^tA, \ldots, AR_r{}^tA) = \rho(A)Q(R_1, \ldots, R_r)$

(2) X_i $(1 \le i \le r)$ を独立な変数を成分とする n 行 $2k_i$ 列の行列とし、$X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ とおく。ベクトル値多項式 P を $P(X) = Q(X_1{}^tX_1, \ldots, X_r{}^tX_r)$ と定めるとき、P は *pluri-harmonic* である。

ここで pluri harmonic（多重調和と呼ぼう）というのは、任意の $A \in GL_n(\mathbb{C})$ に対して、$P(AX)$ （の成分）が $d := 2n(k_1 + \cdots + k_r)$ 変数の多項式として harmonic と言う意味である。あるいは同じことだが、任意の i, j, $(1 \le i, j \le n)$ について

$$\Delta_{ij} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{ik}\partial x_{jk}}\right)$$

とおくとき、$\Delta_{ij}(P)=0$ ということである。

さて、以上の定理は微分作用素の存在をある種の多項式の存在に帰着はしたが、多項式の存在自身を保証するものではない。いつこのような多項式が存在するか、ないしはそれがどのようなものになるのかというのはは別の問題である。しかしこれについては、古典群による次のような解釈が可能である。まず、n 行 d 次の行列 $X\in M_{n,d}$ の成分を変数とする多重調和多項式 $P(X)$ 全体の空間を $\mathcal{H}_{n,d}$ と書くことにする。$\mathcal{H}_{n,d}$ には $GL_n\times O(d)$ が

$$P(X)\to P({}^tAXg) \qquad (A,g)\in GL_n\times O(d)$$

により作用している。ここで $O(d)$ は d 次直交群である（複素でも実でもよい。）しかし $\mathcal{H}_{n,d}$ の既約分解は Kashiwara and Vergne によりわかっている。すなわち、GL_n の既約表現 τ と $O(d)$ の既約表現 λ について、$\tau\otimes\lambda$ が $\mathcal{H}_{n,r}$ 上での既約成分として現れるならば、少なくともわれわれの仮定下では、まず重複度が 1 であり、さらに τ と λ は互いに 1 対 1 である。すなわち、λ は τ のみによって決まる。もし、$\tau=\rho$ とおいて、ρ の表現空間を V とし、我々の定理のように、 V-valued polynomial map を考えて $P(X)=Q(X_1^tX_1,\dots,X_r^tX_r)$ とおくならば、まず第 1 に $P(AX)=\rho(A)P(X)$ であり、ここで $P(X)\to P(Xg)$ なる作用を与える λ が一意的に決まる。さらに、$(g_1,\dots,g_r)\in O(2k_1)\times\cdots\times O(2k_r)$ に対して、$P(Xg_1,\dots,Xg_r)=P(X)$ である。逆に、$X\in M_{n,r}$ 上の任意の V 値多重調和多項式写像 $P(X)$ をとり、さらに任意の $O(2k_1)\times\cdots\times O(2k_r)$ の元について、

$$P(X_1g_1,\dots,X_rg_r)=P(X)$$

を仮定すると、われわれの $2k_i\geq n$ という仮定と古典的な不変式論（たとえば H. Weyl ）から、定理の条件を満たす多項式 Q が存在して、$P(X)=Q(X_1^tX_1,\dots,X_r^tX_r)$ となる。すなわち、$P(X)$ は λ を $O(2k_1)\times\cdots\times O(2k_r)$ に制限した表現を既約分解した時に、単位表現からなる成分に含まれる。言い換えると「不変調和多項式」の次元は λ の制限の既約分解に含まれる単位表現の重複度に等しい。これは原理的には指標の計算で計算可能である。もちろん実際の計算はやさしくないし、具体的に $P(X)$ を記述するのはさらに別の問題となる。これらについては、[1], [3], [11] などを参照されたい。

表現 ρ が行列式のべきである時の実例

Q がベクトルではない多項式である実例をひとつ述べておく。$r=1+n(n+1)/2$ とおく。R_l $(1\leq l\leq r)$ を n 次対称行列として、成分を $R_l=(r_{ij}^{(l)})$ と書く。$k_1,\dots,k_r$ を自然数として、$rn(n+1)/2$ 変数の多項式 $Q(R_1,\dots,R_r)$ を、

$1+n(n+1)/2$ 次の行列式を用いて

$$Q(R_1,\dots,R_r)=\begin{vmatrix} k_1 & \dots & \dots & \dots & k_r \\ r_{11}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & r_{11}^{(r)} \\ r_{12}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & r_{12}^{(r)} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ r_{nn}^{r} & \dots & \dots & \dots & r_{nn}^{(r)} \end{vmatrix}$$

と定義する。ここで成分の $r_{ij}^{(l)}$ は $i\le j$ の部分だけをとった。$Z_i\in H_n$ $(1\le i\le r)$ として、

$$\mathcal{D}=Q\left(\frac{\partial}{\partial Z_1},\cdots\frac{\partial}{\partial Z_r}\right)$$

とおく。前の定理によれば、次の事実が成り立つ。

系 1 上と同様、$r=1+n(n+1)/2$ として、$F_1(Z),\dots,F_r(Z)$ を H_n 上の適当な離散群 Γ に関するウェイトがそれぞれ $k_1,\dots k_r$ の保型形式であるとする。このとき、

$$\mathrm{Res}(\mathcal{D}(F_1(Z_1)\cdots F_r(Z_r)))$$

(*Res* は $H_n\times\cdots\times H_n$ の対角成分への制限) は、H_n 上の Γ に関するウェイトが $k_1+\cdots+k_r+n(n+1)/2$ の保型形式である。特に $F_1,\dots,F_r$ が代数的独立ならばこの保型形式もゼロではない。

最後の事実は証明が必要だが、$n(n+1)/2$ が上半空間の複素次元であることを思えば、さして難しくはない。特にこの系により、最初に述べたとおり、代数的独立な元 ϕ_4, ϕ_6, χ_{10}, χ_{12} から χ_{35} が作れることになる。すなわち、最初に述べた微分作用素は、我々の言う Rankin-Cohen operator の一般化の一例であって、一般には次数２のジーゲル保型形式４つからウェイトが $k_1+k_2+k_3+k_4+3$ の保型形式を作る方法を与えている。これを用いれば同じ方法で次数２レベル２の合同部分群 $\Gamma_0(2)$ の最小の奇数ウェイト 19 の保型形式を偶数ウェイトから構成できる。$\Gamma_0(3)$ になるとこれほど単純ではなくなる。

4 Dual case についての注意

前述の定式化の一種の dual として、領域を取り替えて

$$\begin{aligned} D &= H_n \\ \Delta &= H_{n_1}\times\cdots\times H_{n_r} \qquad n=n_1+\cdots+n_r \end{aligned}$$

として、同じような微分作用素を考えることもできる。実はこの場合の $n=1$, $r=2$ のときが算術交点理論との関係で Gross-Zagier により使われた場合である。また、$n=1$, $r=3$ の場合も Boecherer, Schulze-Pillot などにより使用されている。また表現論的にも特殊関数論的にもこの場合の方が面白い。たとえば Legendre or Gegenbauer polynomial の一般化などが得られるし、ホロノミー系なども出てきて大変興味深い (cf. [8])。実際に open problems の面白さから言えばむしろこちらの方が美しい数学のように見える。このような点から、著者自身 Rankin-Cohen という方向にはあまり興味を感じていなかった。しかし、保型形式を構成するという観点から言えば、この dual case は、ジーゲル保型形式をその対角線に制限するといった方向であり、少なくとも易しいものから難しいものを構成しているとは言いにくいと言う難点がある。よって、少なくともこのような観点からは Rankin-Cohen operators の方が使いやすいということは言えるであろう。また、Vertex operator algebra と Rankin-Cohen algebra の親近性が最近言われているが、このあたりのことはジーゲルではまだよくわからないので何とも言えない。

5 ベクトル値ジーゲル保型形式

具体的な記述をするために、2次対称テンソル表現を基底を固定して成分で正確に定義しておく。

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して、GL_2 の $\mathbb{C}^3$ への表現 Sym(2) を

$$\mathrm{Sym}(2)(A)=\mathrm{Sym}(2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

と定義する。以下、$\mathbb{C}^3$ valued のウェイトが $\rho_{k,2}=\det^k \mathrm{Sym}(2)$ のジーゲル保型形式というのは、この具体的にこの基底に関するものと考える。次に、天下り式に $\det^k \mathrm{Sym}(2)$ valued の Rankin-Cohen operator を与える。(k の説明はあとで与えられる。) 2次の対称行列 R, S, T の成分を

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \qquad S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}$$

と書く。k_1, k_2, k_3 を自然数として、これらによって決まる9変数の多項式からなる3次ベクトル $Q(R,S,T)$ を

$$Q(R,S,T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{22} \\ s_{11} & s_{12} & s_{22} \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{22} \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ s_{11} & s_{12} & s_{22} \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

で定義する。ウェイト k_1, k_2, k_3 の２次ジーゲル保型形式 F, G, H に対して、

$$\{F,G,H\}_{1,2}(Z) = \mathrm{Res}_{Z=Z_1=Z_2=Z_3}\left(Q\left(\frac{\partial}{\partial Z_1}, \frac{\partial}{\partial Z_2}, \frac{\partial}{\partial Z_3}\right)(F(Z_1)G(Z_2)H(Z_3))\right)$$

とおく。

系 2 記号を上の通りとして、$\{F,G,H\}_{1,2}$ はウェイトが

$$\rho_{k_1+k_2+k_3+1,2} = \det{}^{k_1+k_2+k_3+1}\mathrm{Sym}(2)$$

のベクトル値ジーゲル保型形式になる。

念のため、$Z \in H_2$ の成分 τ, z, τ' を前に定めたようにとって、書き下すと

$\{F,G,H\}_{1,2}(Z) =$

$$k_1 F \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial \tau} \\ 2\left(\frac{\partial G}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial \tau'} - \frac{\partial G}{\partial \tau'}\frac{\partial H}{\partial \tau}\right) \\ \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial \tau'} - \frac{\partial G}{\partial \tau'}\frac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix} - k_2 G \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial \tau} \\ 2\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial H}{\partial \tau'} - \frac{\partial F}{\partial \tau'}\frac{\partial H}{\partial \tau}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial \tau'} - \frac{\partial F}{\partial \tau'}\frac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix} + k_3 H \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial \tau} \\ 2\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial G}{\partial \tau'} - \frac{\partial F}{\partial \tau'}\frac{\partial G}{\partial \tau}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial \tau'} - \frac{\partial F}{\partial \tau'}\frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

となる。ただしここで右辺では F, G, H は Z の関数と思って微分している。これを適用して、たとえば、

$$\{\phi_4, \phi_6, \chi_{10}\}_{1,2} \in M_{21,2} \qquad \{\phi_4, \phi_6, \chi_{12}\}_{1,2} \in M_{23,2}$$
$$\{\phi_4, \chi_{10}, \chi_{12}\}_{1,2} \in M_{27,2} \qquad \{\phi_6, \chi_{10}, \chi_{12}\}_{1,2} \in M_{29,2}$$

を得る。また、

$$M^{even} = \oplus_{k=0}^{\infty} M_{2k}(Sp(2,\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[\phi_4, \phi_6, \chi_{10}, \chi_{12}]$$

とおくと、これらは M^{even} 上独立ではなく次の関係式が成り立つことが示される。

$$\begin{aligned}&12\chi_{12}\{\phi_4,\phi_6,\chi_{10}\}_{1,2}-10\chi_{10}\{\phi_4,\phi_6,\chi_{12}\}_{1,2}\\&\quad+6\phi_6\{\phi_4,\chi_{10},\chi_{12}\}_{1,2}-4\phi_4\{\phi_6,\chi_{10},\chi_{12}\}_{1,2}=0\end{aligned}$$

定理 2 次の結果が成立する。

$$\begin{aligned}&\oplus_{k=0,\ k:\mathrm{odd}}^{\infty}M_{k,2}(Sp(2,\mathbb{Z}))\\&=\ M^{even}\{\phi_4,\phi_6,\chi_{10}\}_{1,2}\oplus M^{even}\{\phi_4,\phi_6,\chi_{12}\}_{1,2}\\&\quad\oplus M^{even}\{\phi_4,\chi_{10},\chi_{12}\}_{1,2}\oplus\mathbb{C}[\phi_6,\chi_{10},\chi_{12}]\{\phi_6,\chi_{10},\chi_{12}\}_{1,2}\end{aligned}$$

ここで $\oplus$ は加群としての直和をあらわす。

ちなみに k が奇数ならばもともとカスプ形式しか存在しないので、これらはカスプ形式でもある。

証明には対馬氏による $M_{k,2}$ の次元公式などを用いる。(cf. [13]) その他の証明の細部は [6] を論文を参照されたい。

参考文献

[1] Y-J. Choie and W. Eholzer, *Rankin-Cohen Operators for Jacobi and Siegel Forms*, J. Number Theory 68(1998), 160–177.

[2] M. Eichler and D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Birkhäuser, 1985, Boston-Basel-Stittgart.

[3] W. Eholzer and T. Ibukiyama, Rankin-Cohen type differential operators for Siegel modular forms, International J. Math. Vol. 9, No. 4(1998), 443–463.

[4] T. Ibukiyama, On Siegel modular varieties of level 3, International J. Math. Vol. 2 No. 1(1991), 17–35.

[5] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials, Comm. Math. Univ. St. Pauli, 48(1999), 103–118.

[6] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms and differential operators, (tentative title, in preparation).

[7] T. Ibukiyama, Siegel modular forms of odd weights of small levels, (tentative title, in preparation).

[8] T. Ibukiyama and D. Zagier, On higher spherical polynomials, in preparation since 1990.

[9] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two, Amer. J. Math. 84(1962), 175–200; II, ibid. 86(1964), 392–412.

[10] J. Igusa, Modular forms and projective invariants, Amer. J. Math. 89 (1967), 817–855.

[11] M. Miyawaki, Explicit construction of Rankin-Cohen type differential operators for vector valued Siegel modular forms, preprint(18 pages), 2000.

[12] Takakazu Satoh, On certain vector valued Siegel modular forms of degree two. Math. Ann. 274 (1986), no. 2, 335–352.

[13] R. Tsushima, An explicit dimension formula for the spaces of generalized Siegel modular forms with respect to $Sp(2, \mathbb{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59(1983), no. 4, 139–142.

Department of Mathematics
Graduate School of Science
Osaka University
Machikaneyama 1-16
Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan
ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp