数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 107-113

二次超曲面へのアファインはめ込みの基本定理とその応用

東京理科大学大学院理学研究科　長谷川和志 (Kazuyuki Hasegawa)
Department of Mathematics, Faculty of Science
Science University of Tokyo

1. 序

リーマン幾何学における等長はめ込み，およびアファイン微分幾何学におけるアファインはめ込みに対する基本定理 (存在定理と合同定理) は重要かつ有用であり次のことが知られている ([2], [3] [4], [6]).

存在定理について: Mを単連結 n 次元多様体，∇ を Mの捩れのない接続とする．Eを M上の階数 p の M上のベクトル束とし，h を $\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, E)$ の対称な切断，A を $\mathrm{Hom}(TM \otimes E, TM)$ の切断，∇^Eを Eの接続とする．これらに対して, Mの等長またはアファインはめ込み $f : M \to \tilde{M}$が次の仮定の下で存在する (表 1).

	等長はめ込み	アファインはめ込み
仮	g^E: Eの計量, $\nabla^E g^E = 0$ g: Mの計量, $\nabla g = 0$	∇, h, A, ∇^E: $\tilde{M}$が $(\boldsymbol{R}^{n+p}, D)$ の場合の構造方程式と同じ型の式を満たす (D : 標準接続)
	$g(A_\xi X, Y) = g^E(h(X,Y), \xi)$	
定	∇, h, A, ∇^E: $\tilde{M}$が定曲率 c の場合の構造方程式と同じ型の式を満たす	
$\tilde{M}$	$c = 0$ のとき $\boldsymbol{R}^{n+p}$	$(\boldsymbol{R}^{n+p}, D)$
	$c > 0$ のとき ${S^{n+p}}_c$	
	$c < 0$ のとき ${H^{n+p}}_c$	

(表 1)

ここで, $\boldsymbol{R}^{n+p}$, ${S^{n+p}}_c$, ${H^{n+p}}_c$ はそれぞれ定曲率 0, $c > 0$, $c < 0$ の空間形である.

合同定理について: 連結な多様体 Mの等長はめ込みまたはアファインはめ込み f, $\bar{f} : M \to \tilde{M}$ に関して次の仮定のもとで合同 (剛性) 定理が成立する (表 2).

	等長はめ込み	アファインはめ込み
仮定	$\tilde{g}(F(\xi), F(\xi')) = \bar{g}(\xi, \xi')$, $F(h(X,Y)) = \bar{h}(X,Y)$, $F(\nabla^{\perp}_X \xi) = \overline{\nabla}^{\perp}_X F(\xi)$ を満たすベクトル束同型 $F : (T^{\perp}M)_f \to (T^{\perp}M)_{\bar{f}}$ が存在	$F(h(X,Y)) = \bar{h}(X,Y)$, $A_{\xi}X = \bar{A}_{F(\xi)}X$, $F(\nabla^{\perp}_X \xi) = \overline{\nabla}^{\perp}_X F(\xi)$ を満たすベクトル束同型 $F : N \to \bar{N}$ が存在
$\tilde{M}$	$\boldsymbol{R}^{n+p}$	$(\boldsymbol{R}^{n+p}, D)$
	${S^{n+p}}_c$	
	${H^{n+p}}_c$	

(表 2)

ただし, $(T^{\perp}M)_f$, $(T^{\perp}M)_{\bar{f}}$ は法束, N, $\bar{N}$ は横断束であり, h, $\bar{h}$は f, $\bar{f}$の第二基本形式 (アファイン第二基本形式), A, $\bar{A}$は f, $\bar{f}$の形作用素 (アファイン形作用素) $\nabla^{\perp}, \overline{\nabla}^{\perp}$は f, $\bar{f}$の法接続 (アファイン法接続) である.

アファインはめ込みにおいて上記の表 1, 2 のように$\tilde{M}$が $(\boldsymbol{R}^{n+p}, D)$ の場合には基本定理が知られている. 本稿ではその一般化となる, $\tilde{M}$が 3 節で定義される (Q, ∇^{Q}) の場合のアファインはめ込みの基本定理について報告する.

2. アファインはめ込み

M, $\tilde{M}$をそれぞれ n, $n+p$ 次元の多様体とし, $f : M \to \tilde{M}$をはめ込みとする。Mの接バンドル $T\tilde{M}$の fによる引き戻しを $f^{\#}(T\tilde{M})$ とする. ベクトル束 $f^{\#}(T\tilde{M})$ の部分ベクトル束 Nが

$$f^{\#}(T\tilde{M}) = TM \oplus N$$

を満たすとき Nは fに横断的であるという. Nが fに横断的のとき $p_{TM} : f^{\#}(T\tilde{M}) \to TM$, $p_N : f^{\#}(T\tilde{M}) \to N$を射影とする. ∇, $\tilde{\nabla}$をそれぞれ M, $\tilde{M}$上の接続とする. $\tilde{\nabla}$の引き戻しを $f^{\#}\tilde{\nabla}$と表わす. ベクトル束 Eに対し, E_xで $x \in M$のファイバー, $\Gamma(E)$ で切断の空間, $\mathcal{C}(E)$ で接続の空間表わす.

定義. はめ込み $f : (M, \nabla) \to (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ が
(1) Nは fに横断的である.
(2) $X, Y \in \Gamma(TM)$ に対して $p_{TM}((f^{\#}\tilde{\nabla})_X Y) = \nabla_X Y$が成立.
を満たすとき Nを横断束とするアファインはめ込みという.

補題 2.1. $f : (M, \nabla) \to (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を Nを横断束とするアファインはめ込みとする. このとき, h, A, $\nabla^{\perp}$を

$$h(X, Y) := p_N((f^{\#}\tilde{\nabla})_X Y) \quad (X,\ Y \in \Gamma(TM))$$

$$A_\xi X := -p_{TM}((f^\# \tilde{\nabla})_X \xi) \quad (X \in \Gamma(TM),\ \xi \in \Gamma(N))$$
$$\nabla^\perp_X \xi := p_N((f^\# \tilde{\nabla})_X \xi) \quad (X \in \Gamma(TM),\ \xi \in \Gamma(N))$$

と定義すると, $h \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, N))$, $A \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \otimes N, TM))$, $\nabla^\perp \in \mathcal{C}(N)$ であり,

$$(f^\# \tilde{\nabla})_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad \text{(Gauss formula)}$$
$$(f^\# \tilde{\nabla})_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \quad \text{(Weingarten formula)}$$

が成立する.

$f : (M, \nabla) \to (\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を Nを横断束とするアファインはめ込みとするとき, 補題 2.1 の h, A, $\nabla^\perp$ をそれぞれ, アファイン基本形式, アファイン形作用素, アファイン法接続とよぶ.

3. 二次超曲面へのアファインはめ込みの基本定理

$(x^1, ..., x^l)$ を$\boldsymbol{R}^l$の標準座標系とし, Dを$\boldsymbol{R}^l$の標準接続とする. $\boldsymbol{R}^l$の二次超曲面（もしくは, 超平面）Q を

$$Q^{l-1}(r, \bar{r}) = \{\ p \in \boldsymbol{R}^l \mid -\sum_{i=1}^{\bar{r}} (x^i(p))^2 + \sum_{j=r+1}^{r+\bar{r}} (x^j(p))^2 - 1 = 0\ \}$$

$$Q'^{l-1}(r', \bar{r}') = \{\ p \in \boldsymbol{R}^l \mid -\sum_{i=1}^{r'} (x^i(p))^2 + \sum_{j=r'+1}^{r'+\bar{r}'} (x^j(p))^2 - 2x^l(p) = 0\ \}$$

のいずれかとする. ここで, $0 < r + \bar{r} \leq l$, $0 \leq r' + \bar{r}' \leq l - 1$ とする. νは $Q = Q^{l-1}(r, \bar{r})$ のときは$-\sum_{i=1}^{l} x^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ を, $Q = Q'^{l-1}(r', \bar{r}')$ のときは$\dfrac{\partial}{\partial x^l}$ を表わすものとする. $\iota : Q \to \boldsymbol{R}^l$を包含写像とする. 分解$\iota^\#(T\boldsymbol{R}^l) = TQ \oplus \mathrm{span}\{\nu|_Q\}$ を用いて, $\nabla^Q \in \mathcal{C}(TQ)$ と対称な $(0, 2)$ テンソル h^Qを

$$\nabla^Q_X Y := p_{TQ}(D_X Y),\ h^Q(X, Y)\nu := p_{\mathrm{span}\{\nu|_Q\}}(D_X Y) \quad (X,\ Y \in \Gamma(TQ))$$

で定義する. このとき$\iota : (Q, \nabla^Q) \to (\boldsymbol{R}^l, D)$ は, $Q = Q^{l-1}(r, \bar{r})$ のときは中心アファイン埋め込みで, $Q = Q'^{l-1}(r', \bar{r}')$ のときはグラフ埋め込みとなる.

定理 3.1. (M, ∇) を捩れのない接続 ∇ をもった単連結 n 次元多様体, Eを接続 ∇^Eをもった M上の階数 p のベクトル束とする.

$$h \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, E)),\ \rho \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \otimes TM, M \times \boldsymbol{R}))$$

$$\hat{\rho} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E \otimes E, M \times \boldsymbol{R}))$$

を対称な切断とし,

$$\bar{\rho} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E \otimes TM. M \times \boldsymbol{R})).\ A \in \Gamma(\mathrm{Hom}(TM \otimes E. TM))$$

とする. $\varepsilon \in \{0,1\}$ とする. $X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM),\ \xi,\ \xi' \in \Gamma(E)$ に対して

$$R_{X,Y}Z = A_{h(Y,Z)}X - A_{h(X,Z)}Y + \varepsilon\rho(Y,Z)X - \varepsilon\rho(X,Z)Y,$$

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z),$$

$$(\nabla_Y A)_\xi X - (\nabla_X A)_\xi Y = \varepsilon\bar{\rho}(Y,\xi)X - \varepsilon\bar{\rho}(X,\xi)Y,$$

$$R^E_{X,Y}\xi = h(X, A_\xi Y) - h(Y, A_\xi X),$$

$$(\nabla_Z\rho)(X,Y) - \bar{\rho}(X, h(Y,Z)) - \bar{\rho}(Y, h(X,Z)) = 0,$$

$$(\nabla_Y\bar{\rho})(X,\xi) - \hat{\rho}(\xi, h(Y,X)) + \rho(X, A_\xi Y) = 0,$$

$$(\nabla_Y\hat{\rho})(\xi,\xi') + \bar{\rho}(A_\xi Y, \xi') + \bar{\rho}(A_{\xi'}Y, \xi) = 0$$

とする. ここで $R,\ R^E$はそれぞれ $\nabla,\ \nabla^E$の曲率とする. 対称な切断$\psi \in \Gamma((TM\oplus E)\otimes(TM\oplus E), M\times \boldsymbol{R})$ を

$$\psi(X+\xi, X+\xi) = \rho(X,X) + 2\bar{\rho}(X,\xi) + \hat{\rho}(\xi,\xi)$$

で定義し, その符号数は $(s,\bar{s})$ であるとする. ここで $X \in \Gamma(TM),\ \xi \in \Gamma(E)$ である. このとき, $\varepsilon = 1$ のときは $Q = Q^{n+p}(s, \bar{s}+1)$ に対して, $\varepsilon = 0$ のときは $Q = Q'^{n+p}(s,\bar{s})$ に対して, 横断束 Nをもったアファインはめ込み $f : (M,\nabla) \to (Q, \nabla^Q)$ とベクトル束同型$\varphi : E \to N$ で

$$\rho(X,Y) = h^Q(f_*X, f_*Y),\ \bar{\rho}(X,\xi) = h^Q(f_*X, f_\#\varphi(\xi)),$$

$$\hat{\rho}(\xi,\xi') = h^Q(f_\#\varphi(\xi), f_\#\varphi(\xi')),$$

$$\tilde{h}(X,Y) = \varphi(h(X,Y)),\ \tilde{A}_{\varphi(\xi)}X = A_\xi X,\ \tilde{\nabla}^\perp_X\varphi(\xi) = \varphi(\nabla^E_X\xi)$$

を満たすものが存在する. ここで, $\tilde{h},\ \tilde{A},\ \tilde{\nabla}^\perp$はアファインはめ込み fのアファイン基本形式, アファイン形作用素, アファイン法接続である.

よく知られているように, 任意のリーマン多様体 (M,g) は十分次元の高いユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}^q, g_0)$ に等長的に埋め込むことができる ($q = \frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)$ で十分). 一方, [1] において, 捩れのない接続 ∇ が与えられた (M,∇) に対しては, 十分次元の高いアファイン空間 $(\boldsymbol{R}^q, D)$ へのアファイン埋め込みが存在することが証明されている ($q = \frac{1}{2}n(n+5)$ で十分). アファインはめ込みは等長はめ込みの一般化でもあるので, アファインはめ込みの一つの応用として, Nash の定理における余次元を下げる議論に使えると思われる.

定理 3.2. (M,∇) を捩れのない接続 ∇ をもった連結な多様体とする. fと$\bar{f}$をそれぞれ (M,∇) から (Q,∇^Q) への $N,\ \bar{N}$を横断束とするアファインはめ込みとする. $h,\ A,\ \nabla^\perp$ と $\bar{h},\ \bar{A}, \overline{\nabla}^\perp$をそれぞれアファインはめ込み $f,\ \bar{f}$のアファイン基本形式, アファイン形作用素, アファイン法接続とする. 次の条件を満たすベクトル束同型 $F : N \to \bar{N}$が存在するとする: $X,\ Y \in \Gamma(TM),\ \xi,\ \xi' \in \Gamma(N)$ に対して,

$$\bar{h}(X,Y) = Fh(X,Y),\ \bar{A}_{F(\xi)}X = A_\xi X,\ \overline{\nabla}^\perp_X F(\xi) = F\nabla^\perp_X\xi,$$

$$h^Q(f_*X, f_\#\xi) = h^Q(\bar{f}_*X, \bar{f}_\# F\xi),\ h^Q(f_\#\xi, f_\#\xi') = h^Q(\bar{f}_\# F\xi, \bar{f}_\# F\xi')$$

を満たす．さらに $f^*h^Q = \bar{f}^*h^Q$ を仮定する．このとき，$\bar{f} = \psi \circ f$ と $\psi^*h^Q = h^Q$ を満たす Q のアファイン変換 $\psi : (Q, \nabla^Q) \to (Q, \nabla^Q)$ が存在する．

定理 3.1, 定理 3.2 の証明は初等的にできる ([5]). [9] において，$\boldsymbol{C}^n$ への purely real はめ込みの基本定理が証明されているがその証明はあまり初等的ではない．[8] では，定理 3.1, 定理 3.2 の証明と同様な手法で $\boldsymbol{C}^n$ への purely real はめ込みの基本定理が証明されている．

4. 応用

この節では，定理 3.1, 定理 3.2 の応用を述べる．[7] において一般余次元の等積はめ込みが以下のように定義されている．M の各点で 0 でない $\theta \in \Gamma(\Lambda^n(E^*))$ をベクトル束 E の体積要素という．特に，TM の体積要素を M の体積要素という．(M, ∇)，$(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ を捩れのない接続をもった多様体，$f : M \to \tilde{M}$ を N を横断束とするアファインはめ込みとする．$\tilde{\theta}$ を $\tilde{M}$ の体積要素，$\theta^\perp$ を N の体積要素とする．特に $\tilde{\nabla}\tilde{\theta} = 0$ のとき $\tilde{M}$ は等積アファイン構造 $(\tilde{\nabla}, \tilde{\theta})$ をもつという．θ の体積要素を

$$\theta(X_1, ..., X_n) := \frac{\tilde{\theta}(f_*X_1, ..., f_*X_n, f_\#\xi_1, ..., f_\#\xi_p)}{\theta^\perp(\xi_1, ..., \xi_p)}$$

で定義する．ここで $X_1, ..., X_n \in \Gamma(TM)$，$\xi_1, ..., \xi_p \in \Gamma(N)$ は各点 $p \in M$ において N_p の基底となっているとする．この θ を $\tilde{\theta}$ からの $(N, \theta^\perp)$ に関する誘導体積要素という．$\tilde{\nabla}\tilde{\theta} = 0$ のとき $\nabla\theta = 0$ が成立することと $\nabla^\perp\theta^\perp = 0$ が成立することは同値である．等積アファイン構造 (∇, θ) をもつ M から等積アファイン構造 $(\tilde{\nabla}, \tilde{\theta})$ をもつ $\tilde{M}$ へのはめ込み $f : M \to \tilde{M}$ が横断束 $(N, \theta^\perp)$ をもつ等積アファインはめ込みであるとは横断束 N と N の体積要素 $\theta^\perp$ でその誘導接続と誘導体積要素がそれぞれ ∇ と θ になるときをいう．

アファイン埋め込み $\iota : Q \to \boldsymbol{R}^{n+p+1}$ において $\mathrm{span}\{\nu\}$ に $\theta^\perp(\nu) = 1$ となる体積要素 $\theta^\perp$ を与え，$\boldsymbol{R}^{n+p+1}$ の標準体積要素からの $(\mathrm{span}\{\nu\}, \theta^\perp)$ に関する Q の誘導体積要素を θ^Q とする．

系 4.1. M を等積アファイン構造 (∇, θ) をもつ単連結な多様体，E を接続 ∇^E と $\nabla^E\theta^E = 0$ を満たす体積要素 θ^E をもつ階数 p のベクトル束とする．h, A, ρ, $\bar{\rho}$, $\hat{\rho}$ は定理 3.1 を満たすと仮定する．このとき $(N, \theta^\perp)$ を横断束とする等積アファインはめ込み $f : (M, \nabla, \theta) \to (Q, \nabla^Q, \theta^Q)$ とベクトル束同型 $\varphi : E \to N$ で，

$$\theta^\perp = (\varphi^{-1})^*\theta^E,\ \rho(X, Y) = h^Q(f_*X, f_*Y),$$

$$\bar{\rho}(X, \xi) = h^Q(f_*X, f_\#\varphi(\xi)),\ \hat{\rho}(\xi, \xi') = h^Q(f_\#\varphi(\xi), f_\#\varphi(\xi')),$$

$$\tilde{h}(X, Y) = \varphi(h(X, Y)),\ \tilde{A}_{\varphi(\xi)}X = A_\xi X,\ \tilde{\nabla}^\perp_X\varphi(\xi) = \varphi(\nabla^E_X\xi)$$

を満たすものが存在する．

$\boldsymbol{R}^l{}_r$を指数rの標準計量Gをもつl次元擬ユークリッド空間．$Q^l{}_r(c)$を

$$Q^l{}_r(c) := \begin{cases} \{\, p \in \boldsymbol{R}^{l+1}{}_{r+\frac{1-\mathrm{sign}(c)}{2}} \mid G(p,p) = (1/c) \,\} \ (\text{if } c \neq 0) \\ \boldsymbol{R}^l{}_r \ (\text{if } c = 0) \end{cases},$$

で定義する．ここで

$$\mathrm{sign}(c) = \begin{cases} 1 \ (c > 0) \\ -1 \ (c < 0) \end{cases}$$

とする．

次のよく知られた定理が得られる．

系 4.2. (M,g)を指数rの計量gをもつ単連結擬リーマン多様体，∇をLevi-Civita接続，Eを指数r^Eの計量g^Eをもつ階数pの擬リーマンベクトル束とする．∇^Eは(E,g^E)の計量接続，hを$\mathrm{Hom}(TM\otimes TM,E)$の対称な切断とする．$\mathrm{Hom}(TM\otimes E,TM)$の切断$A$を$X$, $Y\in\Gamma(TM)$，$\xi\in\Gamma(E)$に対して

$$g(A_\xi X,Y) = g^E(\xi,h(X,Y))$$

で定義する．$c\in\boldsymbol{R}$に対して

$$R_{X,Y}Z = A_{h(Y,Z)}X - A_{h(X,Z)}Y + cg(Y,Z)X - cg(X,Z)Y,$$

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z)$$

$$R^E_{X,Y}\xi = h(X,A_\xi Y) - h(Y,A_\xi X)$$

と仮定する．ここでX, Y, $Z\in\Gamma(TM)$，$\xi\in\Gamma(E)$である．

このとき等長はめ込み$f:(M,g)\to(Q^{n+p}{}_{r+r^E}(c),\tilde{g})$とベクトル束同型$\varphi:E\to T^\perp M$で

$$g^E(\xi,\xi') = \tilde{g}(f_\#\varphi(\xi),f_\#\varphi(\xi')),\ \tilde{h}(X,Y) = \varphi(h(X,Y)),\ \tilde{\nabla}^\perp_X\varphi(\xi) = \varphi(\nabla^E_X\xi)$$

を満たすものが存在する．ここでX, $Y\in$ z$\Gamma(TM)$，$\xi,\xi'\in\Gamma(E)$であり$\tilde{h}$, $\tilde{A}$, $\tilde{\nabla}^\perp$はfの第二基本形式，形テンソル，法接続である．

等積アファインはめ込み$f,\bar{f}:(M,\nabla,\theta)\to(\tilde{M},\tilde{\nabla},\tilde{\theta})$が$\tilde{M}$のアファイン変換$\psi$で$\bar{f}=\psi\circ f$と$\psi^*(\tilde{\theta})=\tilde{\theta}$を満たすものが存在するとき等積アファイン合同とよぶ．

系 4.3. (M,∇,θ)を等積アファイン構造(∇,θ)をもつ連結な多様体とする．f，$\bar{f}:(M,\nabla,\theta)\to(Q,\nabla^Q,\theta^Q)$を横断束$(N,\theta^\perp$，$(\bar{N},\bar{\theta}^\perp)$をもつ等積アファインはめ込みとする．ベクトル束同型$F:N\to\bar{N}$で定理6.2と同じ条件と$F^*\bar{\theta}^\perp=\theta^\perp$を満たすものが存在すると仮定する．このとき，$f$と$\bar{f}$は等積アファイン合同である．

系 4.4. (M,g)を計量gをもつ連結な擬リーマン多様体とする．f，$\bar{f}:(M,g)\to(Q^{n+p}{}_\nu(c),\tilde{g})$を等長はめ込みとする．$(T^\perp M)_f$，$(T^\perp M)_{\bar{f}}$はそれぞれ$f$，$\bar{f}$の法束，$h$, $\bar{h}$はそれぞれf，$\bar{f}$

の第二基本形式，$\nabla^{\perp}$，$\bar{\nabla}^{\perp}$はそれぞれ f，$\bar{f}$の法接続とする．計量を保つベクトル束同型 $F:(T^{\perp}M)_f \to (T^{\perp}M)_{\bar{f}}$で X，$Y \in TM$，$\xi \in N$に対して

$$\bar{h}(X,Y) = Fh(X,Y),\ \bar{\nabla}^{\perp}_X F(\xi) = F\nabla^{\perp}_X \xi$$

を満たすものが存在するとする．このとき fと$\bar{f}$は合同である．

参考文献

[1] N. Abe, Affine immersions and conjugate connections, Tensor, N. S. 55, 276-280 (1994).

[2] M, Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Houston, Texas, Publish or Perish, Ins., 1990.

[3] F. Dillen, Equivalence theorems in affine differential geometry, Geom. Dedicata 32, 81-92 (1989).

[4] F. Dillen, K. Nomizu and L. Vranken, Conjugate connections and Radon's theorem in affine differential geometry, Monatsh Math. 109, 221-235 (1990).

[5] K. Hasegawa, The fundamental theorems for affine immersions into hyperquadrics and its applications, Monatsh Math. 131, 37-48 (2000).

[6] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. Vol II,* New York, Wiley. 1969.

[7] N. Koike, The Lipschitz-Killing curvature for an equiaffine immersions of Gauss-Bonnet type and Chern-Lashof type, to appear in Results in Math.

[8] T. Okuda, On the fundamental theorems for purely real immersions, Master thesis (1999).

[9] B. Opozda, On affine geometry of purely real submanifold, Geom. Dedicata 69 (1998), 1-14.