

## 熱対流の発生における固有値の反発

同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

同志社大学工学部 中村 隆則 (Takanori Nakamura)

### 1. はじめに

固有値の反発という現象はさまざまな物理現象の中に見られる。物理学では、いろいろな物理量が固有値として求められ、その固有値はあるパラメータの関数となっていることがある。たとえば、量子力学の分野においては、2原子分子の電子準位を原子間距離の関数として考えると、原子間距離が大きくなる時、ある2つの電子順位は、その固有関数の対称性が同じならば、同じ値に近づくことがあっても決して同じ値とはならないことがわかっている(たとえば、ランダウ・リフシッツ [1] 参照)。また、ユークリッド空間における1パラメータをもつ楕円体は回転楕円体とはならない。つまり、ある剛体に金属棒を固く取り付け、その金属棒に沿って調節質量を動かしても決して回転楕円体のように2つの慣性主軸モーメントが同じ値をもつことがない(アーノルド [2] 参照)。このように、固有値の反発は複数の固有値が1つのパラメータの関数として表されるときに、ある2つの固有値がパラメータの変化と共に一見同じ値に近づきそうに思っても決して一致しないという現象である。ただし、複数の固有値が2つのパラメータの関数ならば、2次元のパラメータ空間で2つの固有値は一致することが可能である。

2次元矩形容器に満たされた流体中に発生するベナール対流の線形安定性解析において、定常熱伝導状態は加えられた攪乱が増幅するとき不安定であり、減衰するとき安定である。定常熱伝導状態の線形安定性理論はレイリー数を求める固有値問題に帰着できる。攪乱が増幅も減衰もしないとき、定常熱伝導状態は中立安定であるといい、そのときのレイリー数を中立レイリー数と呼ぶ。中立レイリー数は無限個存在し、矩形容器の縦横長さ比(アスペクト比)に依存する固有値として得られる。定常状態が不安定となるときの臨界条件は無数個求まる中立レイリー数の最小値によって決定される。側壁が滑り条件であれば、中立レイリー数をアスペクト比の関数としてグラフを描くと、中立レイリー数を表す曲線(中立曲線)はすべて交わる。側壁が粘着条件であれば、異なる対称性をもったそれぞれの攪乱モードの中立曲線は互いに交わるが、同じ対称性を持った中立曲線どうしは互いに反発しあう [3]。

矩形容器内のベナール対流における固有値の反発の数学的な証明は、Cliffe and Winters[4]によって行われた。熱伝導状態の不安定性は対称性を破るピッチフォーク分岐として生じるが、彼らは関数解析により、2つの中立曲線に対応する分岐が異なる対称性を破る場合、これらの中立曲線は交わるが、同じ対称性を破る2つの分岐に対応する中立曲線は交わらないことを示した。

ここでは、2次元矩形容器に満たされた流体中に発生するベナール対流におい

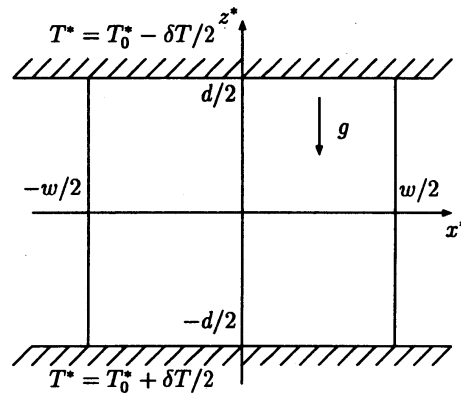


図 1: Configuration and coordinates.

て、容器の上下壁は滑り条件であり、側壁が一部粘着条件の場合を考え、固有値の反発という現象を数学的に理解する方法について説明することを目的とする。側壁が滑り条件のときにはすべての中立曲線は交わるが、それらの交点のうちの1つを選び、その点のまわりに2重摂動解析を行う。展開パラメータとしては粘着の程度を表すパラメータと2つの固有値が一致するアスペクト比からのずれを用いる。

## 2. 基礎方程式

水平矩形容器に満たされた流体を容器下面から加熱したときに発生する熱対流を考える。矩形容器は高さ  $d$ 、幅  $w$  であり、上下面は完全熱伝導性を持ち、流体は滑り条件を満たすものとし、側壁は滑り条件から粘着条件までを考え、パラメータとして粘着率  $\delta$  を導入する。上下面の温度差は  $\delta T$  で一定に保たれている。2次元流れ場を仮定し、ブジネスク近似が成り立つとする。基礎方程式は連続の式、ナビエ・ストークス方程式、熱拡散方程式であり、無次元形で次のように表せる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + Pr Ra T \mathbf{e}_z + Pr \Delta \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \Delta T. \quad (3)$$

この問題を支配する無次元パラメータは次式で定義される容器のアスペクト比  $A$ 、レイリー数  $Ra$ 、プラントル数  $Pr$  および粘着率  $\delta$  である。

$$A = \frac{w}{d}, \quad Ra = \frac{\gamma g \delta T d^3}{\nu \kappa}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (4)$$

ここで  $\kappa$  は流体の熱拡散係数、 $\nu$  は動粘性係数、 $\gamma$  は熱膨張係数、 $g$  は重力加速度

ここでは、2次元流れ場を仮定しているので、流れ関数  $\psi$  を導入することができる。また、熱伝導解からのずれを  $\theta$  とし、温度を  $T = z^* + \theta$  と表す。これらを(2)式と(3)式に代入して、中立安定状態における線形攪乱方程式を導くと次のようになる。

$$\Delta^2 \psi = Ra \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\Delta \theta = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

ここで、 $\Delta \equiv (1/A^2) \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$  である。中立安定状態では線形増幅率はゼロとなり、しかも安定性交替の原理が成り立つので上式では攪乱の時間依存性はなくなる。

容器の上下面は完全熱伝導条件であり、速度について滑り条件としているので、上下面での境界条件は

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \theta = 0 \quad (z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad (7)$$

となる。容器の側壁は断熱条件であり、速度について一部粘着とし、粘着率  $\delta$  (滑りのときを  $\delta = 0$ , 粘着のときを  $\delta = 1$ ) を用いれば、境界条件は次式のように表せる。

$$\psi = \delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \pm \frac{1}{A} (1 - \delta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (8)$$

### 3. 固有値の直接数値計算

#### 3.1 数値計算法

2重摂動展開による解析解と比較するために、(5)式と(6)式を境界条件(7)式と(8)式の下に直接数値的に解く。数値計算のために、 $\psi$ と $\theta$ を次式のように展開する。

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{N+3} a_n T_n(2x/A) \cos(\pi z), \\ \theta &= \sum_{n=0}^{N-1} b_n H_n(2x/A)(x) \cos(\pi z). \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $T_n(x)$ はチェビシエフ多項式であり、 $H_n(x) [\equiv \int^x (1 - \xi^2) T_n(\xi) d\xi]$ は側壁における断熱条件を満たす関数である。 $\psi$ について側壁の一部粘着条件はタウ法を用いることにより考慮に入れる。上下面における滑り条件と完全熱伝導条件は(9)式の

ようにおくことにより満たされている。これらを(5)式と(6)式に代入し、コロケーション・タウ法を用いる。(5)式と側壁での境界条件から $a_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N+3$ ),  $b_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ )に関する $N+4$ 個の代数方程式が得られ、(6)式から $N$ 個の代数方程式が得られる。側壁での境界条件から得られる4個の代数方程式は $a_n$ だけを変数として含んでいる。この4個の方程式を用いて $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}$ を消去すると展開係数 $\mathbf{a} = {}^t(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ,  $\mathbf{b} = {}^t(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ に対する代数方程式が得られる。これを行列の形で表すと次のようになる。

$$A\mathbf{a} = R\mathbf{a}B\mathbf{b}, \quad (10)$$

$$C\mathbf{b} = D\mathbf{a}. \quad (11)$$

ここで、 $A, B, C, D$ はそれぞれ $N \times N$ 行列である。この2式より、

$$(BC^{-1}D)^{-1}A\mathbf{a} = R\mathbf{a}\mathbf{a}, \quad (12)$$

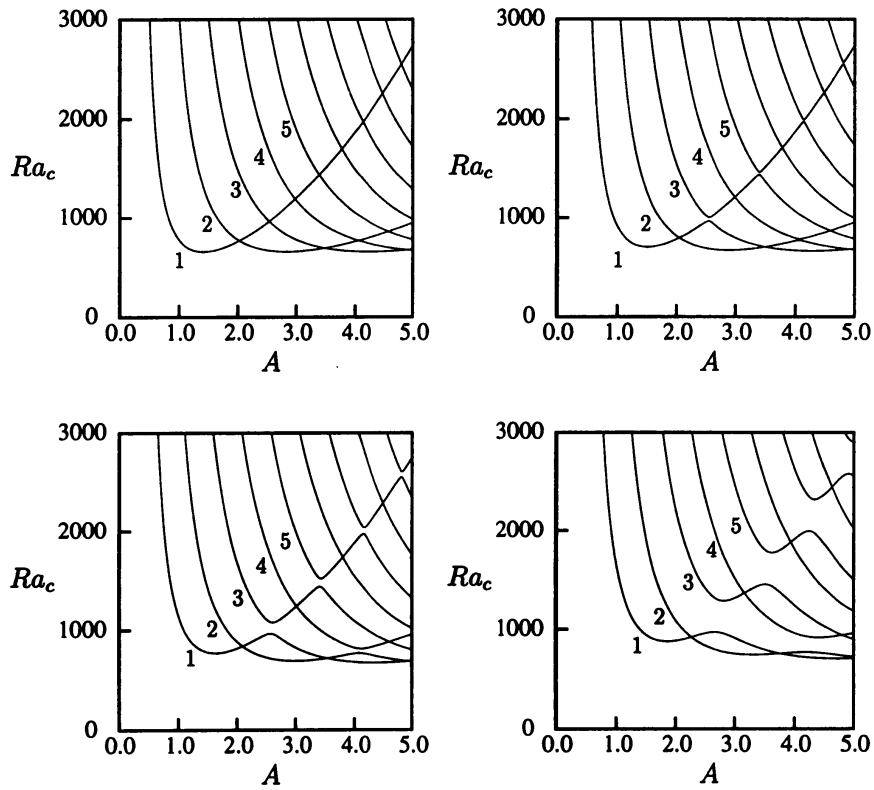
となり、左辺の行列の固有値として中立レイリー数 $R\mathbf{a}$ が得られる。固有値はQR法を用いて求め、打ち切り項数は $N = 31$ とした。

### 3.2 数値計算結果

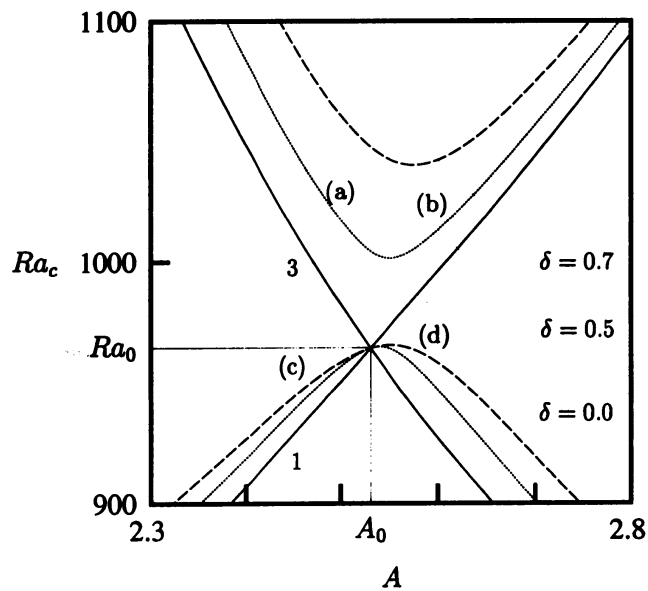
数値計算により、粘着率 $\delta = 0, 0.5, 0.8, 1$ について中立レイリー数を求めた。その結果を図2に示す。中立レイリー数を表す曲線は中立曲線と呼ばれ、それぞれの曲線に対応する固有値、固有関数をモードとよぶ。各曲線に付いている数字は、そのモードに対応する固有関数によって表される流れ場の渦の数である。ここでは渦の数で固有モードを表すことにする。たとえば流れ場の中に渦が1個あれば、モード1とする。また、偶数個の渦をもつモードを偶モードとよび、奇数個の渦をもつモードを奇モードとよぶ。中立レイリー数の最小値を与えるモードを臨界モードといい、その最小値は臨界レイリー数である。

図2を見ると、側壁が滑り条件( $\delta = 0$ )の時には中立曲線は互いに交わっている。しかし、 $\delta$ が有限の値をもつ場合、すなわち側壁が一部粘着条件の場合は、同じパリティを持つ中立曲線は互いに交わるが、異なるパリティをもつ曲線は互いに交わらず、 $\delta = 0$ のときに交点付近であった付近で反発している。例えば $\delta = 0$ の場合、モード1とモード3の曲線は $A \simeq 2.531$ で互いに交わっているが、 $\delta \neq 0$ の場合 $A_0$ 付近で反発している。また、 $\delta$ が大きくなるにしたがって、互いの曲線間のギャップは大きくなる。図3は $A_0$ 付近のモード1とモード3の中立曲線の拡大図である。この図から、2つの中立レイリー数のうち1つは $\delta$ の値に関わらず、 $A_0$ において $Ra_0 \simeq 964.5$ であることがわかる。

粘着率 $\delta = 0.5$ の場合の $A = 2.5$ と $A = 2.6$ におけるモード1とモード3の固有関数から得られる対流パターンを図4に示す。図3中の曲線(a)-(b)上でアスペクト比を大きくしていくと、対流パターンは3個渦から1個渦へと変化し、曲線



⊠ 2: Neutral Rayleigh numbers against the aspect ratio. (a): stress-free boundaries at the side walls. ( $\delta=0.0$ ). (b):  $\delta=0.5$  (c):  $\delta=0.8$  (d): non-slip boundaries at the side walls. ( $\delta=1.0$ ).



⊠ 3: Enlargement of Fig. 2 near the intersection between modes 1 and 3 ( $A_0 \simeq 2.531$ ,  $Ra_0 \simeq 964.5$ ).

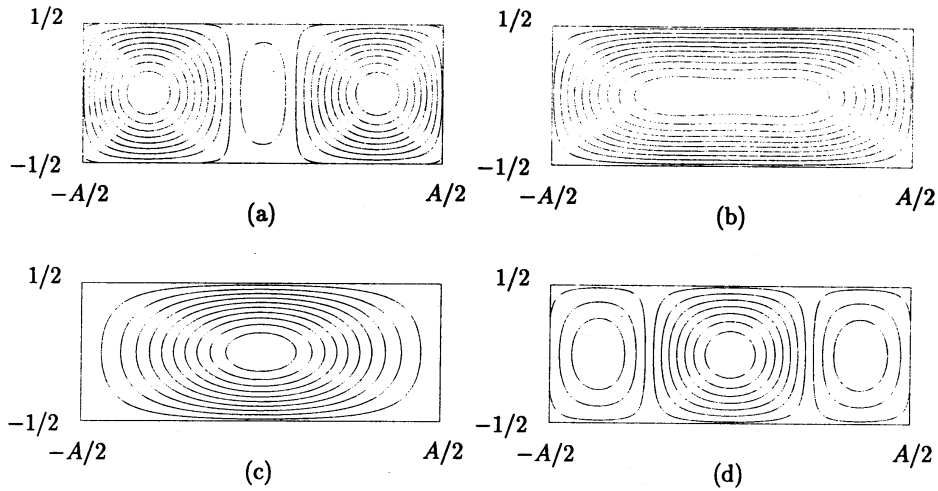


図 4: Flow patterns of the disturbance.  $\delta = 0.5$  (a):  $A=2.5$ , mode 1 (b):  $A=2.6$ , mode 3 (c):  $A=2.5$ , mode 3 (d):  $A=2.6$ , mode 1

(c)-(d) 上では 1 個渦から 3 個渦へと変化する．ここでモードのアイデンティティが問題となる．ここでやっているように固有モードを渦の個数で区別する場合，それぞれの固有モードはいくつかの途切れた中立曲線で表されることになる．一方で固有モードを連続な曲線によって区別する場合，対流パターンは同一モード曲線上の元の交点付近で変化することになる．

#### 4. 2 重摂動展開

数値計算の結果をもとに，ここではモード 1 とモード 3 の交点， $(A, Ra) = (A_0, Ra_0)$  付近の中立曲線の局所構造に着目し，交点周りで 2 重摂動展開を用いることにより固有値反発の原因を解明する．展開するパラメータとしては，交点のアスペクト比  $A_0$  からのずれ  $\epsilon = A - A_0$  と粘着率  $\delta$  を用いる．

方程式 (5) と (6) を形式的に次のように表記する．

$$Mf = RaLf, \quad (13)$$

$$M = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ -(1/A)\partial_x & \Delta \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & (1/A)\partial_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (14)$$

方程式 (13) の解は境界条件の (3) 式と (4) 式を満たさなければならないが，(3) 式はパラメータ  $\delta$  を含まないので，(4) 式を次のように書き直す．

$$Pf = 0, \quad (x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (15)$$

行列  $M$ ， $L$  は  $\delta$  を含まないので， $\epsilon$  のみで展開し，1 次まで残すと次のようになる．

$$M = M_0 + \epsilon M_1, \quad L = L_0 + \epsilon L_1. \quad (16)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} (-4/A_0^5)\partial_x^4 + (4/A_0^3)\partial_x^2\partial_z^2 & 0 \\ (1/A_0^2)\partial_x & -(2/A_0^3)\partial_x^2 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -(1/A_0^2)\partial_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

また、境界条件 (15) 式を  $\delta$  で展開し、同様に 1 次まで残すと次のようになる。

$$P = P_0 + \delta P_2, \quad (x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad (18)$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \partial_x^2 & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \partial_x \mp \partial_x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

関数  $f$  とレイリー数  $Ra$  も同様に  $\epsilon$  と  $\delta$  で展開して、それぞれ 1 次まで残すと次のようになる。

$$\begin{aligned} f &= f_0^{(1)} + f_0^{(3)} + \epsilon f_1 + \delta f_2, \\ Ra &= Ra_0 + \epsilon Ra_1 + \delta Ra_2. \end{aligned} \quad (20)$$

展開 (16) 式と (20) 式を (13) 式に代入して  $O(1)$  の項を等しいとおくと、

$$M_0 f_0^{(i)} = Ra_0 L_0 f_0^{(i)} \quad (21)$$

となる。ここで、 $i$  は 1 と 3 で、それぞれモード 1 とモード 3 を表す。境界条件は (18) 式と (20) 式を (15) 式に代入して次のように表せる。

$$P_0 f_0^{(i)} = 0, \quad (x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (22)$$

方程式 (21) を境界条件 (22) 式のもとで解く問題は  $A = A_0 (= 2.531)$  における元の固有値問題である。この点で 2 つの固有値は同じ値をとり、 $Ra = 964.5$  となる。固有関数  $f_0^{(1)}$  と  $f_0^{(3)}$  は次のように求まる。

$$\begin{aligned} f_0^{(i)} &= a^{(i)} g_0^{(i)}, \\ g_0^{(i)} &= \begin{pmatrix} \cos(i\pi x) \cos(\pi z) \\ \frac{iA_0 \sin(i\pi x) \cos(\pi z)}{\pi(A_0^2 + i^2)} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 3). \end{aligned} \quad (23)$$

関数  $f_0^{(i)}$  の式を導出したのと同様にして  $O(\epsilon)$  の項を等しいとおくと、 $f_1$  に関する方程式と境界条件は次のようになる。

$$M_1 f_1 - Ra_0 L_0 f_1 = (-M_0 + Ra_0 L_1 + Ra_1 L_0)(a^{(1)} g_0^{(1)} + a^{(3)} g_0^{(3)}), \quad (24)$$

$$P_0 f_1 = 0, \quad (x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (25)$$

方程式 (24) の可解条件より  $Ra_1$  が決まる. 可解条件は (24) 式の両辺に  $f_0^{(i)}$  の随伴関数  $f_0^{\dagger(i)}$  をかけ, 方程式を全領域 ( $-1/2 \leq x \leq 1/2, -1/2 \leq z \leq 1/2$ ) で積分することにより得られる. モード 1 とモード 3 に対する可解条件よりそれぞれ  $Ra_1^{(1)} = 453.3$  と  $Ra_1^{(3)} = -573.3$  と求められる. ここで得られた  $Ra_1$  を (24) 式に代入して, この式を境界条件 (25) 式のもとに解き,  $f_1$  を求めると, モード 1 とモード 3 に対応して解  $f_1^{(1)}$  と  $f_1^{(3)}$  が求まり,

$$f_1^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-i(A_0^2 - i^2) \sin(i\pi x) \cos(\pi z)}{\pi(A_0^2 + i^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 3), \quad (26)$$

となる.

関数  $f_2$  を支配する方程式は  $O(\delta)$  の項を等しいとおくことにより得られ, 次のようになる.

$$M_0 f_2 - Ra_0 L_0 f_2 = Ra_2 L_0 (f_0^{(1)} + f_0^{(3)}), \quad (27)$$

$$P_0 f_2 + P_2 (f_0^{(1)} + f_0^{(3)}) = 0, \quad (x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \quad (28)$$

方程式 (27) の可解条件は, (27) の両辺に  $f_0^{\dagger(1)}$  と  $f_0^{\dagger(3)}$  をそれぞれかけて, 全領域で積分すると次の形に書ける.

$$E \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix} = Ra_2 F \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

ここで,  $E$  と  $F$  は  $2 \times 2$  の行列である. (29) 式の行列  $E$  および  $F$  の各要素を数値計算により求め,  $Ra_2$  を固有値として計算すると,  $Ra_2 = 0$  と  $Ra_2 = 55.54$  と求められる. これらの固有値をそれぞれを  $Ra_2^{(\alpha)} = 0$  および  $Ra_2^{(\beta)} = 55.54$  とおく.  $Ra_2^{(\alpha)}$  と  $Ra_2^{(\beta)}$  をそれぞれ (27) 式に代入して, それぞれの固有値に対応して固有関数  $f_2^{(\alpha)}$  と  $f_2^{(\beta)}$  が得られる.  $Ra_2^{(\alpha)} = 0$  については, 解は  $f_2^{(\alpha)} = {}^t(0, 0)$  となり,  $Ra_2^{(\beta)} = 55.54$  については, 次式で表される解が得られる.

$$f_2 = f_2^{(\beta)} = a^{(1)} g_2^{(1)} + a^{(3)} g_2^{(3)},$$

$$g_2^{(i)} = \frac{iRa_{i2} \cos(\pi z)}{4\pi^3 \cosh(\lambda/2)(A_0^6 - 3i^2 A_0^2 - 2i^5)} \begin{pmatrix} g_{21}^{(i)} \\ g_{22}^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$g_{21}^{(i)} = 2i^2 A_0^4 x \cosh(\lambda/2) \sin(i\pi x) \pm \cosh(\lambda x),$$

$$g_{22}^{(i)} = -\frac{A_0}{Ra_{i0}} [\pi^2 (2A_0^4 - i^3) \lambda \sin(i\pi x) \pm i^2 (A_0^2 \pi^2 - \lambda^2)^2 \sinh(\lambda x) + 2\pi^3 i (A_0^2 + i^2)^2 \lambda \cos(\lambda/2) x \cos(i\pi x)], \quad (i = 1, 3). \quad (30)$$



ここで、複合土において + 符号と - 符号とはそれぞれ  $i = 1$  および 3 に対応する。

このようにして求めた解  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  を式 (20) に代入し、随伴関数  $f_0^{\dagger(1)}$  と  $f_0^{\dagger(3)}$  をそれぞれ両辺にかけ、全領域で積分すると、振幅  $a^{(1)}$ ,  $a^{(3)}$  についての連立方程式が得られる。連立方程式を  $\epsilon$  と  $\delta$  に関して一次まで残し、行列の形で書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} p_{11} + \epsilon q_{11} + \delta r_{11} & \delta r_{13} \\ \delta r_{31} & p_{33} + \epsilon q_{33} + \delta r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix} = Ra \begin{pmatrix} s_{11} + \epsilon t_{11} + \delta u_{11} & \delta u_{13} \\ \delta u_{31} & s_{33} + \epsilon t_{33} + \delta u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

方程式 (31) の両辺に右辺の逆行列を掛け、同様に  $\epsilon$  と  $\delta$  に関して一次まで残すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} P_{11} + \epsilon Q_{11} + \delta R_{11} & \delta R_{13} \\ \delta R_{31} & P_{33} + \epsilon Q_{33} + \delta R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix} = Ra \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

(32) 式左辺の行列に含まれる定数を数値計算により評価すると、 $P_{11} = P_{33} = 964.3$ ,  $Q_{11} = 453.3$ ,  $Q_{33} = -573.4$ ,  $R_{11} = 18.03$ ,  $R_{13} = -54.10$ ,  $R_{31} = -12.50$ ,  $R_{33} = 37.51$  と求められた。中立レイリー数  $Ra$  は (32) 式左辺の行列の固有値として得られる。

側壁が滑り境界条件の場合、すなわち  $\delta = 0$  の場合、行列は対角行列である。非対角成分が有限の値を持たない限り、2つの固有値はパラメータ  $\epsilon$  がある値のとき、同じ値をもつことが可能である。しかし、一部粘着条件の場合、すなわち  $\delta \neq 0$  の場合、一般に行列は非対称行列となる。このような非対称行列は一般には対角化不可能であり、ジョルダン標準形に変換することができる。非対称行列のジョルダン標準形への変換は構造不安定であり、この構造不安定性により、たとえ 2 重固有値をもつ行列であっても擾動が加えられた場合、その 2 重固有値の縮退はとけて、異なる値をもつことになる。よって、(32) 式左辺の行列の固有値は重複せずに反発する。(32) 式から固有値  $Ra$  を  $\delta = 0.1, 0.2, 0.3$  の場合について求めた。その結果を図 5 に示す。実線が (8) 式により求めた中立レイリー数、破線が数値計算による結果である。両方の結果はよく一致しており、固有値が反発していることがわかる。

## 5. まとめ

静止系のレイリーベナール問題において、固有値である中立レイリー数が反発する原因を調べた。方法としてはまずチェビシェフ多項式展開を用いた直接数値計算により固有値が反発する様子を調べ、 $\delta = 0$  におけるモード 1 とモード 3 の中立曲線交点付近の局所構造を 2 重擾動展開により示した。擾動展開のパラメータ

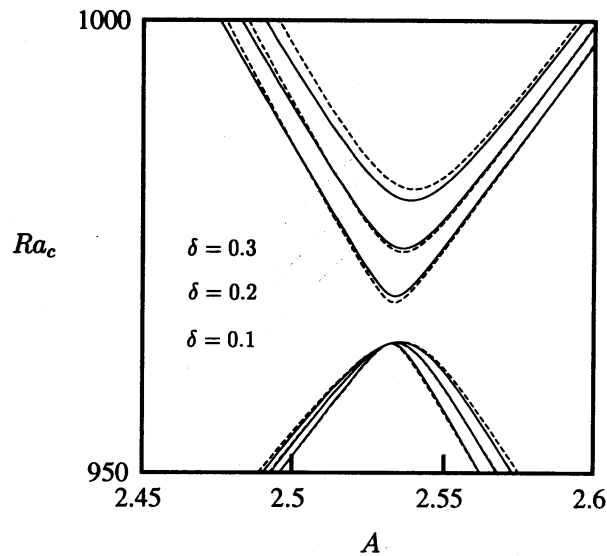


図 5: Neutral curves near the intersection between modes 1 and 3. Solid line: perturbation analysis. Dotted line: numerical simulation.

としては、中立曲線の交点のAspect比からのずれ $\epsilon$ と粘着率 $\delta$ を用いた。これにより、固有値の反発の原因は、非対称行列のジョルダン標準形への変換が構造不安定性であることにあり、反発の程度は $\epsilon$ と $\delta$ の値により決定されることがわかった。しかし、これは固有値の反発の説明の一つに過ぎず、他の方法を用いて説明することも可能である。

## 参考文献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1958), p.300-309.
- [2] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1997), Appendix 10.
- [3] J. Mizushima, *J. Phys. Soc. Japan* **64**, 2420-2432 (1995).
- [4] K. A. Cliffe and K. H. Winters, *J. Compt. Phys.* **67** 310-326 (1986).