数理解析研究所講究録 1243 巻 2002 年 52-56

Bernstein 多項式列 の振る舞い

山形大・工　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)

Korovkin 型近似論の先駆けは、１９５２年に発表されたH. Bohmanによる次のような補間作用素列に関する近似定理であろう：

$f \in C([0,1])$ に対して、$H_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(t_{k,n}) h_{k,n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおく。但し $t_{k,n} \in [0,1]$, $t_{i,n} < t_{j,k}$ $(i < j)$, $0 \le h_{k,n} \in C([0.1])$ である。このとき、もし $\lim_{n \to \infty} \left\| H_n(x^m) - x^m \right\|_\infty = 0$ $(m = 0, 1, 2)$ ならば、$\lim_{n \to \infty} \left\| H_n(f) - f \right\|_\infty = 0$ $(\forall f \in C([0,1]))$ である。

上の定理はある正線形作用素列が線形近似法となるための条件を与えたものであるが、その後 Korovkin 型近似論として、抽象論へと発展したり、収束精度が研究されたりして、他分野の研究にも寄与してきた。日本では大阪教育大学名誉教授の中村正弘先生が Korovkin の近似定理を初めて紹介し、その後渡辺ヒサ子氏、西白保敏彦氏、泉池敬司氏等の活躍により、Korovkin 型近似論が発展してきた。

さて、Bohman の近似定理は、$f \in C([0,1])$ に対する Bernstein 多項式列：

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (0 \le x \le 1, n = 1, 2, \cdots)$$

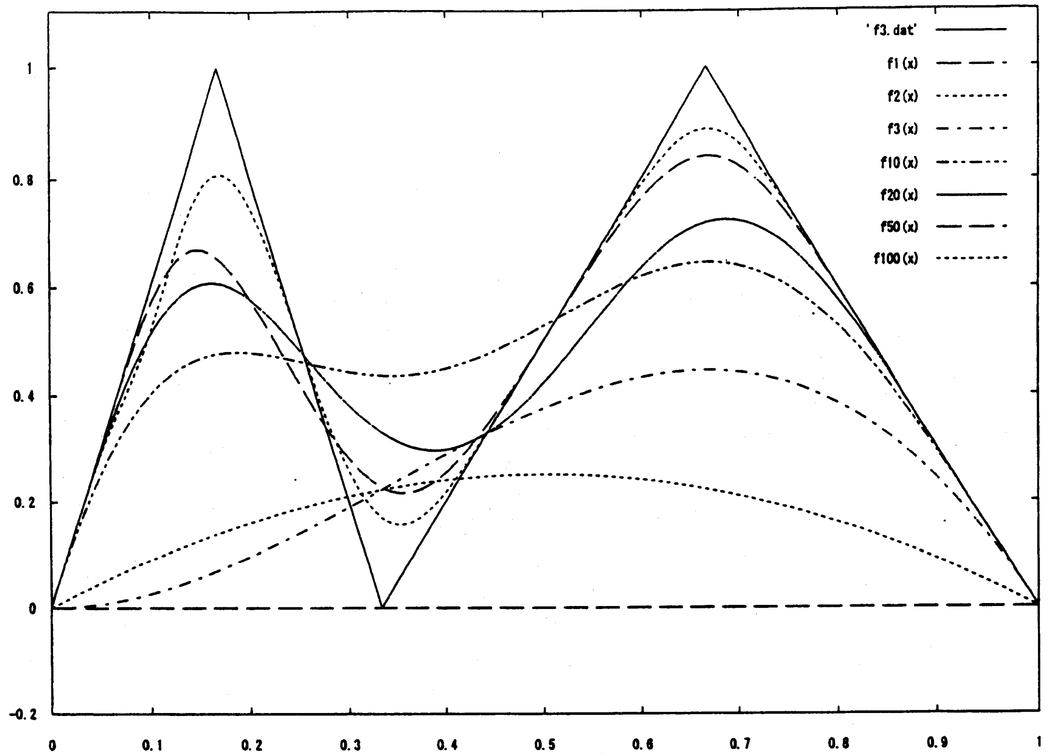
がもとの f に一様収束するという所謂 Bernstein の近似定理が原型であると思われる。Bernstein 多項式列 $\{B_n(f) : n = 1, 2, \cdots\}$ の振る舞いに関しては、f が凹 (resp. 凸) ならば、

$$B_1(f) \le B_2(f) \le \cdots \le f \quad (\text{resp. } B_1(f) \ge B_2(f) \ge \cdots \ge f)$$

であることが知られているが （[1] 参照）、Bernstein 多項式列は一般には勿論単調でない。しかしながらコンピュータで実験してみると、関数の凹凸に合わせて、その関数に associate した Bernstein 多項式列は、丁度ソリトンのような現象をおこし、それなりの単調性を示すことがわかる。例えば次のグラフを参照されたい。これは、関数

$$f(x) = \begin{cases} 4x & (0 \le x \le \frac{1}{4}) \\ -4x + 2 & (\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}) \\ 4x - 2 & (\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}) \\ -4x + 4 & (\frac{3}{4} \le x \le 1) \end{cases}$$

に associate した Bernstein 多項式列をいくつかグラフにしたものである。



これを数学的に解明する事は今のところなかなか難しそうである。ここでの目的は上の解明に少しでも迫ってみたいというところにある。

今 $0 < t_0 < 1$ を固定する。次ぎに f を $[0,1]$ 上の連続関数で、$[0, t_0]$ 及び $[t_0, 1]$ 上でそれぞれ凹であるとする。このとき、$\{B_n(f) : n = 1, 2, \cdots\}$ がどんな振る舞いをするかに注目する。解明にはほど遠いが、その一端なりを述べてみる。今次のような2点 t_c, t^c を定義しよう：

$$t_c = \sup\{t : 0 \le t \le t_0,\ f_{t,s} \text{ is concave on } [0, s] \text{ for all } t_0 \le s \le 1\},$$
$$t^c = \inf\{t : t_0 \le t \le 1,\ f^{t,s} \text{ is concave on } [s, 1] \text{ for all } 0 \le s \le t_0\},$$

where $f_{t,s}(x) = f(x)\ (0 \le x \le t)$, $f_{t,s}(x) = \dfrac{f(s) - f(t)}{s - t}(x - t) + f(t)\ (t \le x \le s)$ and $f^{t,s}(x) = f(x)\ (t \le x \le 1)$, $f^{t,s}(x) = \dfrac{f(s) - f(t)}{s - t}(x - t) + f(t)\ (s \le x \le t)$. 上の図では、$t_c$ は $f(x)$ を最大にさせる最初の点であり、t^c は$f(x)$ を最大にさせる最後の点である。

このとき、我々は次の結果を持つ。

Theorem 1. $(B_n f)(x) \le f(x)$ for all $x \in [0, t_c] \cup [t^c, 1]$ and $n = 1, 2, \cdots$.

証明：Set

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{[t_0 n]} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\quad \mu(x) = \sum_{k=[t_0 n]+1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\quad (0 \le x \le 1).$$

Then

$$\lambda(x) \ge 0,\ \mu(x) \ge 0 \text{ and } \lambda(x) + \mu(x) = 1\ (0 \le x \le 1).$$

$$a(x)=\sum_{k=0}^{[t_0n]}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \text{ and } b(x)=\sum_{k=[t_0n]+1}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad (0\le x\le 1).$$

Then

$$a(x)+b(x)=x \quad (0\le x\le 1).$$

Then

$$\lambda(x)\frac{a(x)}{\lambda(x)}+\mu(x)\frac{b(x)}{\mu(x)}=x \quad (0<x<1).$$

Note that if $0\le k\le [t_0n]$, then $\frac{k}{n}\le t_0$ and hnece

$$a(x)=\sum_{k=0}^{[t_0n]}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\sum_{k=0}^{[t_0n]}t_0\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=t_0\lambda(x) \quad (0\le x\le 1).$$

Similarly, $t_0\mu(x)\le b(x)$ $(0\le x\le 1)$. Therefore

$$\frac{a(x)}{\lambda(x)}\le x\le\frac{b(x)}{\mu(x)} \text{ and } \frac{a(x)}{\lambda(x)}\le t_0\le\frac{b(x)}{\mu(x)} \quad (0<x<1).$$

Therefore

$$\lambda(x)f\left(\frac{a(x)}{\lambda(x)}\right)+\mu(x)f\left(\frac{b(x)}{\mu(x)}\right)\le f(x)$$

for all $x\in(0,t_c]\cup[t^c,1)$. In fact, let $x\in(0,t_c]$ and set $s=\frac{b(x)}{\mu(x)}$. Then $0\le\frac{a(x)}{\lambda(x)}\le t_c$ and $t_0\le s\le 1$, and hence

$$\lambda(x)f\left(\frac{a(x)}{\lambda(x)}\right)+\mu(x)f\left(\frac{b(x)}{\mu(x)}\right)=\lambda(x)f_{t_c,s}\left(\frac{a(x)}{\lambda(x)}\right)+\mu(x)f_{t_c,s}\left(\frac{b(x)}{\mu(x)}\right)\le f_{t_c,s}(x)=f(x).$$

Similarly for $x\in[t^c,1)$.

On the other hand, for each $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}
f_n(x)&=\sum_{k=0}^{[t_0n]}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=[t_0n]+1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\lambda(x)\sum_{k=0}^{[t_0n]}\frac{1}{\lambda(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)+\mu(x)\sum_{k=[t_0n]+1}^{n}\frac{1}{\mu(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)\\
&\le\lambda(x)f\left(\sum_{k=0}^{[t_0n]}\frac{1}{\lambda(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}\right)+\mu(x)f\left(\sum_{k=[t_0n]+1}^{n}\frac{1}{\mu(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}\right)\\
&=\lambda(x)f\left(\frac{a(x)}{\lambda(x)}\right)+\mu(x)f\left(\frac{b(x)}{\mu(x)}\right)
\end{aligned}$$

Therefore

$$f_n(x)\le f(x)$$

for all $x\in[0,t_c]\cup[t^c,1]$. 証明終

注意。上の具体的な例から判断して、定理はもっと改良の余地がありそうに思われる。

次の結果は昨年の調和解析セミナー（[2] 参照）で話した内容の一部であるが、特に再掲しよう。

Theorem 2. If $t_0 n$ is a natural number, then $(B_n f)(x) \leq (B_{n+1} f)(x)$ for all $x \in [0, 1]$. In particular, if $t_0 = \frac{1}{2}$, then $(B_2 f)(x) \leq (B_3 f)(x)$, $(B_4 f)(x) \leq (B_5 f)(x)$, $(B_6 f)(x) \leq (B_7 f)(x)$, $\cdots$ for all $x \in [0, 1]$.

証明。はじめに次式に注意する。

$$0 \leq \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n+1} < \frac{k+1}{n} \leq 1 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \text{ and } \frac{k+1}{n+1} + \frac{n-k}{n+1} = 1$$

従って、f が $[0, t_0]$ 上で凹ということから

$$\frac{k+1}{n+1} f(\frac{k}{n}) + \frac{n-k}{n+1} f(\frac{k+1}{n}) \leq f(\frac{k+1}{n+1}) \quad (k = 0, 1, \cdots, [t_0 n] - 1)$$

が成り立つ。次ぎに、$t_0 n$ が自然数であれば、f が $[t_0, 1]$ 上で凹ということから

$$\frac{k+1}{n+1} f(\frac{k}{n}) + \frac{n-k}{n+1} f(\frac{k+1}{n}) \leq f(\frac{k+1}{n+1}) \quad (k = [t_0 n], \cdots, n-1)$$

が成り立つ。　従って

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n+1} f(\frac{k}{n}) + \frac{n-k}{n+1} f(\frac{k+1}{n}) \right) \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k+1}{n+1}) \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k}$$

が成り立つ。一方、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n+1} f(\frac{k}{n}) + \frac{n-k}{n+1} f(\frac{k+1}{n}) \right) \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) \binom{n}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k}(1-x)^{n-k} + (1-x) \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k}(1-x)^{n-k}$$

$$= x f_n(x) + (1-x) f_n(x) - f(1) x^{n+1} - f(0)(1-x)^{n+1}$$

$$= f_n(x) - f(1) x^{n+1} - f(0)(1-x)^{n+1}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k+1}{n+1}) \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n+1}) \binom{n+1}{k} x^{k}(1-x)^{n+1-k}$$

$$= f_{n+1}(x) - f(0)(1-x)^{n+1} - f(1) x^{n+1}$$

であるから、結局 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ を得る。証明終。

ところで $t_0 n$ が自然数でなければ、微妙なところが災いして考察が困難である。実際 $\varepsilon_f(n, k) = f(\frac{k+1}{n+1}) - \frac{k+1}{n+1} f(\frac{k}{n}) - \frac{n-k}{n+1} f(\frac{k+1}{n})$ とおくと、

$$\varepsilon_f(n, k) \geq 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, [t_0 n] - 1, [t_0 n] + 1, \cdots, n-1).$$

が成り立つが、$k = [t_0 n]$ では不明である。このとき、

$$\varphi_n(x) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \neq [t_0 n]}} \varepsilon_f(n, k) \binom{n+1}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k},$$

$$\psi_n(x) = -\varepsilon_f(n, [t_0 n])\binom{n+1}{[t_0 n]+1}x^{[t_0 n]+1}(1-x)^{n-[t_0 n]} \quad (0 \le x \le 1).$$

とおくと、 $\varphi_n(x) \ge 0$ $(0 \le x \le 1)$, $\psi_n(x) \ge 0$ $(0 \le x \le 1,\ n >> 0)$ 且つ $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x)$ $(0 \le x \le 1)$ が成り立つので、 $\varphi_n(x) - \psi_n(x) \ge 0$ となる x の範囲を決めればよい。しかしそれは難しい。

参考文献

[1] F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, W. de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1994.

[2] 高橋眞映、ある種の凹関数と Bernstein 多項式について、調和解析セミナー蔵王）、２０００年，１２月。