

BIFURCATIONS AND STABILITY OF TRAVELING WAVES

埼玉大学・理学部 新居 俊作 (SHUNSAKU NII)
FACULTY OF SCIENCE, SAITAMA UNIVERSITY

ABSTRACT.

本稿では進行波の分岐の幾何的構造と線型安定性の関係について、その研究対象の概略の説明と筆者による最近の結果の紹介をおこなう。

1. OVERVIEW

本稿では進行波の分岐と安定性、特に分岐の幾何的構造と進行波に沿った線型化の固有値問題の関係について述べる。

次の形の系 (反応拡散方程式) を考える:

$$U_t = BU_{xx} + f(U) \quad (1)$$

但し $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $U(x; t) \in \mathbb{R}^n$ とし B は正定値対角行列とする。以下の議論では (1) は次の仮定を満たすとする。

Assumption .

系 (1) には安定な定数定常解 $U(x, t) \equiv P$ 及び $U(x, t) \equiv Q$ が存在する。

$\xi = x + ct$ と置くと (1) は (ξ, t) 座標系では次のように書かれる:

$$U_t = BU_{\xi\xi} - cU_\xi + f(U) \quad (2)$$

Definition .

(2) の定常解 $U(x, t) = U(\xi)$ を (1) の進行波とよぶ。

すなわち、進行波とは一定の速度 c で波形を変えずに並行移動する解のことである。(FIGURE 1 参照) 特に、本稿では次の境界条件を満たす進行波のみを考える:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = P \text{ or } Q. \quad (3)$$

進行波の存在の問題:

$$BU_{\xi\xi} - cU_\xi + f(U) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = P \text{ or } Q \quad (4)$$

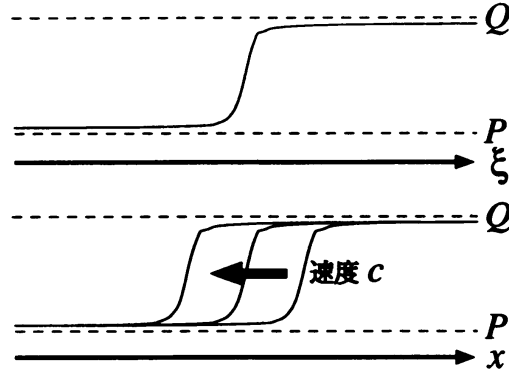


FIGURE 1

は, 通常次の一階の方程式の $(P, 0)$ または $(Q, 0)$ の間のホモ/ヘテロクリニック軌道の存在の問題として扱われる.

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = cB^{-1}V - B^{-1}f(U) \end{cases} \quad (' = \frac{d}{d\xi}). \quad (5)$$

つまり, $(U(\xi), V(\xi))$ が (5) の $(P, 0)$ または $(Q, 0)$ の間のホモ/ヘテロクリニック軌道ならば, その U 成分 $U(\xi)$ は境界条件 (3) を満たす (1) の進行波である. (FIGURE 2 参照)

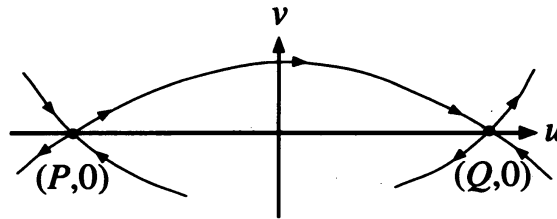


FIGURE 2

このような進行波 $U(\xi)$ が与えられたとき, 以下の線型化固有値問題を関数空間 $BU(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) := \{u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \text{有界一様連続}\}$ で考える.

$$LP := BP_{\xi\xi} - cP_{\xi} + Df(U(\xi))P = \Lambda P \quad (6)$$

Fact ([1] 等参照).

$U(\xi)$ は線型安定ならば漸近安定である.

本稿で対象とするのは, 方程式 (5) が摂動によってホモ/ヘテロクリニック分岐を起こす場合の (FIGURE 3 参照), その分岐構造と分岐してくる解の線型安定性である.

この問題に対する力学系の視点からの自然なアプローチとして, 以下のようなプログラムが考えられる:

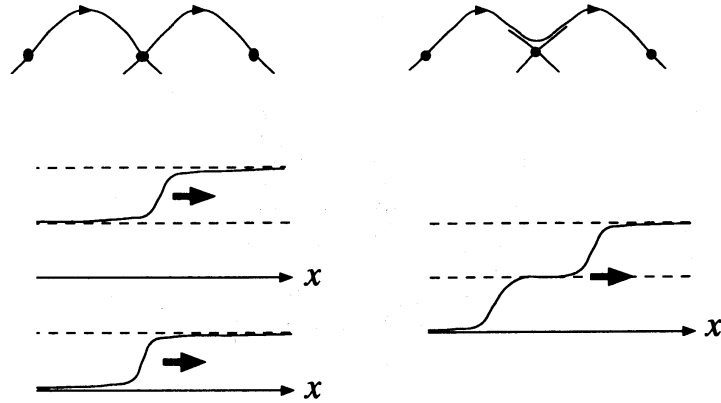


FIGURE 3

- (1) 最初に存在するホモ/ヘテロクリニック軌道について最も弱いタイプの退化を仮定し, ホモ/ヘテロクリニック分岐の理論を適用する. その結果として得られるホモ/ヘテロクリニック軌道に対応する進行波の安定性を解析する.
- (2) より強いタイプの退化をしたホモ/ヘテロクリニック軌道を同様に解析する.

(1) の段階の結果は Evans, Fenichel and Feroe [2], 柳田 [3], 柳田-馬被 [4] 國府-西浦-岡 [5], Deng [6] に始まり, 最近の Jones [7][8], Gardner [9], 観音 [10][11], 新居 [12][13][14], Sandstede [15][16] 等多数ある.

(2) の段階の仕事としては Sandstede, Alexander and Jones [17], Yew [18] 等が知られている.

以下では, このアプローチが実際にどのように行なわれるかを具体例で解説する.

2. EXAMPLES

ε - τ システムとよばれる以下の系を考える:

$$\begin{cases} \varepsilon \tau u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u, v; \theta, \gamma) \\ v_t = v_{xx} + g(u, v; \theta, \gamma) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (7)$$

但し f, g の null-klein は定性的に FIGURE 4 の様に与えられるとする. 特にそれらは 3 点で交わり, 両側の交点 P と Q は方程式 (7) の安定な定常解を与えるとする. 更に, $\theta = 0$ のとき f と g は原点に対して odd symmetric であると仮定する. (f, g に対する詳しい仮定は [5] を参照のこと.)

この系について, 先ず最初に國府-西浦-岡 [5] によって P から Q へのヘテロクリニック軌道と Q から P へのヘテロクリニック軌道の存在が示された. より正確には, (γ, θ, c) の 3 parameta の空間内に二つの曲面 M_1 と M_2 が存在し, M_1 上では P から

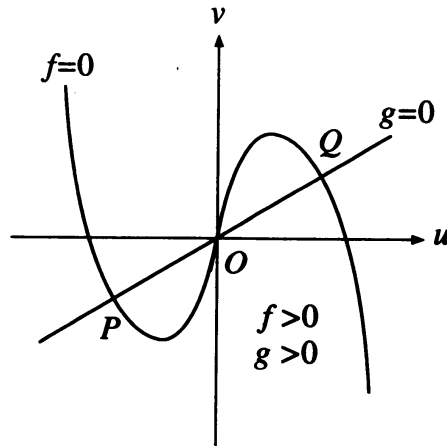


FIGURE 4

Q へのヘテロクリニック軌道, M_2 上では Q から P へのヘテロクリニック軌道が存在する. γ を固定した $\theta - c$ 平面での M_1, M_2 の切口は FIGURE 5 の様になっている. 特に, 或 $\gamma = \gamma_*$ で M_1 の切口と M_2 の切口は接しており, 他の γ ではそれらは横断的に交わる. 國府-西浦-岡 [5] では更に, 「非退化な」ヘテロクリニックループに対する

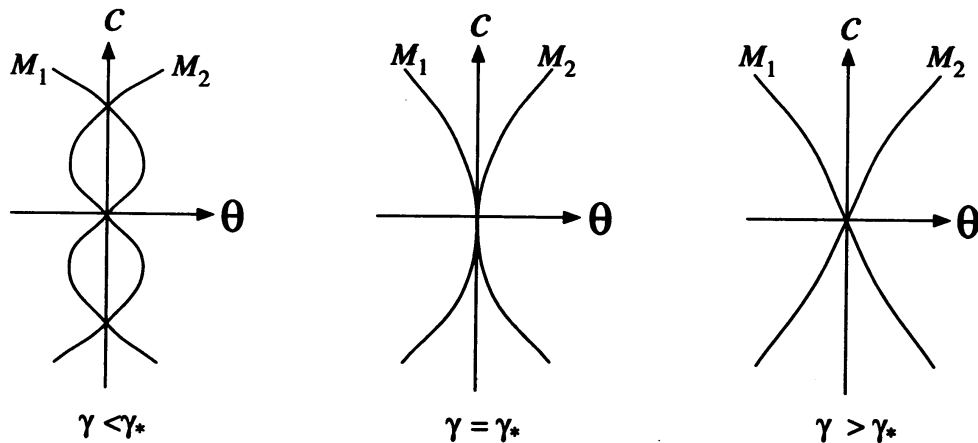


FIGURE 5

ホモクリニック分岐の理論を適用して次のことを示した.

すなわち, γ_* 以外の各 γ に対して M_1, M_2 の交点から伸びる $\theta - c$ 平面内の曲線 M_P, M_Q があって M_P 上では P に対するホモクリニック軌道, M_Q 上では Q に対するホモクリニック軌道が存在する. (FIGURE 6, FIGURE 7 参照)

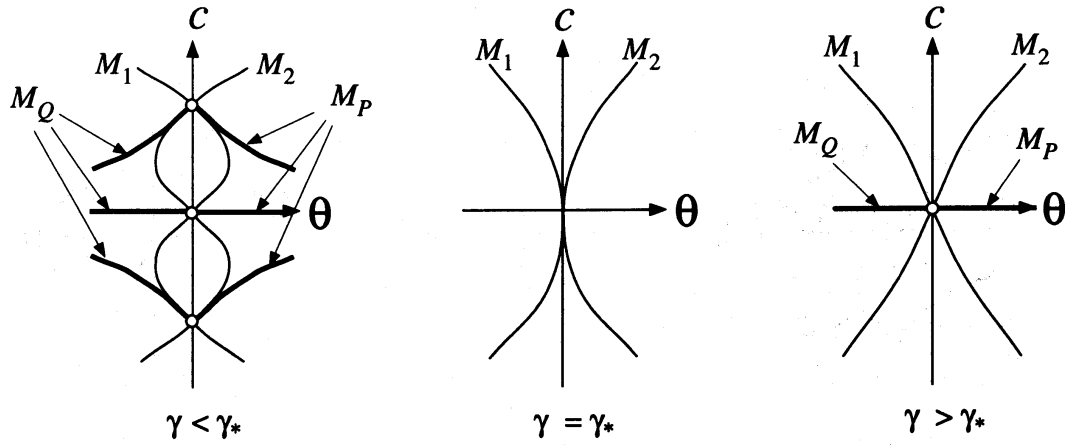


FIGURE 6

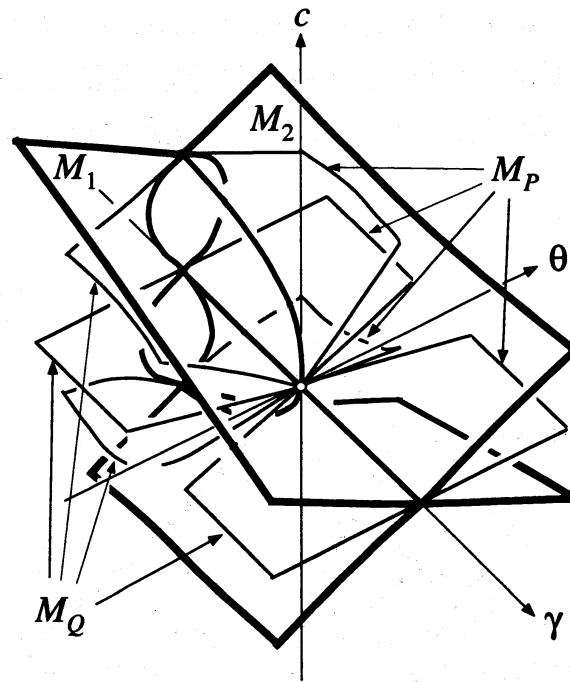


FIGURE 7

これらのホモクリニック軌道に対応する進行波の安定性の決定も新居 [12] 及び池田 [19] によってなされた. (FIGURE 8 参照)

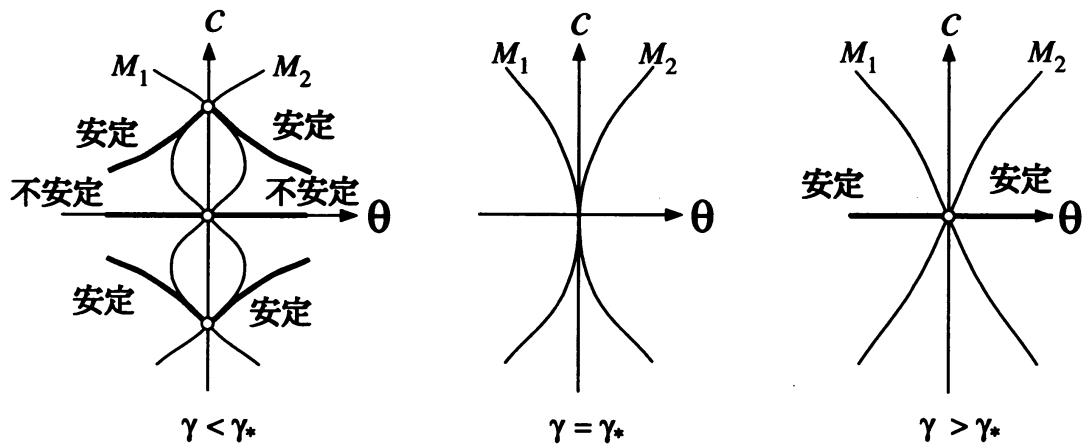


FIGURE 8

しかしこの段階では、 $\gamma = \gamma_*$ については横断性の欠如により何も分かっていなかった。その後池田-池田-三村 [20] によって、ほぼ完全なホモクリニック分岐の大域的な分岐図と Hopf 分岐の存在が示されが、その手法が特異摂動論によっていたために、やはり横断性の欠如により特異点 $(\gamma, \theta, c) = (\gamma_*, 0, 0)$ の近傍は分岐図から除外されていた。(FIGURE 9 参照)

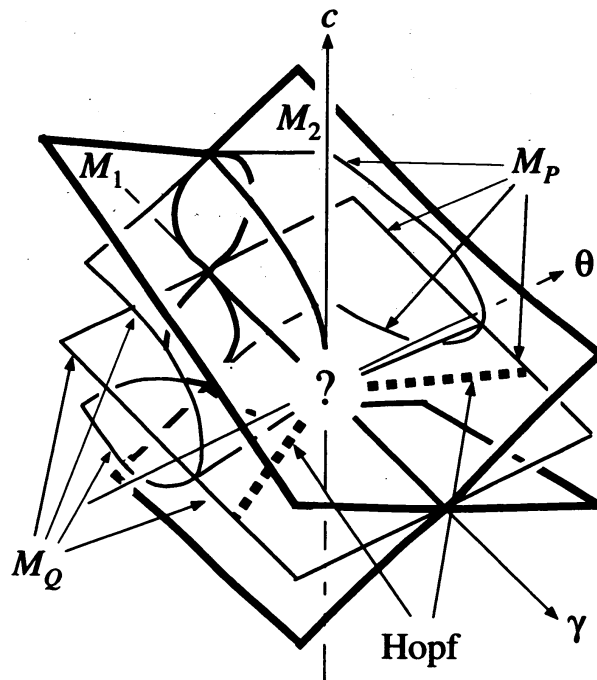


FIGURE 9

しかし, FIGURE 9 から分かるように, この特異点こそがこの分岐構造の organizing center になっていることが容易に予想される.

そこで, この特異点と同じ特異性を持つ特異点からの分岐を解析した結果として次が得られた.

Theorem .

反応拡散方程式 (1) に対する進行波の方程式 (5) が $\varepsilon - \tau$ システムの $(\gamma, \theta, c) = (\gamma_*, 0, 0)$ と同じ特異性を持つと仮定する. この時 FIGURE 10 で表されるように, それ自身が *pitchfork* 分岐を起こすホモクリニック軌道がこの特異点から分岐しており, 更にこのホモクリニック軌道に対応する進行波は *Hopf* 分岐を起こしている.

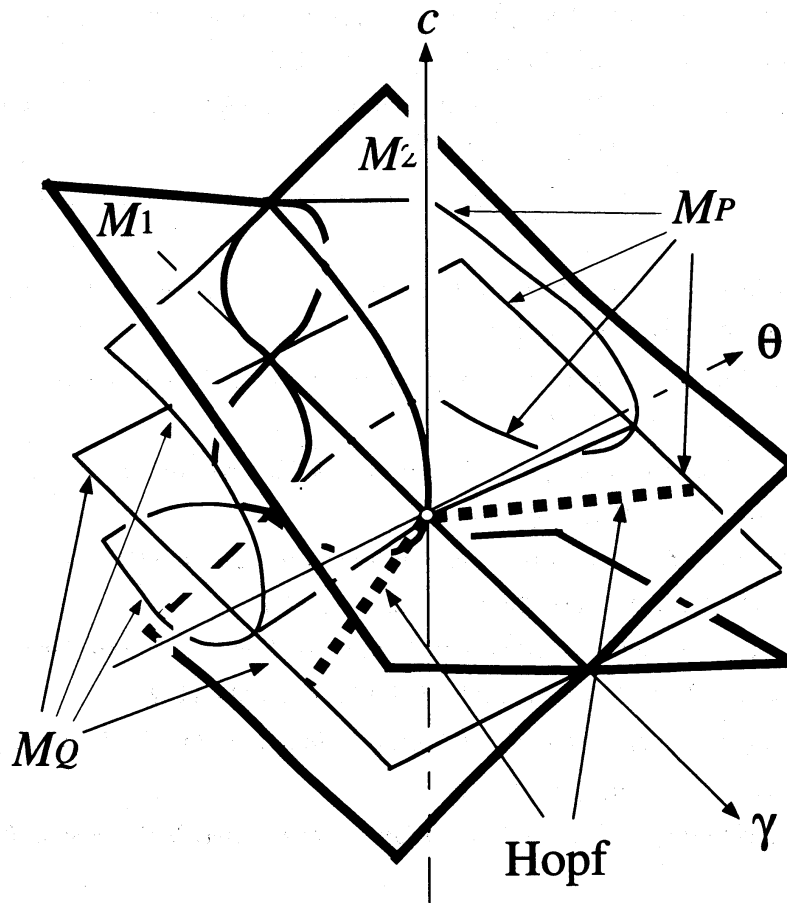


FIGURE 10

Remark .

この定理は, 特異点の構造のみに基づいているので局所的な結論しか与えない. その意味で, 特異点の近傍以外について大域的な分岐構造を与える池田-池田-三村 [20] の結果と相補的な関係にある.

REFERENCES

- [1] D. Henry, *The geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lec. Notes in Math. **840**(1981) Springer.
- [2] J. Evans, N. Fenichel and A. Feroe, *Double impulse solutions in nerve axon equations*. SIAM J. Appl. Math. **42**(1982), pp. 219–234.
- [3] E. Yanagida, *Branching of double-pulse solutions from single pulse solutions in nerve axon equations*. J. Diff. Eqs. **66**(1987), pp. 243–262.
- [4] E. Yanagida and K. Maginu, *Stability of double-pulse solutions in nerve axon equations*. SIAM J. Appl. Math. **49**(1989), pp. 1158–1173.
- [5] H. Kokubu, Y. Nishiura and H. Oka, *Heteroclinic and homoclinic bifurcations in bistable reaction diffusion systems*. J. Diff. Eqs. **86**(1990), pp. 260–341.
- [6] B. Deng, *The existence of infinitely many traveling front and back waves in the FitzHugh-Nagumo equations*. SIAM J. Math. Anal. **22**(1991), pp. 1631–1650.
- [7] J. Alexander and C. Jones, *Existence and stability of asymptotically oscillatory double pulses*. J. Reine Angew. Math. **446**(1994), pp. 49–79.
- [8] ———, *Existence and stability of asymptotically oscillatory triple pulses*. Z. Angew. Math. Phys. **44**(1993), pp. 189–200.
- [9] R. Gardner, *Instability of oscillatory shock profile solutions of the generalized Burgers-KdV equation*. Physica D, **90**(1996), pp. 366–386.
- [10] Y. Kan-on, *Existence of standing waves for competition-diffusion equations*. Japan J. Indust. Appl. Math. **13**(1996), pp. 117–133.
- [11] Y. Kan-on, *Instability of stationary solutions for Lotka-Volterra competition model with diffusion*. J. Math. Anal. Appl. **208**(1997), pp. 158–170.
- [12] S. Nii, *An extension of the stability index for travelling wave solutions and its application for bifurcations*. SIAM J. Math. Anal. **28**(1997), pp. 402–433.
- [13] ———, *Stability of travelling multiple-front (multiple-back) wave solutions of the FitzHugh-Nagumo Equations*. SIAM J. Math. Anal. **28**(1997), pp. 1094–1112.
- [14] ———, *A topological proof of stability of N -front solutions of the FitzHugh-Nagumo Equations*. J. Dyn. Diff. Eqns. **11**(1999), pp. 515–555.
- [15] B. Sandstede, *Stability of multiple-pulse solutions*. Trans. Amer. Math. Soc. **350**(1998), pp. 429–472.
- [16] ———, *Stability of N -fronts bifurcating from a twisted heteroclinic loop and an application to the FitzHugh-Nagumo equation*. SIAM J. Math. Anal. **29**(1998), pp. 183–207.
- [17] B. Sandstede, J. Alexander and C. Jones, *Existence and stability of n -pulses on optical fibers with phase-sensitive amplifiers*. Physica D **106**(1997), pp. 167–206.
- [18] A. Yew, *Analytical study of solitary-waves in quadratic media*. PhD thesis, Brown University,

- [19] H. Ikeda, *Existence and stability of pulse waves bifurcated from front and back waves in bistable reaction-diffusion systems*. Japan J. Indust. Appl. Math. **15**(1998), pp. 163–231
- [20] T. Ikeda, H. Ikeda and M. Mimura *Hopf bifurcation of travelling pulses in some bistable reaction-diffusion systems*. Methods Appl. Anal. **7**(2000), pp. 165–193