数理解析研究所講究録 1263 巻 2002 年 18-29

様々な仮定の下での競合的在庫モデル

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1. はじめに

在庫理論に関する研究の中心は、1施設における在庫管理について論じられており、単一・多期間、単一・多品目等、様々な仮定の下で研究が行われてきた。近年になって、複数の企業間における在庫の最適化を考える研究が盛んになってきている。例えば、古典的在庫問題として知られている新聞売り子問題の競合的バージョンが1997年S.A. Lippman and K.F. McCardleによって現された [15]。我々は競合する企業間においてそれぞれの企業が、どのような戦略をとればよいのであろうかということに興味がある。本稿では、ある製品を販売する2つの企業が、直線上の市場に分布している客に対して製品を供給するモデルについて論じる [4 − 9]。主な目的は発注、在庫維持、不足および販売に関連した総費用を最小にする発注量における平衡点を具体的に求めることである。我々はこの問題についてゲーム論的な解析を試みる。

2節では本発表の基礎となる基本モデルを定式化し、平衡解析を行う。さらにHuff[11] の提案したモデルにおける吸引確率を適用し、数値例を与える。より現実的な仮定を与えるために、3節では基本モデルにおける客の出発時刻を一様分布に従う確率変数へと拡張する。平衡結果が複雑であるので、数値例を挙げて基本モデルの結果と比較を行う。2節のモデルをより具体的に述べるために、単純化した特別なモデルを4節で論じる。5節ではいくつかの異なる仮定を与えたモデルについての結果を述べ、4節の結果との相違点について論じる。

2. 基本モデル

2.1. 定式化

閉区間 $[0,1]$ 上に分布している客に対して、二人のプレーヤが製品を供給し、過剰需要は再配分されるような一期間在庫モデルについて探究する。

二人のプレーヤ (Player I, II と呼ぶ) が、ある製品を同時に販売し、市場を獲得する。Player I は $[0,1]$ 区間上の位置0に、Player II は位置1に配置されている。各プレーヤの発注は期首に一度だけ可能で、即時的に納入される。納入された製品は客の需要を満たすために使われる。段取り費用がなく、購入費用は発注量に比例する。各プレーヤが各時刻に在庫を保持している場合には在庫維持費用がかかり、逆に在庫が不足している場合には品切れ損失費用を負う。あるプレーヤにおいて不足が生じた場合にはそのプレーヤによってバックログされないが、もう一方のプレーヤにまだ在庫が残っていれば再配分により客の需要は満たされる。

客は $[0,1]$ 上に連続的に分布しており、密度関数 $f(x), x \in [0,1]$ は既知である。地点 x の客はまず最初に確率 $p(x)$ で Player I 側へ、残りの確率 $1-p(x)$ で Player II 側へ一人一個の製品を購入するために向かう。そこで、$\int_0^1 f(x)dx = 1$、すべての $x \in [0,1]$ に対して $0 \le p(x) \le 1$ である。また、最初に訪れたプレーヤ側に在庫がないと知ると直ちにもう一方のプレーヤ側へ向かう。しかし、両プレーヤにより満たされなければ客は購入をあきらめる。客は各地点を同時に出発し、いずれかのプレーヤ側に向かうが、移動にかかる時間は移動距離に比例する。客は任意の時刻におけるプレーヤの所有する在庫量を知らない。各プレーヤは相手プレーヤのコストの値を知っているものとする。Player I と II は非協力的であり、発注、在庫維持、

品切れ損失、および販売に関する総費用の最小化を目的としている。決定変数は期首発注量であり、それぞれ独立に決定される。

モデルを定式化するために、以下の記号を導入する:

z_i	:	各プレーヤの発注量, 決定変数
r_i	:	各プレーヤの単位製品当たりの販売価格
c_i	:	各プレーヤの単位製品当たりの購入費用, $c_i \geq 0$
h_i	:	各プレーヤの単位時間単位製品当たりの在庫維持費用, $h_i \geq 0$
p_i	:	各プレーヤの単位時間単位製品当たりの品切れ損失費用, $p_i \geq 0$
t	:	単位距離当たりの移動時間
$Q^i(T)$	:	時刻Tにおける各プレーヤの在庫量
$C^i(z_1, z_2)$	:	各プレーヤの期平均総費用

ここで、添字iはPlayer Iに対して$i=1$を、Player IIに対して$i=2$を対応させる。プレーヤは利益を得なければならないので、自然な仮定として$r_i \geq c_i$を与える。一般性を失うことなく、総需要量を1と仮定する。総需要量が1であるので、各プレーヤの発注量z_iは$0 \leq z_i \leq 1$に制限することができる。プレーヤの営業時間はすべての客の行動が終わるまでとする。すなわち計画期間は$2t$である。このとき、z_1, z_2の関係に対して次の6つの状況を考えることができる。

Situation 1: $z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)dx$ かつ $z_2 \geq 1 - \int_0^1 p(x)f(x)dx$ の場合

この状況ではすべての客に対して製品を供給することができ、両プレーヤ共に不足は生じない。この状況を満たしている(z_1, z_2)の集合$\left\{(z_1, z_2) \in [0,1] \times [0,1] : z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)dx, z_2 \geq 1 - \int_0^1 p(x)f(x)dx\right\}$をS1とおく。

Situation 2: $0 \leq z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)dx$ かつ $z_2 \geq 1 - \int_0^1 p(x)f(x)dx$, $z_1 + z_2 > 1$ の場合

この状況でもSituation 1と同様にすべての客に対して製品を供給できる。時刻tまでにPlayer I側で不足を生じるが、Player Iにより満たされなかった客はPlayer II側で満たされることになる。集合S1と同様、この状況を満たす(z_1, z_2)の集合をS2とおく。以下においても同様に集合S3-S6を定義する。

Situation 3: $0 \leq z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)dx$ かつ $z_2 \geq 1 - \int_0^1 p(x)f(x)dx$, $z_1 + z_2 \leq 1$ の場合

この状況においてPlayer I側では需要を満たされない客がいる。Player IIに再配分された客の中にはPlayer IIでも需要を満たされない人もいる。

Situation 4: $0 \leq z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)dx$ かつ $0 \leq z_2 < 1 - \int_0^1 p(x)f(x)dx$ の場合

この状況では各プレーヤに訪れた最初の方の客のみが満たされ、初めて訪れたプレーヤによって満たされなければその後も満たされることはない。

Situation 5: $z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)dx$ かつ $0 \leq z_2 < 1 - \int_0^1 p(x)f(x)dx$, $z_1 + z_2 > 1$ の場合

この場合にはSituation 2においてPlayer IとIIの役割を交替すればよい。

Situation 6: $z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)dx$ かつ $0 \leq z_2 < 1 - \int_0^1 p(x)f(x)dx$, $z_1 + z_2 \leq 1$ の場合

この場合にはSituation 3においてPlayer IとIIの役割を交替すればよい。

このとき期平均総費用$C^i(z_1, z_2)$は次の様になる:

$$
\begin{aligned}
&C^1(z_1, z_2) \\
&= \begin{cases}
[c_1 + h_1]z_1 - [h_1 + r_1] \int_0^1 p(x)f(x)\,dx + \frac{h_1}{2} \int_0^1 xp(x)f(x)\,dx \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S1}, \\
[c_1 - p_1 - r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{2} \int_0^{\frac{t_1}{t}} xp(x)f(x)\,dx + p_1 \left\{ \int_0^1 p(x)f(x)\,dx \right. \\
\qquad \left. -\frac{1}{2} \int_0^1 xp(x)f(x)\,dx \right\} \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S2,S3}, \\
[c_1 - p_1 - r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{2} \int_0^{\frac{t_1}{t}} xp(x)f(x)\,dx + p_1 \left\{ \int_0^1 p(x)f(x)\,dx \right. \\
\qquad \left. -\frac{1}{2} \int_0^1 xp(x)f(x)\,dx + \frac{1}{2} \int_0^{1-\frac{t_3}{t}} x(1-p(x))f(x)\,dx \right\} \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S4}, \\
[c_1 + h_1]z_1 - r_1(1 - z_2) + h_1 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 xp(x)f(x)\,dx - \int_0^1 p(x)f(x)\,dx \right. \\
\qquad \left. -\frac{1}{2} \int_0^{1-\frac{t_3}{t}} x(1-p(x))f(x)\,dx \right\} \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S5}, \\
[c_1 + h_1 - r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{2} \int_0^{2-\frac{t_4}{t}} x(1-p(x))f(x)\,dx + h_1 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 xp(x)f(x)\,dx \right. \\
\qquad \left. - \int_0^1 p(x)f(x)\,dx - \frac{1}{2} \int_0^{1-\frac{t_3}{t}} x(1-p(x))f(x)\,dx \right\} \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S6};
\end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&C^2(z_1, z_2) \\
&= \begin{cases}
[c_2 + h_2]z_2 - \left[\frac{1}{2}h_2 + r_2\right] \{1 - \int_0^1 p(x)f(x)\,dx\} - \frac{h_2}{2} \int_0^1 x(1-p(x))f(x)\,dx \\
\qquad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S1}, \\
[c_2 + h_2]z_2 - \left[\frac{1}{2}h_2 + r_2\right](1 - z_1) + \frac{h_2}{2} \left\{ \int_{\frac{t_1}{t}}^1 xp(x)f(x)\,dx \right. \\
\qquad \left. - \int_0^1 x(1-p(x))f(x)\,dx \right\} \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S2}, \\
\left[c_2 + \frac{h_2}{2} - \frac{p_2}{2} - r_2\right] z_2 - \frac{h_2+p_2}{2} \int_{\frac{t_2}{t}-1}^1 xp(x)f(x)\,dx + \frac{h_2}{2} \left\{ \int_{\frac{t_1}{t}}^1 xp(x)f(x)\,dx \right. \\
\qquad \left. - \int_0^1 x(1-p(x))f(x)\,dx \right\} - \frac{p_2}{2}(z_1 - 1) \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S3}, \\
\left[c_2 + \frac{h_2}{2} - \frac{p_2}{2} - r_2\right] z_2 - \frac{h_2+p_2}{2} \int_{1-\frac{t_3}{t}}^1 x(1-p(x))f(x)\,dx - \frac{p_2}{2} \{z_1 - 1 \\
\qquad + \int_{\frac{t_1}{t}}^1 xp(x)f(x)\,dx - \int_0^1 x(1-p(x))f(x)\,dx \Big\} \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S4}, \\
\left[c_2 + \frac{h_2}{2} - \frac{p_2}{2} - r_2\right] z_2 - \frac{h_2+p_2}{2} \int_{1-\frac{t_3}{t}}^1 x(1-p(x))f(x)\,dx \\
\qquad + \frac{p_2}{2} \left\{ \int_0^1 x(1-p(x))f(x)\,dx + \int_0^1 (1-p(x))f(x)\,dx \right\} \quad \text{for } (z_1, z_2) \in \mathrm{S5,S6}.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{2}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \min\{T \ : \ z_1 = \textstyle\int_0^{\frac{T}{t}} p(x)f(x)\,dx,\ 0 \le T \le t\}, \\
t_2 &= \min\{T \ : \ z_1 + z_2 - 1 + \textstyle\int_{\frac{T}{t}-1}^1 p(x)f(x)\,dx = 0,\ t_1 + t \le T \le 2t\}, \\
t_3 &= \min\{T \ : \ z_2 = \textstyle\int_{1-\frac{T}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx,\ 0 \le T \le t\}, \\
t_4 &= \min\{T \ : \ z_1 + z_2 - 1 + \textstyle\int_0^{2-\frac{T}{t}} (1-p(x))f(x)\,dx = 0,\ t_3 + t \le T \le 2t\}
\end{aligned}
$$

である。これらにより与えられた対(z_1, z_2)に対して$t_1, \cdots, t_4$が一意に定まる。

このとき、$C^1(z_1, z_2)$は各領域上で固定されたz_2に対してz_1の凸関数であり、$C^2(z_1, z_2)$は固定されたz_1に対してz_2の凸関数であることがわかる。ゆえに$C^1(z_1, z_2)$を最小にするPlayer Iの最適発注量z_1^*は

$$
\begin{cases}
\int_0^1 p(x)f(x)\,dx \text{ in S1}, \\
\int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx \text{ in S2,S3 and S4}, \\
1 - \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx \text{ in S5}, \\
\int_0^1 p(x)f(x)\,dx + \int_{2-\frac{t_4^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx - \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx \text{ in S6}
\end{cases} \tag{3}
$$

であり、$C^2(z_1, z_2)$ を最小にする Player II の最適発注量 z_2^* は

$$\begin{cases} 1 - \int_0^1 p(x)f(x)\,dx \text{ in S1}, \\ 1 - \int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx \text{ in S2}, \\ 1 - \int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx - \int_{\frac{t_2^*}{t}-1}^1 p(x)f(x)\,dx \text{ in S3}, \\ \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx \quad \text{in S4,S5 and S6} \end{cases} \tag{4}$$

である。ここで、

$$t_1^* = t_4^* = \frac{2(r_1 - c_1 + p_1)}{h_1 + p_1}t, \quad t_2^* = t_3^* = \frac{2(r_2 - c_2 + p_2)}{h_2 + p_2}t$$

である。これはある状況において、プレーヤの最適発注量が相手プレーヤの決定に依存していることを示している。

2.2. 平衡解析

この節では、前節に得られた局所最適解 $z_i^*, i = 1, 2$ を各プレーヤの純戦略の１つとして考え、それらの戦略を並べることにより生成される双利得行列を用いて、２人のプレーヤにおける発注量の平衡点を求める。前節の解析過程で得られる制約条件により、次のような８つの利得領域上において平衡解析を進める必要がある。

(a) $0 \le r_i - c_i < \frac{h_i - p_i}{2}, i = 1, 2$;
(b) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1 - p_1}{2}$, $\frac{h_2 - p_2}{2} \le r_2 - c_2 < \frac{h_2 - p_2}{2} + \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1}$;
(c) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1 - p_1}{2}$, $\frac{h_2 - p_2}{2} + \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} \le r_2 - c_2 < h_2$;
(d) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1 - p_1}{2}$, $r_2 - c_2 \ge h_2$;
(e) $\frac{h_1 - p_1}{2} \le r_1 - c_1 < \frac{h_1 - p_1}{2} + \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2}$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2 - p_2}{2}$;
(f) $\frac{h_1 - p_1}{2} + \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} \le r_1 - c_1 < h_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2 - p_2}{2}$;
(g) $r_1 - c_1 \ge h_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2 - p_2}{2}$;
(h) $r_i - c_i \ge \frac{h_i - p_i}{2}, i = 1, 2$.

今、(c) の領域における平衡点を求める。他の領域でも同様の解析により平衡点を求めることができる。

Player I は２つの支配している純戦略をもつ：$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 p(x)f(x)\,dx$、$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx$。Player II も２つの支配している純戦略をもつ：$\mathrm{II}_1 = 1 - \int_0^1 p(x)f(x)\,dx$、$\mathrm{II}_2 = 1 - \int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx - \int_{\frac{t_2^*}{t}-1}^1 p(x)f(x)\,dx$。これらの戦略を並べ、対応する利得を当てはめると、次のような利得行列を得る。

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad\mathrm{II}_1 \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (C_1^1(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_1), C_1^2(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_1)) & (C_1^1(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_2), C_1^1(\mathrm{I}_1, \mathrm{II}_2)) \\ (C_3^1(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1), C_3^1(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_1)) & (C_3^1(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_2), C_3^1(\mathrm{I}_2, \mathrm{II}_2)) \end{pmatrix} \end{array}.$$

そこで $C_j^i(\cdot,\cdot), j = 1, 3$ は関数 $C^i(\cdot,\cdot)$ における Sj 上での値を表している。

S1 と S3 の境界における連続性により、

$$C_1^1\left(\int_0^1 p(x)f(x)\,dx, \cdot\right) = C_3^1\left(\int_0^1 p(x)f(x)\,dx, \cdot\right)$$

となるので、ここに現われた Player I の関数はすべて $C_3^1(\cdot,\cdot)$ のみで与えられる。$C_3^1(\cdot,\cdot)$ の最適性により、戦略 I_1 は戦略 I_2 によって支配される。この支配関係によって縮小された双利得行列において、$C_3^2(\cdot,\cdot)$ の最適性により、戦略 II_1 は戦略 II_2 によって支配される。従って、平衡点として $(z_1^*, z_2^*) = (\int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx, 1 - \int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx - \int_{\frac{t_2^*}{t}-1}^1 p(x)f(x)\,dx)$ を得る。

$r_2 - c_2 \setminus r_1 - c_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.496,0.491)	(0.500,0.491)	(0.508,0.491)	(0.509,0.491)
0.5	(0.496,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.496,0.503)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.496,0.504)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 1: 基本モデルの平衡点 (z_1^*, z_2^*)

以上のように、コストの大小関係から戦略の支配関係を用いることにより、他の領域では次のような平衡点 (z_1^*, z_2^*) が得られる：

(a) $(\int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx, \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx)$;

(b) $(\int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx, 1-\int_0^1 p(x)f(x)\,dx)$;

(d) $(\int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx, 1-\int_0^{\frac{t_1^*}{t}} p(x)f(x)\,dx)$;

(e) $(\int_0^1 p(x)f(x)\,dx, \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx)$;

(f) $(\int_0^1 p(x)f(x)\,dx + \int_{2-\frac{t_4^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx - \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx, \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx)$;

(g) $(1-\int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx, \int_{1-\frac{t_3^*}{t}}^1 (1-p(x))f(x)\,dx)$;

(h) $(\int_0^1 p(x)f(x)\,dx, 1-\int_0^1 p(x)f(x)\,dx)$.

2.3. 数値例

本節では、確率 $p(x)$ に Huff [11] の提案したモデルの吸引確率を適用し、我々の平衡結果に対して数値例を与える。まず、Huff モデルの説明から始める。

P_{ij}	:	位置 i の客が特定のショッピングセンター j へ向かう確率
S_j	:	ショッピングセンター j の規模
T_{ij}	:	客の位置 i からショッピングセンター j までの移動時間
λ	:	ショッピングの種類によって移動時間に影響を与え、経験から推測されるパラメータ値

とする。このとき、客の吸引力を表す各ショッピングセンターへの確率はその規模に比例し、ショッピングセンターから客の位置までの距離の λ 乗に反比例する。λ の値は製品の品種によって異なり、おおよそ2前後の値をとる。ショッピングセンターが 2 施設である時には次の様に定式化される：

$$P_{ij} = \frac{S_j/T_{ij}^{\lambda}}{\sum_{j=1}^{2} S_j/T_{ij}^{\lambda}} \tag{5}$$

このモデルにおいて我々は $S_0 = S_1$、$\lambda = 2$ を適用する。そのとき、選択確率 $p(x)$ は

$$p(x) = \frac{(1-x)^2}{x^2 + (1-x)^2}$$

となる。このとき客の分布が一様、すなわち $f(x) = 1$ で、各パラメータ値が $h_1 = 1.0, p_1 = 0.5, h_2 = 2.0, p_2 = 1.0$ をとるときの数値例を表 1 に示す。この例からわかるように、両プレーヤの発注量の和が 1 を超えることはない。また、各プレーヤの発注量 z_i^* は利得 $r_i - c_i$ に関して単調に増加している。

3. 基本モデルの拡張

3.1. 定式化と平衡結果

前節では、客の出発時刻が同時であるモデルを扱った。現実的には、出発時刻をランダムに扱うのが自然であるように思われる。本節では、客が各地点を $[0, t_0]$ の一様分布に従って出発する一期間在庫モデルにつ

いて考察する。プレーヤの計画期間を$t_s = 2t + t_0$とする。出発時刻及び計画期間以外の仮定は基本モデルと同様に与える。

次の関数を定義する：

$$
\begin{aligned}
q_1(T) &= \max\{0, (T - t_0)/t\},\ 0 \le T \le t + t_0,\\
q_2(T) &= \min\{T/t, 1\},\ 0 \le T \le t + t_0,\\
q_3(T) &= \max\{0, (T - t_0)/t - 1\},\ t \le T \le t_s,\\
q_4(T) &= \min\{T/t - 1, 1\},\ t \le T \le t_s.
\end{aligned}
$$

また、

$$
A_1 = \begin{cases} 1, & t + t_1 \le t_2 < t + t_0,\\ 0, & t + t_0 \le t_2 \le t_s; \end{cases}
$$

$$
A_2 = \begin{cases} 1, & t + t_3 \le t_4 < t + t_0,\\ 0, & t + t_0 \le t_4 \le t_s, \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \min\left\{ T \,\middle|\, z_1 - \int_0^{q_1(T)} p(x)f(x)dx - \frac{1}{t_0}\int_{q_1(T)}^{q_2(T)} p(x)f(x)dx = 0,\ 0 \le T \le t + t_0 \right\},\\
t_2 &= \min\left\{ T \,\middle|\, z_1 + z_2 - 1 + \int_{q_3(T)}^{1} p(x)f(x)dx + A_1\int_0^{1-q_1(T)} (1 - p(x))f(x)dx \right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{t_0}\left\{ \int_{q_3(T)}^{q_4(T)} p(x)f(x)dx + A_1\int_0^{1-p_1(T)} (1 - p(x))f(x)dx \right\} = 0,\ t + t_1 \le T \le t_s \right\},\\
t_3 &= \min\left\{ T \,\middle|\, z_2 - \int_{1-q_1(T)}^{1} (1 - p(x))f(x)dx - \frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(T)}^{1-q_1(T)} (1 - p(x))f(x)dx = 0, \right.\\
&\qquad \left. 0 \le T \le t + t_0 \right\},\\
t_4 &= \min\left\{ T \,\middle|\, z_1 + z_2 - 1 + A_2\int_{q_1(T)}^{1} p(x)f(x)dx + \int_0^{1-q_3(T)} (1 - p(x))f(x)dx \right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{t_0}\left\{ A_2\int_{q_1(T)}^{1} p(x)f(x)dx + \int_{1-q_4(T)}^{1-q_3(T)} (1 - p(x))f(x)dx \right\} = 0,\ t + t_3 \le T \le t_s \right\}
\end{aligned}
$$

と定義する。

２節と同様の解析方法により、以下の結果を得ることができる。2.2節では８つの利得領域上において解析を進めたが、ここでは次の10通りにおいて解析を行う必要がある。

(a) $0 \le r_1 - c_1 < \min\{\frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1, \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1\}$,
$\min\{\frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2, \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2\} \le r_2 - c_2 < h_2$;
(b) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{t_0}{t_s}h_1 - \frac{2t}{t_s}p_1$, $\frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$;
(c) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $\max\{\frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2, \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2\} \le r_2 - c_2 < h_2$;
(d) $\frac{t_0}{t_s}h_1 - \frac{2t}{t_s}p_1 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $\frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2 \le r_2 - c_2 < \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2$;
(e) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $r_2 - c_2 \ge h_2$;
(f) $\frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{t_0}{t_s}h_2 - \frac{2t}{t_s}p_2$;
(g) $\max\{\frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1, \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1\} \le r_1 - c_1 < h_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$;
(h) $\frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1 \le r_1 - c_1 < \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1$, $\frac{t_0}{t_s}h_2 - \frac{2t}{t_s}p_2 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$;
(i) $r_1 - c_1 \ge h_2$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$;
(j) otherwise.

$$
\begin{aligned}
z_1^0 &= \textstyle\int_0^{q_1(t_1^*)} p(x)f(x)\,dx + \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1^*)}^{q_2(t_1^*)} p(x)f(x)\,dx,\\
z_2^0 &= \textstyle\int_{1-q_1(t_3^*)}^{1} (1 - p(x))f(x)\,dx + \frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3^*)}^{1-q_1(t_3^*)} (1 - p(x))f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

$r_2 - c_2 \setminus r_1 - c_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.500,0.4998)	(0.500,0.4998)	(0.5002,0.4998)	(0.5002,0.4998)
0.5	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 2: $t = 2.0, t_0 = 1.0$における平衡点 (z_1^*, z_2^*)

$r_2 - c_2 \setminus r_1 - c_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.4988,0.4969)	(0.500,0.4969)	(0.5028,0.4969)	(0.5031,0.4969)
0.5	(0.4988,0.500)	(0.500,0.500)	(0.4997,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.4988,0.4985)	(0.500,0.4997)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.4988,0.5012)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 3: $t = 2.0, t_0 = 1.5$における平衡点 (z_1^*, z_2^*)

$r_2 - c_2 \setminus r_1 - c_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.4999,0.4998)	(0.500,0.4988)	(0.5012,0.4988)	(0.5012,0.4988)
0.5	(0.4999,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.4999,0.4999)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.4999,0.5001)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 4: $t = 3.0, t_0 = 1.0$における平衡点 (z_1^*, z_2^*)

とおく。このとき、平衡点(z_1^*, z_2^*)は次の通りである：

(a) (z_1^0, z_2^0);

(b)&(c) $(z_1^0, 1 - z_1^0 - \int_{q_3(t_2^*)}^1 p(x)f(x)\,dx - A_1 \int_0^{1-q_1(t_2^*)} (1-p(x))f(x)\,dx$
$\quad + \frac{1}{t_0}\{\int_{q_3(t_2^*)}^{q_4(t_2^*)} p(x)f(x)\,dx + A_1 \int_{1-q_2(t_2^*)}^{1-q_1(t_2^*)} (1-p(x))f(x)dx\})$;

(d) $(z_1^0, \int_0^1 (1-p(x))f(x)\,dx)$; (e) $(z_1^0, 1 - z_1^0)$;

(f)&(g) $(1 - z_2^0 - \int_0^{1-q_3(t_4^*)} (1-p(x))f(x)\,dx - A_2 \int_{q_1(t_4^*)}^1 p(x)f(x)\,dx$
$\quad + \frac{1}{t_0}\{A_2 \int_{q_1(t_4^*)}^{q_2(t_4^*)} p(x)f(x)\,dx + \int_{1-q_4(t_4^*)}^{1-q_3(t_4^*)} (1-p(x))f(x)\,dx\}, z_2^0)$;

(h) $(\int_0^1 p(x)f(x)\,dx, z_2^0)$; (i) $(1 - z_2^0, z_2^0)$; (j) $(\int_0^1 p(x)f(x)\,dx, \int_0^1 (1-p(x))f(x)\,dx)$.

ここで、

$$t_1^* = t_4^* = \frac{r_1 - c_1 + p_1}{h_1 + p_1} t, \quad t_2^* = t_3^* = \frac{r_2 - c_2 + p_2}{h_2 + p_2} t$$

である。

3.2. 数値例

2.3節の数値例と比較するために、パラメータ値として2.3節の数値例と同じ値$h_1 = 1.0, p_1 = 0.5, h_2 = 2.0, p_2 = 1.0, f(x) = 1$を用いる。表2～4は$t$および$t_0$にいくつかの数値を代入して得られた平衡結果である。

数値例では、基本モデルよりいずれの場合にも値として0.5に近づいていた。これは出発時刻を不確実にしたためである。t_0をtに近づけると平衡点は(0.5, 0.5)に近づき、tに比べてt_0を十分小さくとると、基本

モデルの値へと近づく。結果として、このモデルにおける平衡点の値は、上限や下限を基本モデルにおける平衡点によりおさえられていると思われる。明らかに、いずれの場合にも二人のプレーヤの値の和が総需要量を越えることはない。一企業における最適在庫問題では、最適解が単に凸となるのに対し、この研究において平衡点として凸でない結果が得られたことは注目すべき点である。

4. 特別なモデル

2節で扱ったモデルと同様の一期間在庫モデルを考える。しかしながら以下の3つの仮定が異なる。

(1) 客は[0,1]上に一様に分布している。

(2) 客はまず最初に自分の地点から近い店に向かう。

(3) プレーヤの計画期間を$\frac{3}{2}t$とする。

2節と同様の解析方法により、以下の結果を得ることができる。2.2節と同じく8つの利得領域上において解析を行った。

(a) $0 \le r_i - c_i < \frac{h_i - 2p_i}{3}, i = 1, 2;$

(b) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, \frac{h_2 - 2p_2}{3} \le r_2 - c_2 < (h_2 + p_2)\frac{r_1 - c_1 + p_1}{h_1 + p_1} + \frac{2h_2 - p_2}{3};$

(c) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, (h_2 + p_2)\frac{r_1 - c_1 + p_1}{h_1 + p_1} + \frac{2h_2 - p_2}{3} \le r_2 - c_2 < h_2;$

(d) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, r_2 - c_2 \ge h_2;$

(e) $\frac{h_1 - 2p_1}{3} \le r_1 - c_1 < (h_1 + p_1)\frac{r_2 - c_2 + p_2}{h_2 + p_2} + \frac{2h_1 - p_1}{3}, 0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(f) $(h_1 + p_1)\frac{r_2 - c_2 + p_2}{h_2 + p_2} + \frac{2h_1 - p_1}{3} \le r_1 - c_1 < h_1, 0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(g) $r_1 - c_1 \ge h_1, 0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(h) $r_i - c_i \ge \frac{h_i - 2p_i}{3}, i = 1, 2.$

平衡結果は次の通りである：

(a) (k_1, k_2); (b) $\left(k_1, \frac{1}{2}\right)$; (c) $\left(k_1, k_2 - k_1 - \frac{1}{2}\right)$; (d) $(k_1, 1 - k_1)$; (e) $\left(\frac{1}{2}, k_2\right)$; (f) $\left(k_1 - k_2 - \frac{1}{2}, k_2\right)$; (g) $(1 - k_2, k_2)$; (h) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

ここで、$k_i = \frac{3(r_i - c_i + p_i)}{2(h_i + p_i)}, i = 1, 2$である。

5. 特別なモデルの拡張

5.1. 客が購入をあきらめる可能性をもつモデル

4節で述べたモデルでは、初めに訪れたプレーヤに在庫がなければ、客は需要を満たすために必ずもう一方のプレーヤを訪れようとしていた。本節では、この仮定を次のように変更したモデルについて論じる：もしある店に在庫がなければ、一定の確率$1 - q$で購入をあきらめ、残りの確率qで距離1だけ離れているもう一方の店へ向かう。

4節で述べた利得領域上において、次のような平衡点(z_1^*, z_2^*)を得る：

(a) (k_1, k_2); (b) $\left(k_1, \frac{1}{2}\right)$; (c) $\left(k_1, \frac{1}{2} - q\left(k_1 + 1 - k_2\right)\right)$; (d) $\left(k_1, \frac{1}{2} + q\left(\frac{1}{2} - k_1\right)\right)$; (e) $\left(\frac{1}{2}, k_2\right)$; (f) $\left(\frac{1}{2} - q\left(k_2 + 1 - k_1\right), k_2\right)$; (g) $\left(\frac{1}{2} + q\left(\frac{1}{2} - k_2\right), k_2\right)$; (h) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

前節の結果において$\frac{1}{2}$以上発注する時、あきらめる確率を伴うモデルでは、その最適戦略の値より少ない量を発注することになる。$q = 0$のとき、客は最初に訪れたプレーヤに在庫がなければその時点で購入をあきらめるので、再配分が起こらず、プレーヤが$\frac{1}{2}$より多く発注することはない。$q = 1$のとき、すべての不足分が再配分されるモデルとなり、4節の平衡結果に一致する。

5.2. 追加注文をもつモデル

本節では、発注に関して4節のモデルにさらなる仮定を加え、片方のプレーヤにのみ追加注文が許される二者競合的在庫問題を扱う。Player Iは期首に発注可能である。また、ある時刻に在庫調査をし、不足の状態に至っているならば、追加注文を行うことができる。その発注分もリードタイム0で到着し、バックログとして利用される。Player IIは期首のみ発注可能である。不足が生じた場合、Player Iは追加注文により

バックログが可能であるが、それ以外にバックログは許されない。Player Iは期首発注量と追加発注量を、Player IIは期首発注量を期首に決定しなければならない。このモデルにおいて、次の記号を付け加える：

t_0 : Player Iの追加注文時刻
z_1^0 : 時刻t_0におけるPlayer Iの追加注文量
r_1^0 : Player Iの追加注文時における単位当たりの販売価格
c_1^0 : Player Iの追加注文時における単位当たりの発注費用

自然な仮定として、$r_1^0 \geq c_1^0 \geq 0, c_1^0 \geq c_1$を与える。本モデルでは、$0 < t_0 \leq t$において考察を行った。ここではPlayer Iの戦略を決定するにあたり、次のような２段階決定法を用いる。

Step 1．期首発注量z_1を固定して、最適追加発注量z_1^{0*}を決定する。

Step 2．z_1^{0*}を与えた上で最適発注量z_1^*を決定する。

本モデルでは、以下の利得領域上において解析を行う：

(I) $t/2 \leq t_0 \leq t$のとき

(a) $0 \leq r_i - c_i < \frac{h_i - 2p_i}{3}, i = 1, 2;$

(b) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, r_2 - c_2 \geq \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(c) $\frac{h_1 - 2p_1}{3} \leq r_1 - c_1 < \frac{2h_1 - p_1}{3} + (h_1 + p_1)\frac{r_2 - c_2 + p_2}{h_2 + p_2}, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(d) $\frac{2h_1 - p_1}{3} + (h_1 + p_1)\frac{r_2 - c_2 + p_2}{h_2 + p_2} \leq r_1 - c_1 < h_1, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(e) $r_1 - c_1 \geq h_1, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(f) $r_i - c_i \geq \frac{h_i - 2p_i}{3}, i = 1, 2.$

(II) $0 < t_0 < t/2$のとき

(a-1) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(a-2) $\frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2 - 2p_2}{3};$

(b-1) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1, \frac{h_2 - 2p_2}{3} \leq r_2 - c_2 < \frac{2}{3}\left(1 + \frac{t_0}{t}\right)h_2 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2t_0}{t}\right)p_2;$

(b-2) $\frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, \frac{h_2 - 2p_2}{3} \leq r_2 - c_2 < \frac{2h_2 - p_2}{3} + (h_2 + p_2)\frac{3(r_1 - c_1 + p_1)}{2(h_1 + p_1)};$

(b-3) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1, \frac{2}{3}\left(1 + \frac{t_0}{t}\right)h_2 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2t_0}{t}\right)p_2 \leq r_2 - c_2 < h_2;$

(b-4) $\frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, \frac{2h_2 - p_2}{3} + (h_2 + p_2)\frac{3(r_1 - c_1 + p_1)}{2(h_1 + p_1)} \leq r_2 - c_2 < h_2;$

(b-5) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1, r_2 - c_2 \geq h_2;$

(b-6) $\frac{2t_0}{3t}h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right)p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}, r_2 - c_2 \geq h_2;$

(c)-(f)は(I)に同じ。

これらの利得領域上において平衡対(z_1^*, z_1^{0*}, z_2^*)を求めると、次のような結果が得られる：

(I) $t/2 \leq t_0 \leq t$のとき

(a) $\left(\frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{1}{2} - \frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, k_2\right);$

(b) $\left(\frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{1}{2} - \frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{1}{2}\right);$ (c) $(\frac{1}{2}, 0, k_2);$ (d) $(k_1 - \frac{1}{2}, 0, k_2);$

(e) $(1 - k_2, 0, k_2);$ (f) $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

(II) $0 < t_0 < t/2$のとき

(a-1) $\left(\frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{t_0}{t} - \frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, k_2\right);$ (a-2) $(k_1, 0, k_2);$

(b-1) $\left(\frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{t_0}{t} - \frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{1}{2}\right);$ (b-2) $(k_1, 0, \frac{1}{2});$

(b-3) $\left(\frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{t_0}{t} - \frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, k_2 - \frac{1}{2} - \frac{t_0}{t}\right);$ (b-4) $(k_1, 0, k_2 - k_1 - \frac{1}{2});$

(b-5) $\left(\frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, \frac{t_0}{t} - \frac{3(r_1 - c_1 - r_1^0 + c_1^0) + 2t_0p_1/t}{2(h_1 + p_1)}, 1 - \frac{t_0}{t}\right);$ (b-6) $(k_1, 0, 1 - k_1);$

(c)-(f)は(I)に同じ。

追加注文が許されないモデルとの相違点は$0 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1 - 2p_1}{3}$の範囲で起こる。Player Iは追加発注をすることができるので、$\frac{t}{2} \leq t_0 \leq t$のときには最適期首発注量$z_1^*$と最適追加発注量$z_1^{0*}$の和が$\frac{1}{2}$以上になるように発注している。これは不足を生じた場合にも追加発注によりすべての客に対してバックログすることができ、その利点を十分に活かした行動をとっていることを意味している。また、$0 < t_0 < \frac{t}{2}$のとき

$0 \le r_1 - c_1 < \frac{2t_0}{3t} h_1 - \left(1 - \frac{2t_0}{3t}\right) p_1$では、$z_1^* + z_1^{0*} = \frac{t_0}{t}$となるようにPlayer Iのそれぞれの発注量が決定されている。Player IIもこの量に依存して発注量を決定している。

5.3. 停止時刻を考慮したモデル

これまでの節において我々はプレーヤの計画期間を２節では$2t$、３節では$2t + t_0$、４節および5.1, 5.2節では$\frac{3}{2}t$と仮定してきた。これは最後の客の行動が終わるまで両プレーヤが店を開いている状況を想定している。しかし、プレーヤがよりコストの削減を望むのであれば、営業時間を途中で打ちきるという戦略をとることができる。本節では、プレーヤが任意の時刻に営業を終了できるモデルについて議論する。これまでの記号に加え、以下の記号を導入する。

T_i ： 各プレーヤの営業終了時刻

このモデルでは各プレーヤは発注量z_iおよび停止時刻T_iを決定する必要がある。そこで次のような２段階決定法を用いる。

Step 1．発注量$z_i, i = 1, 2$を固定して、最適停止時刻T_i^*を決定する。

Step 2．T_i^*の下で最適発注量z_i^*を決定する。

この方法によりPlayer Iに対して$h_i > 5p_i$のときには、次のような最適発注量と最適停止時刻の組(z_1^*, T_1^*)を得ることができる：

(I) $z_2 \ge \frac{1}{2}$の場合

(i) $0 \le z_1 \le \sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}}$のとき

(1) $r_1 - c_1 \ge \sqrt{(h_1+p_1)p_1} - p_1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}}, \frac{1}{2}t\right)$

(2) $r_1 - c_1 < \sqrt{(h_1+p_1)p_1} - p_1 \Rightarrow (0, 0)$

(ii) $\sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}} < z_1 < \frac{1}{2}$のとき

(1) $r_1 - c_1 \ge \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}t\right)$

(2) $\frac{1}{3}\sqrt{p_1(h_1+p_1)} - p_1 < r_1 - c_1 < \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1 \Rightarrow \left(\frac{3(r_1-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}, \frac{3}{2}t\right)$

(3) $r_1 - c_1 \le \frac{1}{3}\sqrt{p_1(h_1+p_1)} - p_1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}}, \frac{3}{2}t\right)$

(iii) $z_1 \ge \frac{1}{2}$のとき$\left(\sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}}, \frac{3}{2}t\right)$

(II) $0 \le z_2 < \frac{1}{2}$の場合

(i) $0 \le z_1 \le \sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}}$のとき

(1) $r_1 - c_1 \ge \sqrt{(h_1+p_1)p_1} - p_1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}}, \frac{1}{2}t\right)$

(2) $r_1 - c_1 < \sqrt{(h_1+p_1)p_1} - p_1 \Rightarrow (0, 0)$

(ii) $\sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}} < z_1 < \sqrt{\frac{p_1}{h_1+p_1}\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)}$のとき

(1) $r_1 - c_1 \ge \frac{2}{3}\sqrt{(h_1+p_1)p_1\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)} - p_1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p_1}{h_1+p_1}\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)}, \frac{3}{2}t\right)$

(2) $\frac{\sqrt{(h_1+p_1)p_1}}{2(1+z_2)} - p_1 < r_1 - c_1 < \frac{2}{3}\sqrt{(h_1+p_1)p_1\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)} - p_1$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\left(\frac{3}{4} + 2z_2 + z_2^2\right) / \left(\frac{(h_1+p_1)^2}{(r_1-c_1+p_1)^2} - \frac{h_1+p_1}{p_1}\right)}, \frac{h_1+p_1}{r_1-c_1+p_1} z_1^* t\right)$

(3) $r_1 - c_1 \le \frac{\sqrt{(h_1+p_1)p_1}}{2(1+z_2)} - p_1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p_1}{4(h_1+p_1)}}, (z_2+1)t\right)$

(iii) $\sqrt{\frac{p_1}{h_1+p_1}\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)} \le z_1 < \frac{1}{2}$のとき

(1) $r_1 - c_1 \ge \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}t\right)$

(2) $\frac{2}{3}\sqrt{p_1(h_1+p_1)\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)} - p_1 < r_1 - c_1 < \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}p_1 \Rightarrow \left(\frac{3(r_1-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)}, \frac{3}{2}t\right)$

(3) $r_1 - c_1 \le \frac{2}{3}\sqrt{p_1(h_1+p_1)\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)} - p_1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{p_1}{h_1+p_1}\left(\frac{3}{2} - 2z_2 - z_2^2\right)}, \frac{3}{2}t\right)$

(iv) $\frac{1}{2} \le z_1 < 1 - z_2$のとき

(1) $r_1 - c_1 \geq h_1 \Rightarrow (1 - z_2, \frac{3}{2}t)$
(2) $\frac{1}{3}(h_1 + p_1)z_2 + \frac{2}{3}h_1 - \frac{1}{3}p_1 < r_1 - c_1 < h_1 \Rightarrow (\frac{3(r_1-c_1+p_1)}{2(h_1+p_1)} - z_2 - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}t)$
(3) $r_1 - c_1 \leq \frac{1}{3}(h_1 + p_1)z_2 + \frac{2}{3}h_1 - \frac{1}{3}p_1 \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}t)$

(v) $z_1 \geq 1 - z_2$のとき$(1 - z_2, \frac{3}{2}t)$

Player IIに対しても同様の結果が得られる。$h_i \leq 5p_i$の時には結果として上述より少ない場合分けになる。これらの組み合わせから、$h_i/p_i > 8$のときには次のような利得領域に分割して考える必要がある。

(a) $0 \leq r_i - c_i < \frac{1}{3}\sqrt{5p_i(h_i + p_i)} - p_i, i = 1, 2;$
(b) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1, \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3};$
(c) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1, \frac{h_2-2p_2}{3} \leq r_2 - c_2 < \frac{2h_2-p_2}{3};$
(d) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1, \frac{2h_2-p_2}{3} \leq r_2 - c_2 < h_2;$
(e) $0 \leq r_1 - c_1 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1, r_2 - c_2 \geq h_2;$
(f) $\frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2;$
(g) $\frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3};$
(h) $\frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}, \frac{h_2-2p_2}{3} \leq r_2 - c_2 < (h_2 + p_2)\frac{r_1-c_1+p_1}{h_1+p_1} + \frac{2h_2-p_2}{3};$
(i) $\frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}, (h_2 + p_2)\frac{r_1-c_1+p_1}{h_1+p_1} + \frac{2h_2-p_2}{3} \leq r_2 - c_2 < h_2;$
(j) $\frac{1}{3}\sqrt{5p_1(h_1 + p_1)} - p_1 \leq r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}, r_2 - c_2 \geq h_2;$
(k) $\frac{h_1-2p_1}{3} \leq r_1 - c_1 < \frac{2h_1-p_1}{3}, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2;$
(l) $\frac{2h_1-p_1}{3} \leq r_1 - c_1 < h_1, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2;$
(m) $r_1 - c_1 \geq h_1, 0 \leq r_2 - c_2 < \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2;$
(n) $\frac{h_1-2p_1}{3} \leq r_1 - c_1 < (h_1 + p_1)\frac{r_2-c_2+p_2}{h_2+p_2} + \frac{2h_1-p_1}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3};$
(o) $(h_1 + p_1)\frac{r_2-c_2+p_2}{h_2+p_2} + \frac{2h_1-p_1}{3} \leq r_1 - c_1 < h_1, \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3};$
(p) $r_1 - c_1 \geq h_1, \frac{1}{3}\sqrt{5p_2(h_2 + p_2)} - p_2 \leq r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3};$
(q) $r_i - c_i \geq \frac{h_i-2p_i}{3}, i = 1, 2.$

このとき平衡結果(z_1^*, z_2^*)は次のようになる：

(a) $(0,0)$; (b) $(0,k_2)$; (c) $(0,\frac{1}{2})$; (d) $(0,k_2-\frac{1}{2})$; (e) $(0,1)$; (f) $(k_1,0)$; (g) (k_1,k_2); (h) $(k_1,\frac{1}{2})$; (i) $(k_1,k_2-k_1-\frac{1}{2})$; (j) $(k_1,1-k_1)$; (k) $(\frac{1}{2},0)$; (l) $(k_1-\frac{1}{2},0)$; (m) $(1,0)$; (n) $(\frac{1}{2},k_2)$; (o) $(k_1-k_2-\frac{1}{2},k_2)$; (p) $(1-k_2,k_2)$; (q) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

最適発注量z_i^*と最適停止時刻T_i^*との間には$z_i^* = 0$のとき$T_i^* = 0$、$z_i^* > 0$のとき$T_i^* = \frac{3}{2}t$という関係をもつ。すなわち、上の結果において$z_i^* = 0$のときには営業を行わないことが最適であり、もし営業するのであれば、客が訪れる可能性をもつ最後の時刻$\frac{3}{2}t$まで店を開けておくことが最適である。$T_i^* = 0$となるのは単位製品当たりの利得$r_i - c_i$が非常に少ない時である。言うまでもなく、プレーヤは相手が店を開いていない時には開いている時よりも多くの量を発注することになる。また両プレーヤが開店している時の結果は4節のモデルの結果と一致している。

6.まとめ

本稿では様々な仮定の下での一期間競合的在庫モデルを扱った。数値例において客の出発時刻をランダム化したモデルでは基本モデルより$\frac{1}{2}$に近い値をとっている。確率的な要因を含む場合、一様分布に従うのであれば、一番単純な解に落ち着く傾向にあると言える。客が購入をあきらめる可能性を持つモデルでは、そうでないモデルにおいて$\frac{1}{2}$以上発注している最適発注量に限り、その量より少なめに発注することがわかった。また、追加注文を許されたプレーヤはその利点を十分活かした行動をとり、相手プレーヤはその行動の影響を受けて発注量を決定しなければならなくなる。停止時刻を考慮したならば、利得が少ない時には営業を行わないことが最適であり、店を開くのであれば特別なモデルの結果と一致することを示せた。

[1] Bryant, J. (1980). Competitive equilibrium with price setting firms and stochastic demand. International Economic Review **21**, 619-626.

[2] Dresher, M. (1954). Games of strategy. Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[3] Harris, F. (1913). How Many Parts to Make at Once, Factory. The Magazine of Management **10**, 135-136,152.

[4] Hohjo, H., Y. Teraoka (1998). On a competitive inventory model with the random starting time, Proceeding of the 1st Korea-Japan Joint Conference on Industrial Engineering and Management Preprints, Korea, 272-275.

[5] Hohjo, H. (1999). A competitive inventory model with reallocation under uniform demand distribution. Mathematica Japonica **49**, 51-64.

[6] Hohjo, H., Y. Teraoka (2000). On a competitive inventory model with a customer's choice probability. Journal of the Operations Research Society of Japan **43**, 355-364.

[7] Hohjo, H. (2001). On a competitive inventory model with the customer's general choice probability. Computers & Mathematics with Application **41**, 523-530.

[8] Hohjo, H., Y. Teraoka (2001). A duopolistic inventory problem with possibility giving up purchase. Scientiae Mathematicae Japonicae **e5**, 273-279.

[9] Hohjo, H., Y. Teraoka. A competitive inventory model with reallocation on a plane market, Mathematical and Computer Modelling, (to appear).

[10] Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. Economic Journal **39**, 41-57.

[11] Huff, D.L. (1964). Defining and Estimating a Trading Area. Journal of Marketing **28**, 34-38.

[12] Kirman, A., M. Sobel (1974). Dynamic oligopoly with inventories. Econometrica **42**, 279-287.

[13] Kodama, M. (1996). The basis of Production and Inventory Control Systems (in Japanese), Kyushu University Press, Japan.

[14] Levitan, R., and M. Shubik (1971). Price variation duopoly with differentiated products and random demand. Journal of Economic Theory **3**, 23-39.

[15] Lippman, S.A., and K.F. McCardle (1997). The Competitive newsboy. Operations Research **45**, 54-64.

[16] Nakanishi, M. (1983). The Theory and Measurement of the Retailer Attraction (in Japanese), Chikura Publishing Company, Japan.

[17] Parlar, M., S.K. Goyal (1984). Optimal ordering decisions for two substitutable products with stochastic demands. Opsearch **21**, 1-15.

[18] Parlar, M. (1988). Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands. Narval Research Logistics **35**, 397-409.

[19] Sorai, M., I. Arizono, and H. Ohta (1986). A solution of single period inventory model with partial returns and additional orders. Journal of Japan Industrial Management Association **37**, 100-105, (in Japanese).

[20] Topkis, D.M. (1979). Equilibrium points in nonzero-sum n-person submodular games. SLAM J. Control and Optimization **17**, 773-787.

[21] Wilson, R. (1934). A scientific routine for stock control. Harvard Business Review **13**, 116-128.