

## $f$ 平面浅水系におけるジェット流の不安定擾乱について

京大・理・地球物理 杉本 憲彦 (Norihiko Sugimoto)

京大・理・地球物理 余田 成男 (Shigeo Yoden)

Department of Geophysics, Kyoto University

### 1. はじめに

地球大気の大規模運動では、気圧傾度力とコリオリ力の釣り合った地衡流関係が第1近似的に成り立っている。このことから、準地衡方程式で記述できる近似世界は現実大気のサブセットをなしており、非平衡状態からの時間発展は、この近似世界に引き寄せられる過程であると考え得る。Lorenz(1980)はこのような近似世界をスローマニフォールドと呼び、低次モデルを用いてその概念を提示した。回転・成層流体を扱う気象力学や海洋力学において、スローマニフォールドの概念は重要である (Ford et al.,2000)。まず、これらの系の渦流運動 (順圧不安定, ロスビー波等) の理論的知識はすべて、実質的にこの概念を基礎に組み立てられている。また、この概念が妥当な状況では、より小さな自由度の位相空間でもとの複雑な系を扱えるのみならず、プリミティブ方程式系で記述される運動では複雑に絡まりあっていた力学過程を、ゆっくりした渦流運動とそれ以外の運動に分離できる。これにより、流体力学の中心問題である非線形移流問題を、ポテンシャル渦度の移流という最も簡略化した観点で取り扱うことができるようになる。また、ポテンシャル渦度の逆問題を解くことにより、もとの系の流れを近似世界からユニークに求めることができる。それゆえ、これらの概念の妥当性及び限界を調べることは地球流体力学の重要な課題の一つである。

$f$  平面浅水系は、地衡流成分 (渦流運動) と非地衡流成分の両方を含む最も簡単な方程式系であり、この概念の本質を調べるのに適している。Gent and McWilliams(1983) は、幅広いパラメータ領域で浅水系の準地衡近似の妥当性を、スケール解析によって調べた。Spall and McWilliams(1992) は、浅水系において傾度風平衡にある乱雑な初期状態からの時間発展を求め、広範なロスビー数、フルード数に対して、平衡状態の存在の有無を明らかにした。また、Ford et al.(2000) は球面浅水系において、渦流運動が卓越する領域からの重力波放射を調べ、厳密な意味でのスローマニフォールドが存在しないことを指摘している。一方、McIntyre and Norton(2000) は球面浅水系において、ポテンシャル渦度の逆問題を解いて得られる近似系の流れと、近似しないもとの系の流れを比較し、いくつかの場合について、高ロスビー数、高フルード数であっても、両系の流れがよく似ていることを示した。

一方、平行流の順圧不安定の研究は、静止系 (Rayleigh,1880) 及び、回転系 (Kuo,1949) で不安定の必要条件が導かれ、以降数多くの研究がなされてきた。浅水系におけるシア流の不安定に関する研究では、非線形段階での重力波放射過程を解析したもの (Ford,1994) や、線形安定性解析により重力波の不安定モードを調べたもの (Balmforth,1999) がある。また、ジェット流の不安定に関する研究には、現実世界的な興味でポーラーフロントの安定性 (Orlanski,1968) や黒潮の安定性 (Kubokawa,1985) を調

べたものなど数多くある。しかし、これらの研究は、主に不安定の生じる条件に着目したもので、不安定擾乱の空間構造に着目したものはない。

以上の背景をふまえ、本研究では、浅水系でのジェット流の不安定性について、広範なパラメータ領域で線形解析を行った。水面変位が可能な浅水系では、地衡流平衡にあるジェット流はジェット流軸に関して非対称な水面変位を有する。本研究では特に、この基本場の非対称性に起因する、不安定擾乱の空間構造の対称性に着目し、ジェット流軸に関して対称な世界である準地衡系との対比を、ロスビー数とフルード数で張られる2次元パラメータ空間で行った。

## 2. 基礎方程式系

無次元化した  $f$  平面上の浅水方程式系を次に示す。従属変数  $(u, v, \eta)$  はそれぞれ、水平速度の東西 ( $x$ ) 成分、南北 ( $y$ ) 成分、および水面変位である：

$$Ro_T \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + Ro \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) - v^* = -\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*}, \quad (1)$$

$$Ro_T \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + Ro \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + u^* = -\frac{\partial \eta^*}{\partial y^*}, \quad (2)$$

$$Ro_T \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + Ro \left( u^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \right) = -\left( \frac{Ro^2}{Fr^2} + Ro\eta^* \right) \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right), \quad (3)$$

$$Ro_T \equiv \frac{1}{fT}, \quad Ro \equiv \frac{U}{fL}, \quad Fr \equiv \frac{U}{\sqrt{gH_0}}. \quad (4)$$

ここで、\* のついた変数は無次元変数であり、外部パラメータ  $f, g, H_0$  はコリオリパラメータ、重力加速度、平均水深である。無次元化では  $T, U, L$  をそれぞれ、時間、流速、長さの特徴的スケールとして用いている。  $Ro_T, Ro, Fr$  はそれぞれ、時間ロスビー数、ロスビー数、フルード数であり、これらのスケールリングファクタで定義した無次元パラメータである。また、地衡流平衡 ( $Ro_T \ll 1, Ro \ll 1$ ) にある水面変位のスケールは、  $A = fLU/g$  になる。

(1)~(3) において、  $Ro \ll 1$  の仮定のもと、従属変数を  $Ro$  の中で展開し、それぞれのオーダーでの力学を考えることにより、次の準地衡近似渦度方程式が導出される：

$$\left( \frac{\partial}{\partial t^*} + \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial y^*} - \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \left( \Delta_H \eta^* - \frac{Ro^2}{Fr^2} \eta^* \right) = 0. \quad (5)$$

ここで、  $\Delta_H$  は水平方向のラプラシアンである。

3変数  $(u^*, v^*, \eta^*)$  の浅水系 (1)~(3) は、準地衡近似により1変数  $\eta^*$  のみの (5) 式で記述され、重力波成分は除去される。また、流れ  $u^*, v^*$  は (5) の解  $\eta^*$  が定まれば、地衡流平衡からユニークに与えられる。

## 3. 線形安定性解析の方法

### 3.1 基本場

考える領域として、東西方向に無限大、南北方向に周期境界の矩形領域を設定する。また、順圧不安定なジェットの南北構造として次を仮定する (Hartmann, 1983):

$$\bar{u}(y) = u_0 \operatorname{sech} \left\{ \frac{2(y - y_0)}{B} \right\}. \quad (6)$$

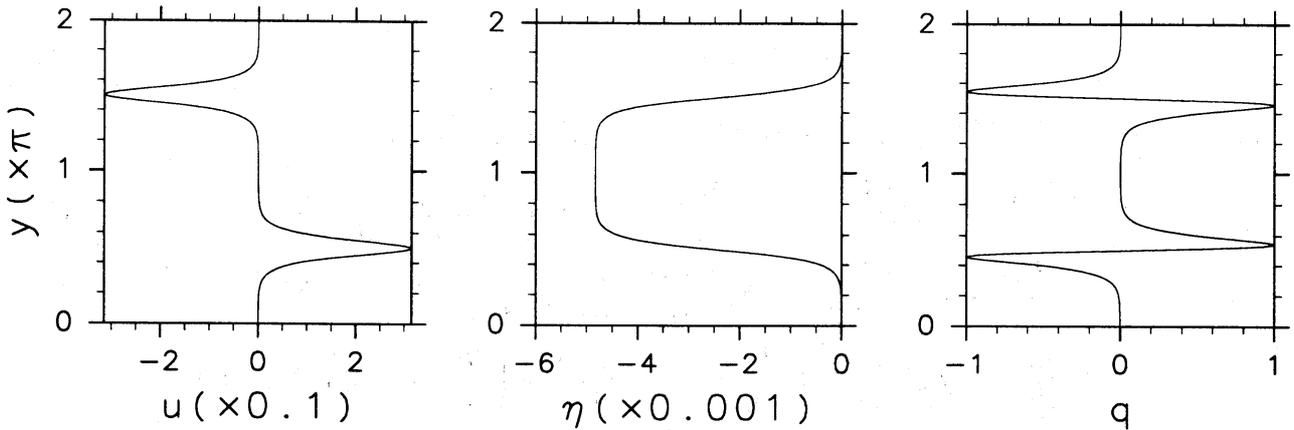


図 1: 基本場のジェット南北構造 ( $Ro = 1, Fr = 0.33$  の場合). (左) 速度  $\bar{u}$ , (中) 水面変位  $\bar{\eta}$ , (右) 渦度  $\bar{q}$ .

ここで,  $u_0, B, y_0$  はそれぞれ, ジェットの強さ, 幅, 中心位置を与えるパラメータである. また, このジェットと地衡流平衡にある水面変位は次で与えられる:

$$\bar{\eta}(y) = -\frac{fBu_0}{g} \arctan \left\{ \exp \left( \frac{2(y-y_0)}{B} \right) \right\}. \quad (7)$$

この基本場のジェットの幅  $B$  と強さ  $u_0$  使って,  $Ro$  数と  $Fr$  数を, 次のように再定義する:

$$Ro \equiv \frac{u_0}{fB}, \quad Fr \equiv \frac{u_0}{\sqrt{gH_0}}. \quad (8)$$

例えば,  $f = 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ,  $g = 10 \text{ms}^{-2}$ , 幅 1000km, 強さ  $100 \text{ms}^{-1}$ , 深さ 9km のジェットでは,  $Ro = 1, Fr = 0.33$  である. ここで,  $f, g, B$  を固定すると,  $Ro$  数は  $u_0$  に比例しており,  $Ro$  数を固定しての  $Fr$  数は  $\sqrt{H_0}$  に反比例する.

図 1 は基本場のジェットの速度  $\bar{u}$ , 水面変位  $\bar{\eta}$ , 渦度  $\bar{q}$  を  $Ro = 1, Fr = 0.33$  の場合について描いたものである. 周期境界条件を満たすように,  $y = \pi/2, 3\pi/2$  に逆方向に流れるジェットがある.  $\bar{u}$  はジェットの中心に対して南北対称であるが, これと地衡流平衡にある  $\bar{\eta}$  は反対称である. すなわち,  $y = \pi$  側の水深が浅く,  $y = 0, 2\pi$  側の水深が深い. また,  $\bar{q}$  でみるとその  $y$  微分が符号を変え, 不安定の必要条件であるレイリー-クオの条件を満たしていることがわかる.

### 3.2 線形化と固有値解析

(1)~(3) の浅水系からはじめる. 無次元化された従属変数 ( $u^*, v^*, \eta^*$ ) について, (6), (7) を無次元化した基本場  $\bar{u}, \bar{\eta}$  とそこからのずれ ( $u', v', \eta'$ ) に分ける. これらを (1)~(3) に代入し, 線形化した擾乱の方程式を次に示す. ただし, これより無次元変数の \* は省略することとする.

$$Ro_T \frac{\partial u'}{\partial t} + Ro\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + Ro v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - v' = -\frac{\partial \eta'}{\partial x}, \quad (9)$$

$$Ro_T \frac{\partial v'}{\partial t} + Ro\bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + u' = -\frac{\partial \eta'}{\partial y}, \quad (10)$$

$$Ro_T \frac{\partial \eta'}{\partial t} + Ro\bar{u} \frac{\partial \eta'}{\partial x} + Ro v' \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = -\left( \frac{Ro^2}{Fr^2} + Ro\bar{\eta} \right) \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (11)$$

水平速度 ( $u', v'$ ) を流線関数  $\psi'$ , 速度ポテンシャル  $\phi'$  を用いて,

$$u' = -\frac{\partial\psi'}{\partial y} + \frac{\partial\phi'}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x} + \frac{\partial\phi'}{\partial y}, \quad (12)$$

と表して, これらを使って ( $\psi', \phi', \eta'$ ) の線形化した浅水系に書き換える:

$$Ro_T \frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} + Ro\bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial x} - Ro \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \nabla^2 \phi' - Ro \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) + \nabla^2 \phi' = 0, \quad (13)$$

$$Ro_T \frac{\partial \nabla^2 \phi'}{\partial t} + Ro\bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \phi'}{\partial x} - 2Ro \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) - \nabla^2 \psi' + \nabla^2 \eta' = 0, \quad (14)$$

$$Ro_T \frac{\partial \eta'}{\partial t} + Ro\bar{u} \frac{\partial \eta'}{\partial x} + Ro \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) + \left( \frac{Ro^2}{Fr^2} + Ro\bar{\eta} \right) \nabla^2 \phi' = 0. \quad (15)$$

次に擾乱として波数  $k$  の波形解  $\{\psi', \phi', \eta'\}(x, y, t) = Re\{[\Psi(y), \Phi(y), H(y)]e^{ik(x-ct)}\}$  を考え, これらを (13)~(15) に代入する. ここで波数とは, 南北方向の周期  $2\pi$  あたりに含まれる東西方向の波の数である. 得られた式を各波数  $k$  について解き, 固有値  $c = c_r + ic_i$  を求めることにより, その擾乱の位相速度  $c_r$  と発達率  $kc_i$  が求まる.

本研究では  $y$  方向には 256 層に差分化し, 行列の固有値問題として, QR 法により固有値と固有関数を求めた. また, 準地衡系においても同様の線形安定性解析を行った.

## 4. 結果

### 4.1 準地衡系との比較

擾乱の発達率と位相速度の波数依存性を調べた結果を,  $Ro = 1, Fr = 0.33$  の場合について, 図 2 に

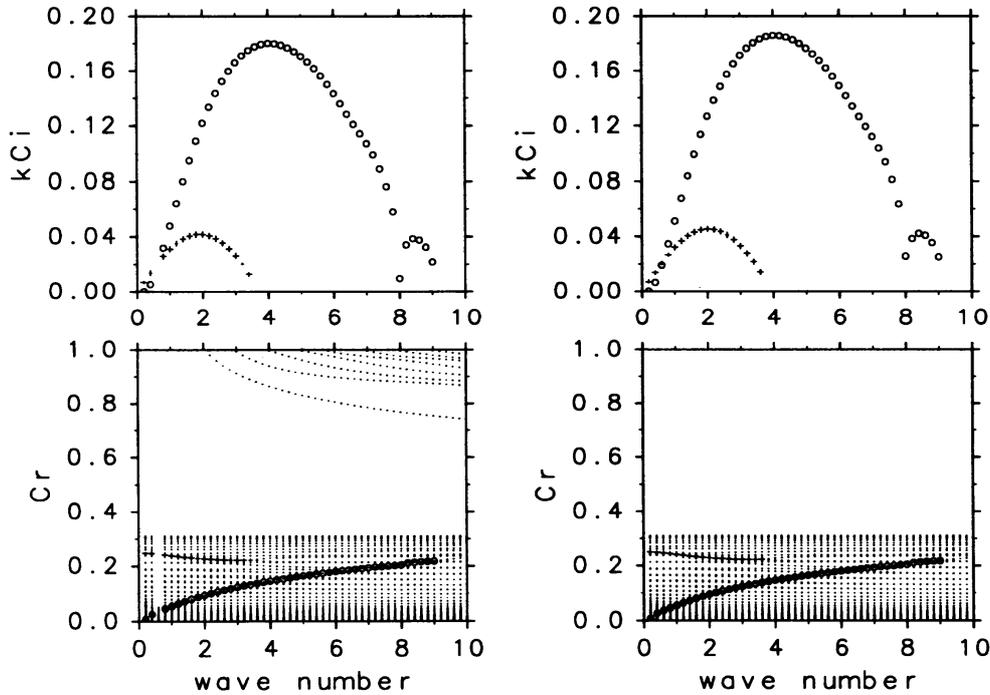


図 2: 発達率 (上) と位相速度 (下) の波数依存性 ( $Ro = 1, Fr = 0.33$  の場合). 浅水系 (左), 準地衡系 (右). ○印は不安定第 1 モード, +印は第 2 モード, ・印は中立モードを表す.

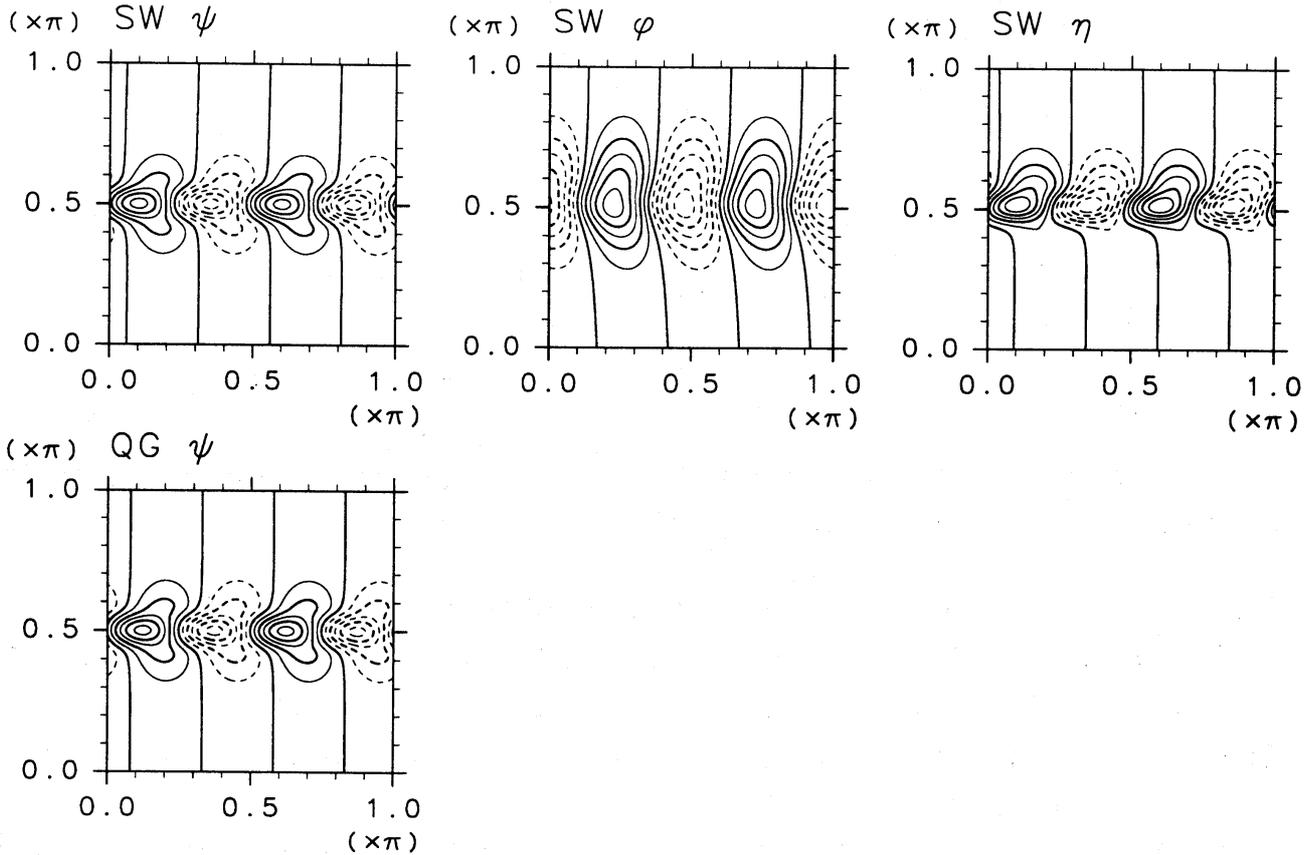


図 3: 最大発達率を持つ第 1 モードの波数 4 の固有関数. 全領域の  $1/4$  のみ示す. ジェットは  $\pi/2$  を中心に東向きに流れている. 上段が浅水系の  $\psi'$  (左:コンタ間隔  $5 \times 10^{-2}$ ),  $\phi'$  (中:コンタ間隔  $1.2 \times 10^{-3}$ ),  $\eta'$  (右:コンタ間隔  $5 \times 10^{-4}$ ) であり, 下段が準地衡系の  $\psi'$  (左下:コンタ間隔  $5 \times 10^{-2}$ ) である.

示す. 左側が浅水系, 右側が準地衡系の結果である. 浅水系, 準地衡系ともに, 波数 4 付近で最大発達率を持つモード (第 1 モード, ○印) と, 波数 2 付近で最大発達率を持つモード (第 2 モード, +印) の二つのモードが存在する. 発達率の差はいずれも 5% 以下であり, これらのパラメータ値では浅水系の準地衡近似が妥当であることがわかる. 第 1 モードの最大発達率は第 2 モードの最大発達率に比べ約 4 倍大きく, 各波数に同じ大きさの擾乱を与えれば, 波数 4 の第 1 モードが卓越することが予想される. 位相速度をみると, 第 2 モードの不安定は波数 4 付近で, 第 1 モードの不安定は波数 9 付近で, それぞれ分岐を起こし中立 (・印) 化することがわかる. 浅水系の結果で位相速度の大きいところに見えるのは中立の慣性重力波で, この系特有のモードであり, 準地衡系には存在しない.

次に, 先のパラメータ ( $Ro = 1, Fr = 0.33$ ) において最大発達率を持つ第 1 モードの波数 4 の固有関数を浅水系 ( $kc_i = 0.1801$ ) 及び, 準地衡系 ( $kc_i = 0.1859$ ) で求めた結果を示す (図 3). 浅水系では,  $\psi'$  成分はおよそジェットの中心に対して南北に折り返し対称な構造を持つが, 特に  $\phi', \eta'$  成分では水面の浅い側 (ジェットの北側) で振幅が大きく, ジェットの中心に対して南北に非対称性が存在する. このような非対称性は,  $\psi'$  成分のみで記述される準地衡系には存在せず, ジェットの中心に対して完全な対称性を持っている. このような浅水系に特有の非対称性は, ジェットと地衡流平衡にある基本場の水面変位が南北に反対称なためである. 一方, 準地衡系では, このような水面変位が存在しないため,

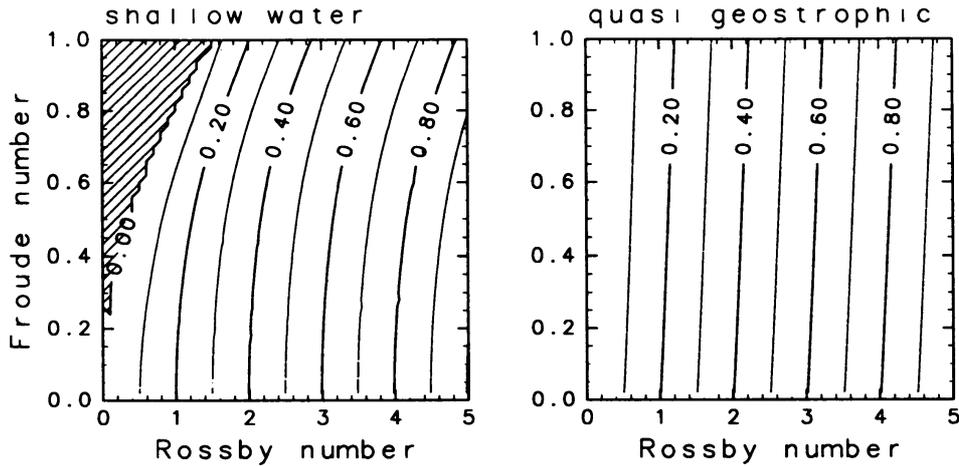


図 4: 不安定擾乱の最大発達率の  $Ro$  数,  $Fr$  数依存性. 浅水系 (左), 準地衡系 (右). 浅水系の斜線部は基本場の水面がゼロ以下のため意味をなさない領域.

非対称性も存在しない. 振幅で見ると, 浅水系では  $\psi'$  成分の振幅が  $\phi'$  成分に比べ 1 桁以上大きい. すなわち,  $\psi'$  成分が支配的で, 流れは準地衡的である. 位相で見ると,  $\psi', \eta'$  が同位相であるのに対して,  $\phi'$  成分は  $1/4$  周期ずれている. 収束発散の符号より, この  $\phi'$  はジェットの流れの方向へ  $\eta'$  の位相を伝播させることがわかる. また,  $\eta'$  と  $\psi'$  が同位相であることから, これらが常に地衡流平衡を保ちながら, ジェットの下流に流れることがわかる.

準地衡近似の妥当なパラメータ領域を調べるため, 最大発達率及び最大発達波数の  $Ro$  数 ( $0 \leq Ro \leq 5$ ) 及び  $Fr$  数 ( $0 \leq Fr \leq 1$ ) 数依存性を, 浅水系及び準地衡系でそれぞれ調べた (図 4). 両系において, 最大発達波数はこのパラメータ領域でほぼ 4 であったため, 図には示していない. 最大発達率は主に  $Ro$  数に比例し,  $Ro$  数が大きくなるほど増加する. 同じ  $Ro$  数では  $Fr$  数が大きくなるほど最大発達率は減少する. しかし, その減少の割合は浅水系では高  $Fr$  数で大きくなるのに対し, 準地衡系では一定の割合である. これらの  $Ro$  数,  $Fr$  数依存性は次のように解釈できる. すなわち,  $Ro$  数はジェットの強さに比例するため, 高  $Ro$  数ほどジェットが強く発達率が大きい. また,  $Fr$  数はジェットの水深の平方根に反比例するため, 高  $Fr$  数ほどジェットのエネルギーが小さく発達率も小さい. 以上の結果は, 高  $Fr$  数では, 準地衡近似が最大発達率に大きな違いをもたらすことを示している. しかし, 高  $Ro$  数であっても, 低  $Fr$  数であれば, 最大発達率においては, 準地衡近似が妥当であることがわかる.

#### 4.2 対称性のパラメータ依存性

図 3 で示した固有関数のジェットの中心に対する非対称性のパラメータ依存性を調べた. 図 5 は最大発達する波数 4 の第 1 モードについて,  $\phi'$  成分の  $Ro$  数 ( $0.05 \leq Ro \leq 10$ ) 依存性及び  $Fr$  数 ( $0.01 \leq Fr \leq 0.33$ ) 依存性を示したものである.

まず,  $Fr$  数依存性 (縦方向変化) についてみると,  $Fr$  数の変化に対して固有関数の対称性に変化はほとんどみられない. 一方, 振幅で見ると,  $Fr$  数が約  $1/3$  になるごとに  $\phi'$  成分の振幅は約 1 桁ずつ減少している. 例えば  $Ro = 1$  で  $Fr$  数を 0.33, 0.1, 0.03, 0.01, と減少させると,  $\phi'$  の振幅は  $1.2 \times 10^{-3}, 1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-6}$ , となる. この結果は,  $Fr$  数の減少とともに  $\phi'$  成分がゼロに近づくことを示しており, このような振幅の減少が  $\psi', \eta'$  成分には見えないことから, 2次元非発散近似の世界に近づいていくと考えられる.

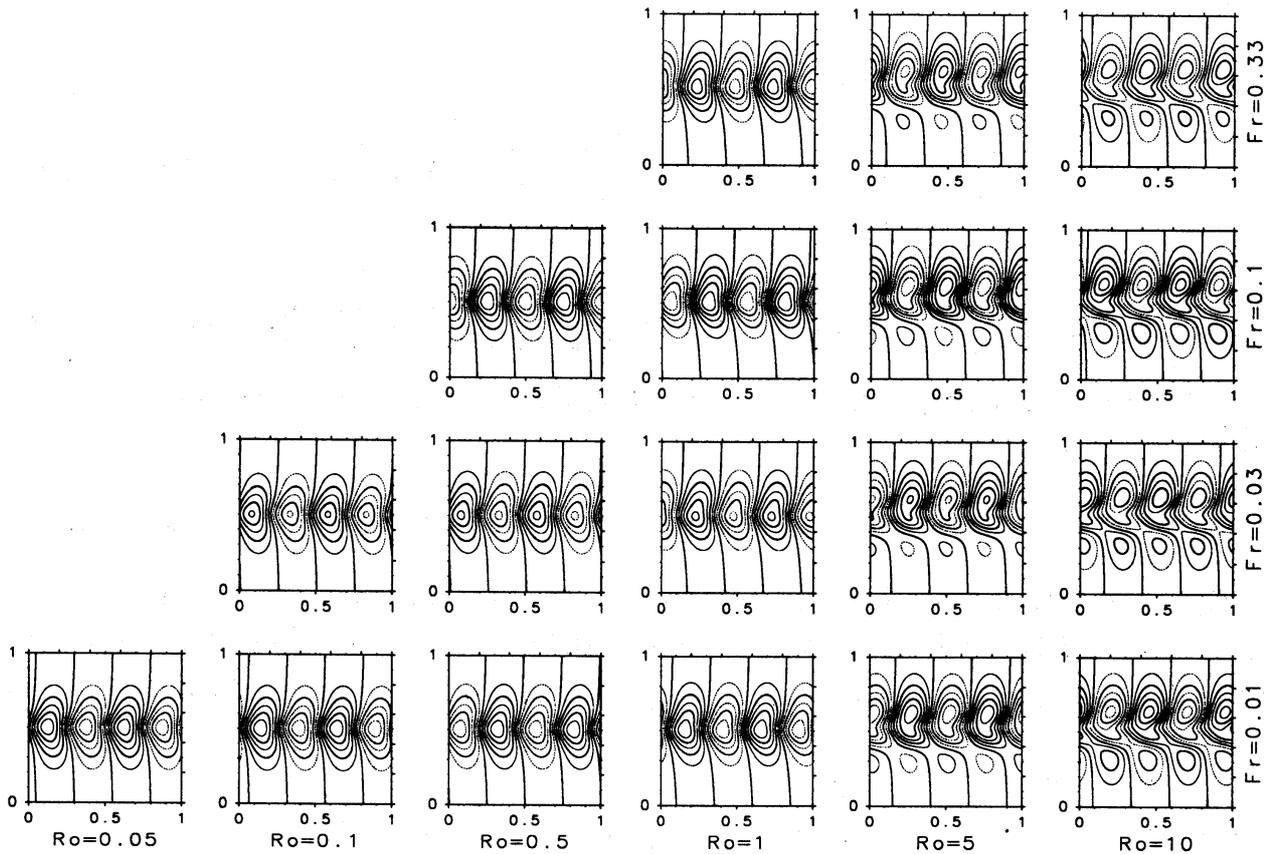


図 5:  $\phi'$  の  $Ro$  数 (横軸),  $Fr$  数 (縦軸) 依存性. 左から順に  $Ro = 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 10$ , 上から順に  $Fr = 0.33, 0.1, 0.03, 0.01$ .

次に,  $Ro$  数依存性 (横方向変化) をみる. 低  $Ro$  数 ( $Ro = 0.05$ ) では, ジェットの中心に対して折り返し対称な準地衡近似の固有関数とおよそ一致する. しかし,  $Ro$  数の増加とともに, ジェットの中心に対して反対称なモードが卓越し, 高  $Ro$  数 ( $Ro = 10$ ) ではジェットの中心に対して反対称な固有関数が支配的である. この結果は,  $Ro$  数の減少とともに対称性が強くなることを示しており, 準地衡近似の世界に近づいていくと考えられる.

## 5. 考察

### 5.1 対称性の $Ro$ 数依存性

4.2 節で示した固有関数の対称性のパラメータ依存性について議論を行う.  $(\psi', \phi', \eta')$  の擾乱について, 線形化した方程式系 (13)~(15) からはじめる. まず, 擾乱の各変数について, ジェットの中心に対して折り返し対称成分  $\circ_s$  と折り返し反対称成分  $\circ_a$  にわけ, それぞれの成分について, スケーリングファクタと無次元数の積で,  $\{\psi', \phi', \eta'\} = \{\epsilon_s \psi_s, \delta_s \phi_s, \sigma_s \eta_s\} + \{\epsilon_a \psi_a, \delta_a \phi_a, \sigma_a \eta_a\}$  と表す. ここで, 添字のついた変数は  $O(1)$  でそろっている. 基本場のジェットの流れは中心に対して折り返し対称であるのに対して, 地衡流平衡にある水面変位は折り返し反対称であることに注意する. すなわち,  $\bar{u} = \bar{u}_s, \bar{\eta} = \bar{\eta}_a$  である. これらを, (13)~(15) に代入し, 対称性によって方程式を分離する.

まず、渦度方程式 (13) についてみる。

$$\begin{aligned} \text{対称成分: } \quad Ro_T \epsilon_s \frac{\partial \nabla^2 \psi_s}{\partial t} = \\ -Ro \epsilon_s \bar{u}_s \frac{\partial \nabla^2 \psi_s}{\partial x} + Ro \delta_a \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial y} \nabla^2 \phi_a + Ro \epsilon_s \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} + Ro \delta_a \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_a}{\partial y} - \delta_s \nabla^2 \phi_s, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{反対称成分: } \quad Ro_T \epsilon_a \frac{\partial \nabla^2 \psi_a}{\partial t} = \\ -Ro \epsilon_a \bar{u}_s \frac{\partial \nabla^2 \psi_a}{\partial x} + Ro \delta_s \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial y} \nabla^2 \phi_s + Ro \epsilon_a \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_a}{\partial x} + Ro \delta_s \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial y^2} \frac{\partial \phi_s}{\partial y} - \delta_a \nabla^2 \phi_a. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、次のように、 $y$  微分によって対称性及び反対称性が反転すること、及び対称性が掛け算によって変化することを考慮している：

$$\frac{\partial A_s}{\partial y} = B_a, \quad \frac{\partial A_a}{\partial y} = B_s, \quad A_s \times B_s = C_s, \quad A_s \times B_a = C_a, \quad A_a \times B_a = C_s.$$

(16),(17) の結果より、渦流運動成分の対称性の議論において  $Fr$  数依存性がないことがわかる。

調べたパラメータ範囲では、図 3 の第 1 モードの固有関数からわかるように、 $\psi'$  の対称成分  $\psi'_s$  の振幅が反対称成分  $\psi'_a$  や発散成分  $\phi'_s, \phi'_a$  より大きく、 $\eta'$  の対称成分  $\eta'_s$  が反対称成分  $\eta'_a$  より大きい：

$$\epsilon_s \gg \epsilon_a, \delta_s, \delta_a, \quad \sigma_s \gg \sigma_a. \quad (18)$$

これらを使って、(16),(17) において卓越する項を取り出すと次になる：

$$\text{対称成分: } \quad Ro_T \epsilon_s \frac{\partial \nabla^2 \psi_s}{\partial t} = -Ro \epsilon_s \bar{u}_s \frac{\partial \nabla^2 \psi_s}{\partial x} + Ro \epsilon_s \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_s}{\partial x}, \quad (19)$$

$$\text{反対称成分: } \quad Ro_T \epsilon_a \frac{\partial \nabla^2 \psi_a}{\partial t} = 0. \quad (20)$$

ただし、時間変化に対する各成分の影響をみるために、時間微分項は残している。これらの結果は、 $\psi'$  の擾乱では、反対称性を持つ項の生成が小さく、基本的に対称成分だけで閉じていることを示している。(19) より  $\psi'$  の対称性に  $Ro$  数依存性がないことがわかり、線形安定性解析で得られた  $\psi'$  の対称な固有関数の結果を説明することができる。

発散方程式も同様に考えることができ、(18) のオーダーを考える場合、次を得る：

$$\text{対称成分: } \quad Ro_T \delta_s \frac{\partial \nabla^2 \phi_s}{\partial t} = \underbrace{\epsilon_s \nabla^2 \psi_s}_{(X)} - \frac{g \sigma_s}{f} \nabla^2 \eta_s, \quad (21)$$

$$\text{反対称成分: } \quad Ro_T \delta_a \frac{\partial \nabla^2 \phi_a}{\partial t} = \underbrace{Ro \epsilon_s 2 \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2}}_{(Y)}. \quad (22)$$

これらの結果は、速度ポテンシャルの対称成分  $\phi'_s$  及び反対称成分  $\phi'_a$  が、流線関数の対称成分  $\psi'_s$  の項 (X), (Y) によってそれぞれ生成されることを表している。これらの (X), (Y) の項の係数には、反対称成分  $\phi'_a$  をつくる項 (Y) にのみ  $Ro$  数がかかっており、先の固有関数の対称性に対する  $Ro$  数依存性が次のように説明できる。すなわち、低  $Ro$  数では、(X)  $\gg$  (Y) であり、(21) 式が支配的となり対称性が強まる。一方、高  $Ro$  数では、(X)  $\ll$  (Y) であり、(22) 式が支配的となり反対称性が強まる。 $Ro$  数

の変化は,  $Ro = u_0/fB$  より, ジェットの強さ  $u_0$  の変化に対応する. また, ジェットの強さの変化は,  $A = fBu_0/g$  より, 水面変位  $A$  の大きさの変化に対応する. すなわち, 高  $Ro$  数ではジェットが強いため, 地衡流平衡にある水面変位のジェットの南北における差が大きくなる. この水面変位の南北差の大きさこそが, 不安定擾乱の反対称性を強くしている原因となっている.

## 5.2 振幅の $Fr$ 数依存性

$Fr$  数の変化に対して,  $\psi', \eta'$  成分の振幅は変化せず,  $\phi'$  成分のみ振幅が変化した. これは次のように説明できる. (15) 式の第 4 項において,  $Fr$  数が小さくなると,  $Ro^2/Fr^2$  の項が大きくなる. 同じ  $\eta'$  の時間変化をつくりだすためには, 水平発散  $\nabla^2\phi'$  が小さくならなければならない,  $\phi'$  成分の振幅が減少する.  $Fr$  数の変化は,  $Fr = u_0/\sqrt{gH_0}$  より, 平均水深  $H_0$  の変化に対応する. すなわち, 低  $Fr$  数では平均水深が大きいため, 収束発散により擾乱の水面変位をつくるのが困難になり, 発散成分  $\phi'$  が小さくなる.

## 6. まとめ

本研究では  $f$  平面浅水系においてジェット流の線形安定性解析を行い, 準地衡系との比較を幅広い無次元化パラメータ領域 ( $0 \leq Ro \leq 10, 0 \leq Fr \leq 1$ ) で行った. その結果, 最大発達率では, 浅水系の準地衡近似は, 高  $Fr$  数で大きな違いをもたらすことがわかった. ただし, 高  $Ro$  数であっても, 低  $Fr$  数では準地衡近似が妥当である. 一方, 最大発達する不安定擾乱の空間構造では, 回転成分  $\psi'$  と発散成分  $\phi'$  の振幅比が,  $Fr$  数に依存し,  $Fr$  数の減少とともに発散成分  $\phi'$  の振幅が減少することがわかった. また, 準地衡近似ではジェットの中心に対して不安定擾乱の構造の対称性が存在するが, 浅水系ではジェットと地衡流平衡にある水面変位の南北非対称性によって, 擾乱の対称性が破れることがわかった. この対称性の破れの程度は,  $Ro$  数に依存し,  $Ro$  数の増加とともに  $\phi'$  成分の反対称性が強くなる.

これらの結果は, 線形化した方程式系を用いて解釈が可能である. まず, 振幅比の  $Fr$  数依存性については, 連続方程式により解釈できる.  $Fr$  数は平均水深の平方根に反比例することから, 低  $Fr$  数では平均水深が大きいため, 収束発散により擾乱の水面変位をつくるのが困難になり, 発散成分の振幅が減少する. また, ジェットの中心に対する対称性の  $Ro$  数依存性は, 擾乱に対する線形化した方程式系を対称成分と反対称成分に分離することで解釈できる.  $Ro$  数はジェットの強さ, すなわち地衡流平衡にある水面変位の南北差に比例することから, 発散成分の反対称性は基本場の水面変位の南北差に起因するものであるといえる.

## 謝辞

数値実験は京都大学大型計算機センター VPP800 を用いておこなった. また, 作図には地球流体電脳ライブラリを用いた.

## 参考文献

Balmforth, N. J., 1999: Shear instability in shallow water. *J. Fluid Mech.*, **387**, 97–127.

- Ford, R., 1994: Gravity wave radiation from vortex trains in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, **281**, 81-118.
- Ford, R., M. E. McIntyre, and W. A. Norton, 2000: Balance and the slow quasimanifold: some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1236-1254.
- Gent, P., and J. C. McWilliams, 1983: Regimes of validity for balanced models. *Dyn. Atmos. Oceans*, **7**, 167-183.
- Hartmann, D. L., 1983: Barotropic instability of the polar night jet stream. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 817-835.
- Kubokawa, A., 1985: Instability of a geostrophic front and its energetics. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **33**, 223-257.
- Kuo, H. L., 1949: Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Met.*, **6**, 105-122.
- Lorenz, E. N., 1980: Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1685-1699.
- McIntyre, M. E., and W. A. Norton, 2000: Potential vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1214-1235.
- Orlanski, I., 1968: Instability of frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **25**, 178-200.
- Rayleigh, J. W. S., 1880: On the stability, or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11**, 57-70.
- Spall, M. A., and J. C. McWilliams, 1992: Rotational and gravitational influences on the degree of balance in the shallow-water equations. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.*, **64**, 1-29.