数理解析研究所講究録 1280 巻 2002 年 79-84

Painlevé Circuit

神戸大学 自然科学研究科　木村　欣司 (Kinji Kimura)
Graduate School of Science and Technology,
Kobe Univ.

1　q 差分 Painlevé-3 方程式 I

離散 Ruijsenaars-Toda 方程式 [1] に定数 (a_n^2) を加えて拡張する

$$\frac{\overline{V}_n}{V_n} = \frac{K_{n-1}+V_{n-1}}{K_n+V_n}a_n^2 \tag{1}$$

$$\frac{\overline{K}_{n+1}}{K_n} = \left(\frac{1+\overline{V}_n}{1+\overline{V}_{n+1}}\right)\left(\frac{\overline{K}_{n+1}+\overline{V}_{n+1}}{\overline{K}_n+\overline{V}_n}\right). \tag{2}$$

ここで, $^-$ は $t+1$ での値を表す. 式 (1)-(2) の 2 periodic boundary condition を考える

$$\frac{\overline{V}_0}{V_0} = \frac{K_1+V_1}{K_0+V_0}a_0^2 \tag{3}$$

$$\frac{\overline{V}_1}{V_1} = \frac{K_0+V_0}{K_1+V_1}a_1^2 \tag{4}$$

$$\frac{\overline{K}_1}{K_0} = \left(\frac{1+\overline{V}_0}{1+\overline{V}_1}\right)\left(\frac{\overline{K}_1+\overline{V}_1}{\overline{K}_0+\overline{V}_0}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\overline{K}_0}{K_1} = \left(\frac{1+\overline{V}_1}{1+\overline{V}_0}\right)\left(\frac{\overline{K}_0+\overline{V}_0}{\overline{K}_1+\overline{V}_1}\right). \tag{6}$$

$$a_0a_1 = q \tag{7}$$

$$V_0V_1 = b_0^2q^{2t} \tag{8}$$

$$K_0K_1 = b_0^2 \tag{9}$$

として、

$$V_0 \to b_0V_0 \tag{10}$$

$$K_1 \to b_0K_1 \tag{11}$$

とおくと、

$$\frac{\overline{V}_0}{K_1} = \frac{q^{2t}+K_1V_0}{1+K_1V_0}a_0^2 \tag{12}$$

$$\overline{K}_1\overline{V}_0 = \frac{q^{2(t+1)}(1+b_0\overline{V}_0)-K_1(b_0q^{2(t+1)}+\overline{V}_0)}{K_1(b_0q^{2(t+1)}+\overline{V}_0)-(1+b_0\overline{V}_0)}. \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\overline{V}_0 &\to q^{t+1}G &(14)\\ K_1 &\to -\frac{q}{a_0^2}GY &(15)\end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned}\underline{G}YG &= \frac{a_0^2}{q}\frac{q^{-t}+Y}{1+q^{-t}Y} &(16)\\ YG\overline{Y} &= \frac{a_0^2}{q}\frac{1+b_0q^{t+1}G}{b_0q^{t+1}+G}. &(17)\end{aligned}$$

一方、affine Wely group の双有理変換として実現する qPainlevé-3 方程式は $A_2^{(1)}\times A_1^{(1)}$ の lattice において $A_2^{(1)}$ の 1 方向への発展を時間発展とみたとき残りの $A_1^{(1)}\times A_1^{(1)}$ をその方程式の対称性とするものであり具体的には以下の方程式となる

$$\begin{aligned}\overline{f}_1 &= \frac{c^2}{f_0f_1}\frac{1+a_0q^tf_0}{a_0q^t+f_0} &(18)\\ \underline{f}_0 &= \frac{c^2}{f_0f_1}\frac{a_1q^{-t+\mu}+f_1}{1+a_1q^{-t+\mu}f_1}. &(19)\end{aligned}$$

2 つの式は, 導出のしかたは違うが同じものである.
この方程式の Riccati 解については, 九州大学の梶原先生と共著の論文を投稿中である. [2]

2 q差分Painlevé-3方程式Iの連続極限

式 (3)-(6) を極限をとる目的で

$$\begin{aligned}\frac{\overline{V}_0}{V_0} &= \frac{K_1+V_1}{K_0+V_0}a_0^2 &(20)\\ \frac{\overline{V}_1}{V_1} &= \frac{K_0+V_0}{K_1+V_1}a_1^2 &(21)\\ \frac{\overline{K}_0}{K_0} &= \left\{\frac{\overline{K}_0(1+\overline{V}_0)}{\overline{K}_1(1+\overline{V}_1)}\right\}\left(\frac{\overline{K}_1+\overline{V}_1}{\overline{K}_0+\overline{V}_0}\right) &(22)\\ \frac{\overline{K}_1}{K_1} &= \left\{\frac{\overline{K}_1(1+\overline{V}_1)}{\overline{K}_0(1+\overline{V}_0)}\right\}\left(\frac{\overline{K}_0+\overline{V}_0}{\overline{K}_1+\overline{V}_1}\right) &(23)\end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned}K_n &\to 1+\delta K_n &(24)\\ V_n &\to \delta V_n &(25)\\ a_n^2 &\to 1+\delta\hat{a} &(26)\end{aligned}$$

と変数変換し、両辺 log をとってから $\delta\to 0$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\log V_0 &= (K_1+V_1)-(K_0+V_0)+\hat{a}_0 &(27)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\log V_1 &= (K_0+V_0)-(K_1+V_1)+\hat{a}_1 &(28)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}K_0 &= K_0V_0-K_1V_1 &(29)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}K_1 &= K_1V_1-K_0V_0. &(30)\end{aligned}$$

式 (27)-(30) が, Painlevé-3 方程式であることを確かめるには式 (27)-(30) において

$$K_0 + K_1 = b_0 \tag{31}$$
$$V_0 V_1 = e^t \tag{32}$$

とおく.

一方, Painlevé-3 方程式の Hamiltonian は

$$H_{P_{III'}} = q^2 p(p-1) + q\{(\hat{a}_0 - b_0)p + b_0\} + sp \tag{33}$$

であるから、

$$V_0 = q \tag{34}$$
$$K_1 = qp \tag{35}$$
$$s = e^t \tag{36}$$

とおけば式 (27)-(30) が Painlevé-3 方程式であることが確かめられる.

すなわち, Painlevé-3 方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \log V_n = (K_{n-1} + V_{n-1}) - (K_n + V_n) + \hat{a}_n \tag{37}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} K_n = K_n V_n - K_{n+1} V_{n+1}. \tag{38}$$

式 (37)-(38) の 2 periodic boundary condition である.

式 (37)-(38) において、$\hat{a}_n = 0$ とすると Ruijsenaars-Toda 方程式である.[4] それを、確かめる.

$$c_n \to -\frac{V_n K_n}{K_{n-1}} \tag{39}$$
$$d_n \to -K_{n-1} - c_{n-1} \tag{40}$$

とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} d_n = d_n(c_n - c_{n-1}) \tag{41}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} c_n = c_n(d_{n+1} + c_{n+1} - d_n - c_{n-1}). \tag{42}$$

これがよく知られた Ruijsenaars-Toda 方程式である. 離散の場合は, Suris さんの導出した離散 Ruijsenaars-Toda 方程式と一致することが確認できる. [1]

さらに, 初期値空間が $\tilde{D}_8$ の Painlevé-3 は式 (37)-(38) において

$$V_n \to c^{-2} V_n \tag{43}$$
$$K_n \to 1 + c^{-1} I_n \tag{44}$$
$$\hat{a}_n \to c^{-1} \hat{a}_n \tag{45}$$
$$t \to cs \tag{46}$$

として, $c \to \infty$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}} \log V_n = I_{n-1} - I_n + \hat{a}_n \tag{47}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}} I_n = V_n - V_{n+1}. \tag{48}$$

式 (47)-(48) の 2 periodic boundary condition として導出できる.

3 高階のq差分Painlevé-3方程式I と Painlevé-3方程式

3.1 高階のq差分Painlevé-3方程式I と Painlevé-3方程式

この話題は，まだ十分に議論ができていないため簡単に議論をしておく．q 差分 Painlevé-3 方程式 I は式 (1)-(2) の 2 periodic boundary condition であるから，高階の q 差分 Painlevé-3 方程式 I は N periodic boundary condition とすればよいと考えられる．連続の Painlevé-3 方程式は式 (37)-(38) の 2 periodic boundary condition であるから，高階の Painlevé-3 方程式は N periodic boundary condition とすればよいと考えられる．

これから，初期値空間が $\tilde{D}_8$ の Painlevé-3 の高階の微分方程式は，式 (47)-(48) の N periodic boundary condition とすればよいと考えられる．

高階の式については，これからの課題である．

3.2 Riccati解

式 (37)-(38) において

$$K_n = 0(\text{恒等的に}) \tag{49}$$

とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\log V_n = V_{n-1} - V_n + \hat{a}_n \tag{50}$$

となり、$\hat{a}_n = 0$ ならば式 (50) は N periodic boundary condition の semi-discrete Burgers 方程式がでてくる．これが Riccati 解を与えることはすぐにわかる．

離散の場合には、式 (1)-(2) において

$$K_n = 1(\text{恒等的に}) \tag{51}$$

とすればよい．

4 q差分Painlevé-3方程式II

式 (1)-(2) において、

$$K_{-1} + V_{-1} = c_0 \tag{52}$$

$$K_N + V_N = d_0 \tag{53}$$

という boundary condition を設ける．

$N = 1$ とすると、

$$\frac{\overline{V}_0}{V_0} = \frac{c_0}{K_0 + V_0}a_0^2 \tag{54}$$

$$\frac{\overline{V}_1}{V_1} = \frac{K_0 + V_0}{d_0}a_1^2 \tag{55}$$

$$\frac{\overline{K}_0}{K_0} = \left\{\frac{\overline{K}_0(1+\overline{V}_0)}{(d_0-\overline{V}_1)(1+\overline{V}_1)}\right\}\left(\frac{d_0}{\overline{K}_0+\overline{V}_0}\right). \tag{56}$$

ここで、一般性を失うことなく

$$V_0 V_1 = q^{2t} \tag{57}$$

とおけるので式 (54)-(56) は 2 階の差分方程式である. 式 (54) より、

$$K_0 + V_0 = (c_0 a_0^2 V_0)/\overline{V}_0. \tag{58}$$

時間をずらし、式 (56) に代入すると

$$\overline{V}_0 \underline{V}_0 = \frac{(V_0 - q^{2t}/d_0)(V_0 + q^{2t})}{(1 - V_0/(c_0 a_0^2))(1 + V_0)}. \tag{59}$$

これは、Grammaticos さんと Ramani さんの q 差分 Painlevé-3 である. この方程式の対称性は、$D_5^{(1)}$ に存在する q 差分 Painlevé-6 を起源とする. [3] 元来 q 差分 Painlevé-6

$$y\underline{y} = \frac{a_3 a_4 (x - q^n b_1)(x - q^n b_2)}{(x - b_3)(x - b_4)} \tag{60}$$

$$\overline{x} x = \frac{b_3 b_4 (y - q^n a_1)(y - q^n a_2)}{(y - a_3)(y - a_4)} \tag{61}$$

は、asymmetric な方程式である. 式 (60)-(61) を symmetrize したものが q 差分 Painlevé-3 である.

5 q 差分 Painlevé-3 方程式 II の連続極限

式 (37)-(38) において、

$$K_{-1} + V_{-1} = c_0 \tag{62}$$

$$K_N + V_N = d_0 \tag{63}$$

という boundary condition を設ける.
$N = 1$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \log V_0 = c_0 - (K_0 + V_0) + a_0 \tag{64}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \log V_1 = (K_0 + V_0) - d_0 + a_1 \tag{65}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} K_0 = K_0 V_0 - (d_0 - V_1) V_1. \tag{66}$$

ここで、一般性を失うことなく

$$V_0 V_1 = e^t \tag{67}$$

とおけるので式 (64)-(66) は 2 階の微分方程式である.
式 (64) より

$$K_0 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \log V_0 + c_0 - V_0 + a_0. \tag{68}$$

これを、式 (66) に代入すると

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} \log V_0 = V_0^2 - (c_0 + a_0) V_0 + d_0 \frac{e^t}{V_0} - \frac{e^{2t}}{V_0^2}. \tag{69}$$

これは、exp 型の Painlevé-3 方程式である.

さらに, 式 (47)-(48) において

$$I_{-1} = c_0 \tag{70}$$
$$I_N = d_0 \tag{71}$$

として, $N=1$ とすると初期値空間が $\tilde{D}_8$ の Painlevé-3 方程式がえられる.

6 高階のq差分Painlevé-3方程式II と Painlevé-3方程式

q差分 Painlevé-3 方程式 II の場合の高階の Painlevé-3 方程式は, N を増やすことで実現されることが期待できる. 連続の Painlevé-3 方程式の場合も同様である. 初期値空間が $\tilde{D}_8$ の Painlevé-3 の高階の方程式も同様である. 高階の式については, これからの課題である.

参考文献

[1] Y.Suris, J. Math. Phys.A:Math. Gen. **29**(1996)451-465

[2] K.Kajiwara and K.Kimura On a q-Difference Painlevé III Equation: I. Derivation, Symmetry and Riccati Type Solutions Solv-int/0205019

[3] M.Jimbo and H.Sakai, Lett. Math. Phys. **38**(1996) 145-154

[4] S.N.M Ruijsenaars, Commun. Math. Phys. **133**(1990)217-247