

Sierpiński ガスケット上の調和関数

米子工業高等専門学校 倉田 久靖 (Hisayasu KURATA)
Yonago National College of Technology

1 離散近似

(X, \mathcal{E}) を局所有限なグラフとする。ただし、 X および \mathcal{E} はそれぞれ頂点および辺の集合で、 \mathcal{E} の元は X の元の非順序対とする。さらに次の条件を満たすとする。

- (i) X は X_0, X_1, \dots に、また \mathcal{E} は $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ に分割される。ただし、 X_0 は 1 点集合である。
- (ii) 任意の $n \geq 1$ と $x \in X_n$ について、 $(x, p(x)) \in \mathcal{A}_n$ を満たす頂点 $p(x) \in X_{n-1}$ が唯一つ存在する。逆に \mathcal{A}_n の元はこの形に書ける。また、すべての $x \in X$ について $x = p(y)$ を満たす頂点 $y \in X$ が存在する。
- (iii) \mathcal{B}_n の元は X_n の元の対である。

これらから、 $(X, \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n)$ が樹木構造を持つこと、また各 X_n が有限集合であることがわかる。また $\Xi = \{\{x_n\}_{n=0}^{\infty}; \text{すべての } n \text{ について } x_n \in X_n, (x_{n-1}, x_n) \in \mathcal{A}_n\}$ とおく。これは上記の樹木構造の枝に沿う頂点列の全体である。 $\xi = \{x_n\}_n \in \Xi$ に対し $\gamma_n(\xi) = x_n$ とおく。

\mathcal{E} 上に正值関数 l_0 で、任意の $\{x_n\}_n \in \Xi$ について $\sum_n l_0(x_{n-1}, x_n) < \infty$ となるものが与えられているとする。2 頂点 x, y について、それらを結ぶ道の全体を $\mathcal{R}(x, y)$ とする。すなわち

$$\mathcal{R}(x, y) = \left\{ \{e_j\}_{j=1}^k; e_j = (z_{j-1}, z_j) \in \mathcal{E}, z_0 = x, z_k = y, k \geq 1 \right\}$$

とする。ただし、 $x = y$ のときは空列も含めておく。更に

$$l(x, y) = \inf \left\{ \sum_j l_0(e_j); \{e_j\}_j \in \mathcal{R}(x, y) \right\}$$

とおけば、 l は X の距離になる。

補題 1. 任意の $\xi, \eta \in \Xi$ について、 $\rho(\xi, \eta) := \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} l(\gamma_m(\xi), \gamma_n(\eta))$ が存在する。

証明. $\xi = \{x_n\}_n, \eta = \{y_n\}_n$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ について, $\sum_{j=N}^{\infty} l_0(x_j, x_{j+1}) < \varepsilon$ および $\sum_{j=N}^{\infty} l_0(y_j, y_{j+1}) < \varepsilon$ が成り立つような整数 N を取る. $m_2 > m_1 \geq N$ かつ $n_2 > n_1 \geq N$ とする. $\sum_j l_0(e_j) \leq l(x_{m_1}, y_{n_1}) + \varepsilon$ を満たす $\{e_j\}_j \in \mathcal{R}(x_{m_1}, y_{n_1})$ を取る. $\{(x_j, x_{j+1})\}_{j=m_1}^{m_2-1} \in \mathcal{R}(x_{m_1}, x_{m_2})$ かつ $\{(y_j, y_{j+1})\}_{j=n_1}^{n_2-1} \in \mathcal{R}(y_{n_1}, y_{n_2})$ であるから, $l(x_{m_2}, y_{n_2}) \leq l(x_{m_1}, y_{n_1}) + 3\varepsilon$ となる. 逆も同様に得られるから, 主張を得る. \square

明らかに $\xi, \eta, \zeta \in \Xi$ について

$$\rho(\xi, \xi) = 0, \quad \rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi), \quad \rho(\xi, \zeta) \leq \rho(\xi, \eta) + \rho(\eta, \zeta)$$

が成り立つ. ここで, $\rho(\xi, \eta) = 0$ のとき $\xi \sim \eta$ と定めれば, これは同値関係になる. ξ を含む同値類を $\tilde{\xi}$ とし, その全体を $\tilde{\Xi}$ とする. このとき, $\tilde{\rho}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) := \rho(\xi, \eta)$ は代表元の取り方によらないことと, $\tilde{\rho}$ が $\tilde{\Xi}$ 上の距離になることがわかる.

ここで, 上記の条件を満たすネットワーク列の例を構成する. 実際, 与えられたコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対し, $\tilde{\Xi}$ と K が Lipschitz 同値になるようにできる. まず, K を含む閉立方体 Q_0 を取る. 簡単のため Q_0 の辺の長さは 1 であるとする. $\Omega_0 = \{Q_0\}$ とおく. 次に Q_0 を 2^d 等分した立方体のうち K と交わるものの全体を Ω_1 とする. さらに Ω_1 の各立方体を 2^d 等分した立方体のうち K と交わるものの全体を Ω_2 とする. 以下同様に Ω_n を定める. 各 $Q \in \bigcup_{n \geq 0} \Omega_n$ について相異なる頂点 $x(Q)$ を取り,

$$\begin{aligned} X_n &= \{x(Q); Q \in \Omega_n\}, \\ A_n &= \{(x(P), x(Q)); P \text{ は } Q \text{ の } 2^d \text{ 等分の一つで } P \in \Omega_n\}, \\ B_n &= \{(x(P), x(Q)); P, Q \in \Omega_n, P \cap Q \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

とおく. さらに $(x, y) \in A_n \cup B_n$ のとき $l_0(x, y) = 2^{-n}$ と定め, l, Ξ などを前述のように定める. 任意の $\xi = \{x(Q_n)\}_{n=0}^{\infty} \in \Xi$ に対し $\bigcap_n Q_n$ は 1 点であるから, その点を $\pi(\xi)$ と書けば, π は Ξ から K への全射になっている.

補題 2. 任意の $\xi, \eta \in \Xi$ について

$$\rho(\xi, \eta) / 6 \leq |\pi(\xi) - \pi(\eta)| \leq \sqrt{d} \rho(\xi, \eta)$$

が成り立つ.

証明. $\xi = \{x(P_n)\}_n, \eta = \{x(Q_n)\}_n$ とする. まず $\pi(\xi) = \pi(\eta)$ のときを考える. このとき $\bigcap_n P_n = \bigcap_n Q_n$ であるから, 特に任意の n について $P_n \cap Q_n \neq \emptyset$ である. よって $(x(P_n), x(Q_n)) \in B_n$ となり, したがって $l(x(P_n), x(Q_n)) \leq l_0(x(P_n), x(Q_n)) = 2^{-n}$ となるから, $\rho(\xi, \eta) = 0$ となる. よって与式は成り立つ.

以下 $\pi(\xi) \neq \pi(\eta)$ とする. このとき $P_N \cap Q_N \neq \emptyset$ かつ $P_{N+1} \cap Q_{N+1} = \emptyset$ となる N を取れば, $|\pi(\xi) - \pi(\eta)| \geq 2^{-(N+1)}$ となる. $n > N$ のとき

$$\begin{aligned} \{(x(P_{j-1}), x(P_j))\}_{j=N+1}^n &\in \mathcal{R}(x(P_N), x(P_N)), \\ \{(x(P_N), x(Q_N))\} &\in \mathcal{R}(x(P_N), x(Q_N)), \\ \{(x(Q_{j-1}), x(Q_j))\}_{j=N+1}^n &\in \mathcal{R}(x(Q_N), x(Q_N)) \end{aligned}$$

となるから、

$$l(x(P_n), x(Q_n)) \leq 2^{-N} + 2^{-N} + 2^{-N} \leq 6|\pi(\xi) - \pi(\eta)|$$

を得る. $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\rho(\xi, \eta) \leq 6|\pi(\xi) - \pi(\eta)|$$

となる.

第2の不等式を示すために、 $\{(x(R_{j-1}), x(R_j))\}_{j=1}^m \in \mathcal{R}(x(P_n), x(Q_n))$ とする. 立方体 Q の中心を $c(Q)$ と書く. $(x(R_{j-1}), x(R_j)) \in \mathcal{A}_k \cup \mathcal{B}_k$ とすると、 $l_0(x(R_{j-1}), x(R_j)) = 2^{-k}$ かつ $|c(R_{j-1}) - c(R_j)| \leq \sqrt{d}2^{-k}$ となるから、 $|c(R_{j-1}) - c(R_j)| \leq \sqrt{d}l_0(x(R_{j-1}), x(R_j))$ となる. よって

$$|c(P_n) - c(Q_n)| \leq \sum_{j=1}^m |c(R_{j-1}) - c(R_j)| \leq \sqrt{d} \sum_{j=1}^m l_0(x(R_{j-1}), x(R_j))$$

を得る. 右辺の下限を考えれば

$$|c(P_n) - c(Q_n)| \leq \sqrt{d}l(x(P_n), x(Q_n))$$

となる. $\pi(\xi) \in P_n$ より、 $|\pi(\xi) - c(P_n)| \leq \sqrt{d}2^{-(n+1)}$ となるから、

$$|\pi(\xi) - \pi(\eta)| \leq 2\sqrt{d}2^{-(n+1)} + \sqrt{d}l(x(P_n), x(Q_n))$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$|\pi(\xi) - \pi(\eta)| \leq \sqrt{d}\rho(\xi, \eta)$$

を得る. □

この補題により $\xi \sim \eta$ のとき $\pi(\xi) = \pi(\eta)$ となること、従って $\tilde{\xi} \in \tilde{\Xi}$ に対し $\tilde{\pi}(\tilde{\xi}) = \pi(\xi)$ と定義できることがわかる. さらに

$$\tilde{\rho}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})/6 \leq |\tilde{\pi}(\tilde{\xi}) - \tilde{\pi}(\tilde{\eta})| \leq \sqrt{d}\tilde{\rho}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

が成り立つこともわかる. すなわち次の定理を得る.

定理 3. $\tilde{\pi}$ は $\tilde{\Xi}$ から K への両 Lipschitz 連続写像である.

上記で X などを構成する際、 Q_0 が立方体であることや、各立方体を 2^d 等分することは本質的ではない.

例 4 (Sierpiński ガスケット). 複素平面上の正三角形 $p_1p_2p_3$ を取り、 $z \in \mathbb{C}$ について $F_j(z) = (z + p_j)/2$ ($j \in L = \{1, 2, 3\}$) とおく. $\{F_1, F_2, F_3\}$ の不変集合、すなわち $K =$

$\bigcup_{j=1}^3 F_j(K)$ を満たすコンパクト集合 K が唯一つ存在する. それを Sierpiński ガスケットという. $a_j \in L$ とし $F_{a_1 \dots a_n} = F_{a_1} \circ \dots \circ F_{a_n}$ とおくと, 任意の $z_0 \in \mathbb{C}$ に対し

$$K = \bigcup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} F_{a_1 \dots a_n}(z_0); \text{すべての } j \text{ について } a_j \in L \right\}$$

となることが知られている. L をアルファベットとする長さ n の単語の全体を X_n とする. $x = a_1 \dots a_n \in X_n$ と $y = b_1 \dots b_m \in X_m$ について $xy = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$, $x^2 = xx$, $x^3 = xxx$ などと書く. また $\mathcal{A}_n = \{(x, xa); x \in X_{n-1}, a \in L\}$, $\mathcal{B}_n = \{(x, y); x, y \in X_n, F_x(K) \cap F_y(K) \neq \emptyset\}$ とし, $e \in \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$ のとき $l_0(e) = 2^{-n}$ とおく. さらに長さが無限の単語の全体を Ξ とし, $\xi = a_1 \dots a_n \dots \in \Xi$ に対し $\gamma_n(\xi) = a_1 \dots a_n$, $\pi(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\gamma_n(\xi)}(z_0)$ とおく. 前述と同様に $\bar{\rho}$, $\bar{\pi}$ を定めれば, 定理 3 と同様に

$$\sqrt{3}/6 \cdot \bar{\rho}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \leq \left| \bar{\pi}(\tilde{\xi}) - \bar{\pi}(\tilde{\eta}) \right| \leq \bar{\rho}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

が成り立つことがわかる. すなわち, $\bar{\pi}$ は Ξ から K への両 Lipschitz 連続写像である.

2 調和関数

まず各世代における調和関数を考える. X_n ($n \geq 1$) 上の関数 u について

$$\Delta_n u(x) = \sum_{y \in X_n, (y, x) \in \mathcal{B}_n} \frac{u(y) - u(x)}{l_0(y, x)}$$

とおく. u が点 $x \in X_n$ で調和であるとは $\Delta_n u(x) = 0$ を満たすこととし, X_n の部分集合 Y で調和であるとは Y の各点で調和であることとする. $Y \subset X_n$ に対し

$$\bar{Y} = Y \cup \{x \in X_n; \text{ある } y \in Y \text{ について } (x, y) \in \mathcal{B}_n\}$$

とおく.

補題 5 (最大値原理). Y を (X_n, \mathcal{B}_n) の連結部分グラフの頂点の集合とし, \bar{Y} で定義された関数 u が Y で調和であるとする. $\max_{\bar{Y}} u = u(x)$ を満たす頂点 $x \in Y$ があれば, u は \bar{Y} で定数である.

証明. x で最大になることから, $(x, y) \in \mathcal{B}_n$ を満たすすべての y について $u(y) - u(x) \leq 0$ となる. 従って, $\Delta_n u(x) = 0$ は u が $\bar{\{x\}}$ で定数であることを意味する. この議論を繰り返せば良い. \square

定理 6. S_n は X_n の部分集合で, X_n のすべての連結成分と交わるものとする. S_n 上の任意の関数 u_0 に対し

$$X_n \setminus S_n \text{ において } \Delta_n u = 0, \quad S_n \text{ において } u = u_0 \quad (1)$$

を満たす X_n 上の関数 u が唯一つ存在する.

証明. $u_0 \equiv 0$ であれば補題5により $u \equiv 0$ となる. すなわち、連立方程式(1)が同次のときは、その解は唯一つである. 従って、その係数行列は可逆であり、よって任意の u_0 に対し(1)は唯一つの解を持つ. \square

次に $\tilde{\Xi}$ 上の調和関数を定義する. $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{\Xi}$ とし $\Sigma = \{\xi \in \Xi; \tilde{\xi} \in \tilde{\Sigma}\}$, $S_n = \{\gamma_n(\xi); \xi \in \Sigma\}$ とする. u_n を X_n 上の関数で $X_n \setminus S_n$ で調和なものとする. これらが

(i) 列 $\{u_n(\gamma_n(\xi))\}_n$ は $\xi \in \Xi$ について一様収束する.

(ii) $\xi \sim \eta$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\gamma_n(\xi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\gamma_n(\eta))$.

を満たすとき、 $\varphi(\tilde{\xi}) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\gamma_n(\xi))$ は $\tilde{\Xi} \setminus \tilde{\Sigma}$ において調和であるという. φ は $\tilde{\Xi}$ 全体で定義されていることを注意する.

定理 7 (弱最大値原理). $\tilde{\Xi} \setminus \tilde{\Sigma}$ の調和関数 φ は

$$\sup_{\tilde{\Xi}} \varphi = \sup_{\tilde{\Sigma}} \varphi$$

を満たす.

証明. $\tilde{\xi} \in \tilde{\Xi}$ とし $\xi = \{x_n\}_n$ とする. 十分大きな n を取れば $u_n(x_n) > \varphi(\tilde{\xi}) - \varepsilon$ となる. また補題5より、 $u(y_n) \geq u(x_n)$ を満たす頂点 $y_n \in S_n$ が取れる. u は φ に一様収束するから、 $\gamma_n(\eta) = y_n$ となる $\eta \in \Sigma$ について $u(y_n) < \varphi(\tilde{\eta}) + \varepsilon$ としてよい. よって $\varphi(\tilde{\xi}) < \varphi(\tilde{\eta}) + 2\varepsilon$ となり、 $\sup_{\tilde{\Xi}} \varphi \leq \sup_{\tilde{\Sigma}} \varphi + 2\varepsilon$ となる. \square

$\tilde{\Xi}$ における Dirichlet 問題を考える. $\tilde{\Sigma}$ 上の関数 φ_0 に対し、 $\tilde{\Xi} \setminus \tilde{\Sigma}$ の調和関数 φ で $\tilde{\Sigma}$ において $\varphi = \varphi_0$ を満たすものがあるとき、 φ を組 $(\tilde{\Sigma}, \varphi_0)$ に関する Dirichlet 問題の解という.

系 8. 任意の組 $(\tilde{\Sigma}, \varphi_0)$ について、それに関する Dirichlet 問題の解は高々一つしかない.

証明. 2つの解 φ_1 と φ_2 があったとすると、簡単な考察により $\varphi_1 - \varphi_2$ は $(\tilde{\Sigma}, 0)$ に関する Dirichlet 問題の解であることがわかる. よって定理7により $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ となる. \square

次に Sierpiński ガスケット上の調和関数について考える. 記号は例4を参照されたい. まず X_n 上の調和関数についての評価を与える.

補題 9. $S_n = \{1^n, 2^n, 3^n\} \subset X_n$ とし $u_0(1^n) = 1$, $u_0(2^n) = u_0(3^n) = 0$ とする. 方程式(1)の解を u とすると、 $(x, y) \in \mathcal{B}_n$ ならば

$$|u(x) - u(y)| \leq 2(3/5)^{n-1}$$

証明. u_0 は $\bigcup_n S_n$ で定義されており、 u はすべての n について(1)を満たすとしてよい. $Y = \{x \in X_n; x \text{ の最初の文字は } 1 \text{ または } 2\} \setminus \{13^{n-1}, 23^{n-1}, 1^n, 2^n\}$ とし、方程式 $\Delta_n u(x) = 0$ ($x \in Y$) を考える. すると $u(x)$ は、ある定数 $c_j(x)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) を用いて

$$c_0(x)u(13^{n-1}) + c_1(x)u(23^{n-1}) + c_2(x)u(1^n) + c_3(x)u(2^n)$$

と書ける. 方程式の対称性から $c_0(12^{n-1}) = c_2(12^{n-1}) = c_1(21^{n-1}) = c_3(21^{n-1})$ および $c_0(21^{n-1}) = c_2(21^{n-1}) = c_1(12^{n-1}) = c_3(12^{n-1})$ が成り立つ. これと、定数関数は調和関数であることから

$$u(12^{n-1}) + u(21^{n-1}) = (u(13^{n-1}) + u(23^{n-1}) + u(1^n) + u(2^n)) / 2. \quad (2)$$

がわかる. 同様に

$$u(23^{n-1}) + u(32^{n-1}) = (u(21^{n-1}) + u(31^{n-1}) + u(2^n) + u(3^n)) / 2. \quad (3)$$

を得る. 更に $u_0(2^n) = u_0(3^n)$ であるから

$$u(12^{n-1}) = u(13^{n-1}), u(21^{n-1}) = u(31^{n-1}), u(23^{n-1}) = u(32^{n-1})$$

となり、従って(3)と(2)から

$$u(23^{n-1}) = u(21^{n-1}) / 2, \quad (4)$$

$$u(12^{n-1}) + 3/2u(21^{n-1}) = 1 \quad (5)$$

が得られる. 次に補題5を $Y = \{x \in X_n; x \text{ の最初の文字は } 1\}$ に適用すれば、任意の $x \in Y$ について $u(x) > u(21^{n-1}) \wedge u(31^{n-1}) = u(21^{n-1})$ となることがわかる. 特に $u(12^{n-1}) > u(21^{n-1})$ となる. よって(5)と合わせれば

$$u(21^{n-1}) < 2/5 < u(12^{n-1}) \quad (6)$$

を得る.

次に $x \in X_{n-1}$ について

$$u(1x) = (1 - u(12^{n-1}))u(x) + u(12^{n-1}), \quad (7)$$

$$u(2x) = u(21^{n-1})u(x) + u(23^{n-1})u(x_{1 \leftrightarrow 3}), \quad (8)$$

$$u(3x) = u(31^{n-1})u(x) + u(32^{n-1})u(x_{1 \leftrightarrow 2}) \quad (9)$$

を示す. ただし、 $x_{1 \leftrightarrow 3}$ は x の 1 と 3 を入れ替えた単語を表す (例: $1231_{1 \leftrightarrow 3} = 3213$). まず $u(1^{n-1}) = u(1^n) = 1$ と $u(2^{n-1}) = u(3^{n-1}) = 0$ より $x \in S_{n-1}$ のとき(7)は成り立つ. 更に(7)の両辺は調和関数だから両者は一致する. (8)と(9)も同様に示される.

続いて $x \in X_{n-1}$ と $a, b \in L$ について

$$|u(xa) - u(xb)| \leq (3/5)^{n-1}$$

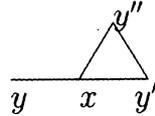


図 1:

を帰納法で示す. $n=1$ のときは明らか. $n-1$ のとき示されたとすると, 任意の $z \in X_{n-2}$ と $a, b \in L$ について, (7) と (6) を用いて

$$|u(1za) - u(1zb)| = (1 - u(12^{n-1})) |u(za) - u(zb)| < 3/5 |u(za) - u(zb)| \leq (3/5)^{n-1}$$

となる. 同様に (8), (6), (4) を用いて

$$|u(2za) - u(2zb)| < 2/5 |u(za) - u(zb)| + 1/5 |u((za)_{1 \leftrightarrow 3}) - u((zb)_{1 \leftrightarrow 3})| \leq (3/5)^{n-1}$$

を得る. また (9), (6), (4) から

$$|u(3za) - u(3zb)| \leq (3/5)^{n-1}$$

を得る. これらにより n のときが示される.

$x, y \in X_n$ を $(x, y) \in \mathcal{B}_n$ となるように取る. ある w について $x = wa, y = wb$ と書ける場合は, 既に述べたように $|u(x) - u(y)| \leq (3/5)^{n-1}$ となるから, 定理の主張を得る. そうでないときは, x と y が図 1 のようになっているから, $3u(x) = u(y) + u(y') + u(y'')$ となり,

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(y')| + |u(x) - u(y'')| \leq 2(3/5)^{n-1}$$

を得る. よって, この場合も主張を得る. \square

定理 10. $\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma})$ が $\{F_x(p_j); x \in X, j \in L\}$ の有限部分集合であれば, 任意の $\tilde{\Sigma}$ 上の関数 φ_0 について, $(\tilde{\Sigma}, \varphi_0)$ に関する Dirichlet 問題は解ける.

証明. $\max_{\tilde{\Sigma}} \varphi_0 = 1, \min_{\tilde{\Sigma}} \varphi_0 = 0$ としてよい. 仮定から $\xi \in \Sigma$ は, ある $x \in X$ と $a \in L$ で $\xi = xa^\infty$ と書ける. 十分大きな N を取れば, すべての $\xi \in \Sigma$ について上記の x は X_N に属するとして良い. $n > N$ とし $x \in S_n$ とすると, $\gamma_n(\xi) = x$ を満たす $\xi \in \Sigma$ が唯一つある. そこで $u_0(x) = \varphi_0(\tilde{\xi})$ と定める. u を方程式 (1) の解とする. u は $\bigcup_{n > N} X_n$ 全体で定義されているとして良い.

$x_0 \in X_N$ を固定する. $a \in L$ について

$$X_{n-N} \setminus \{1^{n-N}, 2^{n-N}, 3^{n-N}\} \text{ において } \Delta v_a = 0, \quad b \in L \text{ に対し } v_a(b^{n-N}) = 1_{a=b}$$

を満たす v_a を取る. $u(x_0x)$ と

$$(u(x_01^{n-N}) - u(x_03^{n-N})) v_1(x) + (u(x_02^{n-N}) - u(x_03^{n-N})) v_2(x) + u(x_03^{n-N})$$

は共に $x \in X_{n-N} \setminus \{1^{n-N}, 2^{n-N}, 3^{n-N}\}$ において調和であり、 $\{1^{n-N}, 2^{n-N}, 3^{n-N}\}$ において一致するから、 X_{n-N} 上で一致する。よって補題 9 により、 $(x, y) \in \mathcal{B}_{n-N}$ のとき $|u(x_0x) - u(x_0y)| \leq 4(3/5)^{n-N-1}$ となる。補題 9 の証明と同様に $x = wa$ 、 $y = wb$ と書ける場合とそうでない場合に分けて考えれば、 $(x, y) \in \mathcal{B}_n$ のとき $|u(x) - u(y)| \leq 8(3/5)^{n-N-1}$ となる。

$x \in X_n \setminus S_n$ とする。ある $y \in X_n$ と $a, b \in L$ で $yb \in S_{n+1}$ かつ $(xa, yb) \in \mathcal{B}_{n+1}$ とできたとする。もし $y = x$ ならば、 $yb \in S_{n+1}$ より $x \in S_n$ となるから矛盾。 $y \neq x$ のとき、 N の取り方から $yb^\infty \in \Sigma$ となるが、一方 $yb^\infty \sim xa^\infty$ であるから、 $x \in S_n$ となり、やはり矛盾する。よって、 $z \in X_{n+1}$ が、ある $a \in L$ について $(z, xa) \in \mathcal{B}_{n+1}$ とできるならば、 $z \notin S_{n+1}$ に限ることになる。 u はそのような z で調和であることに注意すれば、簡単な計算により $v(x) := (u(x1) + u(x2) + u(x3))/3$ が x で調和であること、従って $X_n \setminus S_n$ で調和であることがわかる。

$x \in S_n$ とすると、 $xa \in S_{n+1}$ ($a \in L$) とできるから、 $u_0(x) = u_0(xa)$ となる。 $|v(x) - u(xa)| \leq 8(3/5)^{n-N}$ であるから、 $|v(x) - u(x)| = |v(x) - u_0(x)| \leq 8(3/5)^{n-N}$ となる。補題 5 により、すべての $y \in X_n$ で $|v(y) - u(y)| \leq 8(3/5)^{n-N}$ となり、従って $b \in L$ について $|u(y) - u(yb)| \leq 16(3/5)^{n-N}$ となる。これは $\xi \in \Xi$ について $\{u(\gamma_n(\xi))\}_n$ が Cauchy 列であることを意味するから、それは収束する。また、それが一様収束であることもわかる。

最後に $\xi \sim \eta$ とすると、 $(\gamma_n(\xi), \gamma_n(\eta)) \in \mathcal{B}_n$ であるから、 $|u(\gamma_n(\xi)) - u(\gamma_n(\eta))| \leq 8(3/5)^{n-N-1}$ となる。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} u(\gamma_n(\xi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\gamma_n(\eta))$ を得る。 \square

木上 [1] は Sierpiński ガスケット K 上の調和関数について調べている： K 上の連続関数 ψ がすべての $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ と L のすべての順列 (j_1, j_2, j_3) について

$$\begin{aligned} & 4\psi(F_x((p_{j_1} + p_{j_2})/2)) \\ &= \psi(F_x((p_{j_1} + p_{j_3})/2)) + \psi(F_x((p_{j_2} + p_{j_3})/2)) + \psi(F_x(p_{j_1})) + \psi(F_x(p_{j_2})) \end{aligned} \quad (10)$$

を満たすとき、 ψ を調和関数と言う。[1]において、与えられた $\psi(p_j)$ ($j \in L$) に対し(10)の解が唯一つ存在することが示されている。

系 11. $\Sigma = \{1^\infty, 2^\infty, 3^\infty\}$ とし、 φ_0 を $\tilde{\Sigma}$ 上の任意の関数とする。組 $(\tilde{\Sigma}, \varphi_0)$ に関する Dirichlet 問題の解を φ とすると、 $\varphi \circ \tilde{\pi}^{-1}$ は木上の意味で調和である。

証明. まず定理 10 により φ は存在する。定理 10 の証明に現れる u を取る。 $x \in \bigcup_n X_n$ のとき、(2)と同様に

$$u(x12^{n-1}) + u(x21^{n-1}) = (u(x13^{n-1}) + u(x23^{n-1}) + u(x1^n) + u(x2^n))/2 \quad (11)$$

となる。ここで、 $\pi(x12^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_x \circ F_{12^n}(z_0) = F_x((p_1 + p_2)/2)$ より、

$$\varphi \circ \tilde{\pi}^{-1}(F_x((p_1 + p_2)/2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x12^{n-1})$$

を得る。同様に

$$\varphi \circ \tilde{\pi}^{-1}(F_x((p_1 + p_2)/2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x21^{n-1}),$$

$$\varphi \circ \tilde{\pi}^{-1}(F_x((p_1 + p_3)/2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x13^{n-1})$$

などを得る. よって $\psi = \varphi \circ \tilde{\pi}^{-1}$ とおき、(11) で $n \rightarrow \infty$ とすれば、(10) の一つの式が得られる. その他の式も同様に得られる. また補題9により φ は連続であるから、 ψ は木上の意味で調和である. \square

最後に他の例を紹介する.

例 12. 図2のように φ_0 を定めるとき、Dirichlet 問題の解は、長方形部分において恒等的に0、線分部分においては長方形からの距離に比例した値をもつ.

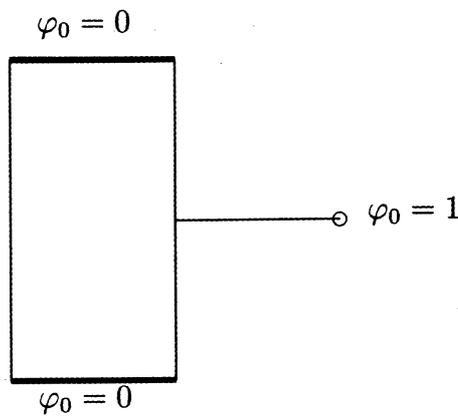


図 2: 例 12

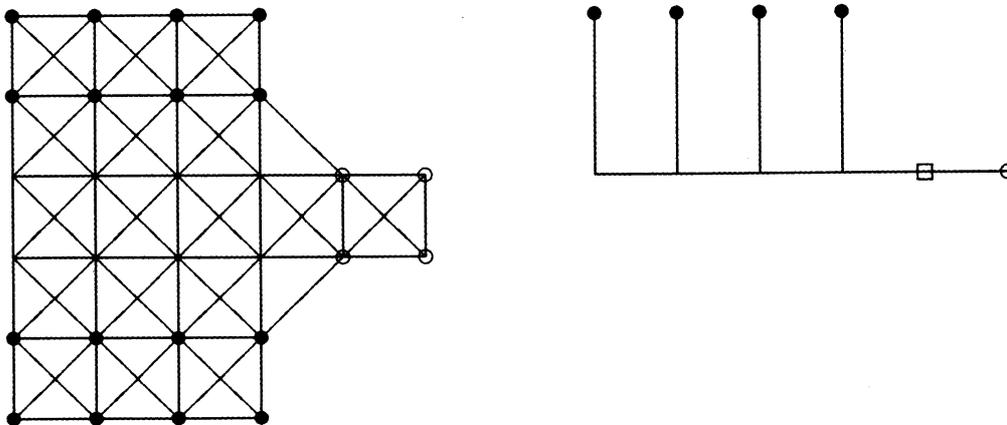


図 3: 対応するネットワーク、およびその部分グラフ

証明. 対応するネットワークは図3左の様になる(図は第2世代). その部分グラフ(図3右)において、 \circ に0、 \bullet に1の電圧をかけ流れる電流を調べる. 第 n 世代において各辺における抵抗は長さ 2^{-n} に比例するから、 \square より右の抵抗と左の抵抗の比は 2^n 程度となる. したがって極限において \square における電位は0となる. この部分グラフは \square より右では元のものと同じであることに注意すれば、元のグラフにおいても同様の結果を得る. \square

参考文献

- [1] J. Kigami, *A harmonic calculus on the Sierpiński spaces*, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 259–290.
- [2] ———, *Analysis on fractals*, Cambridge University Press, 2001.