

# E<sub>6</sub>, E<sub>7</sub> 型単純リー代数の一般パーマ加群上の Capelli 恒等式

和地 輝仁 (WACHI Akihito)

北海道工業大学総合教育研究部 (Hokkaido Institute of Technology)

## 1 序

$n \times n$  行列のなすベクトル空間  $V := \text{Mat}(n, \mathbf{C})$  の自然な座標関数を  $x_{ij}$  で表し, その偏微分作用素を  $\partial_{ij}$  で表すとき, Capelli 恒等式とは,

$$ff^*(\partial) = \det \left[ \sum_{k=1}^n x_{ki} \partial_{kj} + (n-j) \delta_{ij} \right]_{1 \leq i, j \leq n}, \tag{1.1}$$

ただし,

$$\begin{aligned} f &= \det(x_{ij}), & f^*(\partial) &= \det(\partial_{ij}), \\ \det(a_{ij}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

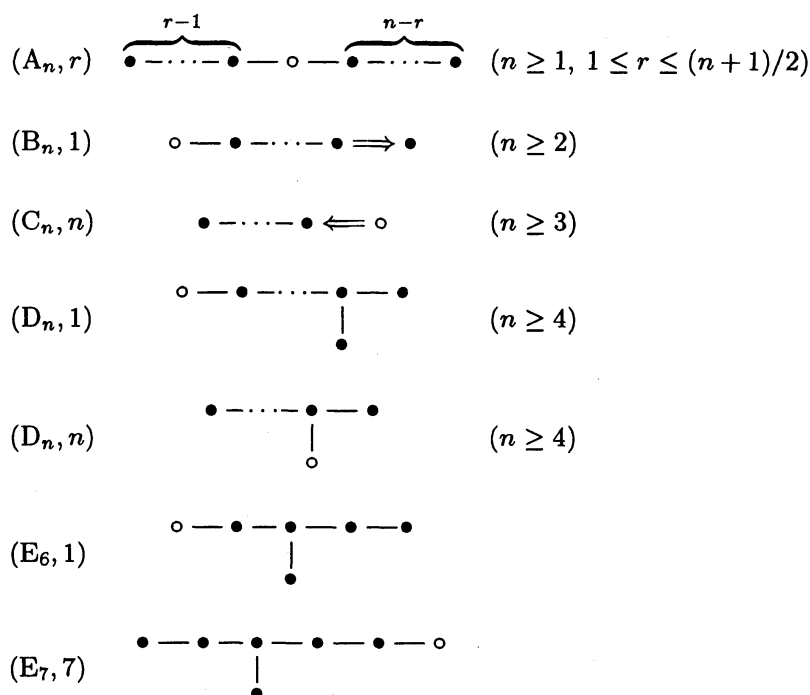
という,  $V$  上の多項式係数微分作用素環  $D_V$  における等式である. 素朴には Capelli 恒等式を行列式の積公式の非可換版と解釈できるが, 次のようにより表現論的な理解もできる.  $L = GL(n, \mathbf{C}) \times GL(n, \mathbf{C})$  とおき,  $L$  の  $V$  への作用を  $(g, h).X = gXh^{-1}$  で定める. するとこの作用を微分することにより,  $L$  のリー代数  $\mathfrak{l}$  の包絡環  $U(\mathfrak{l})$  が  $V$  に作用する. Capelli 恒等式は  $D_V$  の  $L$ -不変部分空間  $D_V^{\mathfrak{l}}$  に属する  $ff^*(\partial)$  を (式 (1.1) 左辺),  $U(\mathfrak{l})$  の中心  $Z(\mathfrak{l})$  の  $V$  上への作用 (式 (1.1) 右辺) として表した等式として理解できる.

Howe-Umeda [4] はこの設定を一般化して, Kac [6] により分類された, 作用が multiplicity-free な既約表現  $(L, V)$  全てについて Capelli 恒等式を考察した. つまり, 全ての  $D_V^{\mathfrak{l}}$  の元は  $Z(\mathfrak{l})$  の作用として表せるかどうかを調べ, 表せる場合には  $D_V^{\mathfrak{l}}$  の生成元を具体的に  $Z(\mathfrak{l})$  の作用として表した. この論説では E<sub>6</sub> 型と E<sub>7</sub> 型の単純リー代数のエルミート対称型とよばれる設定の下で, 作用を一般パーマ加群の作用に取り換えることにより, 一般パーマ加群上の Capelli 恒等式の類似物を考える. E<sub>6</sub> 型では具体的に Capelli 恒等式の類似物を書き下し, E<sub>7</sub> 型では Capelli 恒等式の類似物は存在しないことを示した.

一般パーマ加群上の Capelli 恒等式は次のように一般パーマ加群の構造に深く関わっている. 通常の (一般パーマ加群上ではない) Capelli 恒等式を用いると, 概均質ベクトル空間の相対不変式の  $b$ -関数を計算することができるが, 一般パーマ加群上の Capelli 恒等式を用いると,  $b$ -関数を指標  $\lambda$  でひねったような類似物が計算できる. このひねった  $b$ -関数は一般パーマ加群の既約性やユニタリ化可能性を制御しており,  $b$ -関数の零点と一般パーマ加群の既約性やユニタリ化可能性を本質的に結びつけている. つまり, 一般パーマ加群上の Capelli 恒等式は  $b$ -関数と一般パーマ加群の構造を結びつける役割をしている.

さて一般パーマ加群上の Capelli 恒等式とは何かを正確に説明するために、記号の定義をする。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  を複素単純リー代数とそのカルタン部分代数とし、正ルート系をひとつとる。 $\mathfrak{p}, \mathfrak{n}^+, \mathfrak{l}$  をそれぞれ、 $\mathfrak{g}$  の放物型部分代数であってすべての正ルート空間を含むもの、 $\mathfrak{p}$  の巾零根基、 $\mathfrak{p}$  のレビ部分代数であって  $\mathfrak{h}$  を含むものとする。 $L$  を  $\mathfrak{l}$  をリー代数にもつ連結リー群とする。そして、この論説では  $\mathfrak{n}^+$  が nonzero かつ可換である場合を考える。この設定のとき、組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$  がエルミート対称型であるなどと言うことにする。図 1 にエルミート対称型の組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$  をすべてあげる。エルミート対称型の場合は  $\mathfrak{p}$  は  $\mathfrak{g}$  の極大放物型部分代数となるので、 $\mathfrak{p}$  を特徴づける単純ルートの番号  $i_0$  を用いて、組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$  を  $(\mathfrak{g}, i_0)$  と表した。単純ルートの番号づけは Bourbaki [1] に従った。

図 1: エルミート対称型の Dynkin 図形



$L$  は随伴作用  $\text{Ad}$  により  $\mathfrak{n}^+$  に作用するが、エルミート対称型の場合はこの作用は multiplicity-free となる。したがって、Howe-Umeda [4] により一般化された Capelli 恒等式を表現  $(L, \text{Ad}, \mathfrak{n}^+)$  に対して考えることができる。 $(\mathfrak{l}, \text{ad}, \mathfrak{n}^+)$  から誘導される  $U(\mathfrak{l})$  の  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$  上の作用も  $\text{ad}$  で表す。この Capelli 恒等式は、 $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の生成元を具体的に  $Z(\mathfrak{l})$  の  $\text{ad}$  による作用として表したものである。エルミート対称型の設定では、 $E_7$  を除いて Capelli 恒等式は存在することが知られている [4]。

$\mathfrak{g}$  の一般パーマ加群とは  $\mathfrak{p}$  の有限次元既約表現から誘導された  $\mathfrak{g}$  の表現であるが、この論説では  $\mathfrak{p}$  の指標  $\lambda$  から誘導されたスカラー型一般パーマ加群

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda, \quad (\mathbb{C}_\lambda \text{ は } \lambda \text{ の表現空間}),$$

を考える。 $\mathfrak{n}^+$  上の多項式環を  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$ 、 $\mathfrak{n}^-$  上の対称代数を  $S(\mathfrak{n}^-)$  で表すと、エルミート対称型の場合は  $M(\lambda) \simeq U(\mathfrak{n}^-) = S(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$  なる線形同型があるので、 $\mathfrak{g}$  の  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$  上の表現が得られる。これを  $(U(\mathfrak{g}), \Psi_\lambda, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+])$  と書く。

一般パーマ加群上の Capelli 恒等式とは、 $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の生成元の  $\Psi_\lambda$  による像を  $Z(\mathfrak{l})$  の  $\Psi_\lambda$  による像として具体的に表すものである。 $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  は  $(\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  したがって  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  に

$U(\mathfrak{g})$  と自然に同型であることに注意しておく. 以下ではこの同型により,  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の元と  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の元と同じ記号を用いることがある.  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  あるいは同じことだが  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の生成元は具体的には §2 に述べてあり, 特に式 (1.1) の左辺はその例となっている.

一般パーマ加群上の Capelli 恒等式について次の2点を注意しておきたい. 先に触れたように  $E_7$  型以外のエルミート対称型の場合は Howe-Umeda [4] によって,  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の元は  $Z(\mathfrak{l})$  の ad による作用で書ける. また  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の生成元の  $\Psi_\lambda$  による像は  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  に含まれる. さらに,  $X \in \mathfrak{l}$  に対して  $\Psi_\lambda(X) = \text{ad}(X) + \lambda(X)$  であるから,  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の生成元の  $\Psi_\lambda$  による像が  $Z(\mathfrak{l})$  の  $\Psi_\lambda$  による像として表せることはわかる. したがって, そのきれいな表示を得ることが重要であることに注意する. 次に,  $E_7$  型では  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の元は  $Z(\mathfrak{l})$  の ad による作用で書けるとは限らないが,  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の  $\Psi_\lambda$  による像は,  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  よりも小さいので,  $Z(\mathfrak{l})$  の ad による作用で書けるかもしれない. したがって,  $E_7$  型を考察することには意味があることに注意する.

この論説における結果は先に触れたように,  $E_6$  型における一般パーマ加群上の Capelli 恒等式を得たことと,  $E_7$  型において Capelli 恒等式の類似物は存在しないことを示したことである. 他の型における結果と, 通常の (一般パーマ加群上ではない) Capelli 恒等式の結果について次の表にまとめる.

$(\mathfrak{g}, i_0)$	Capelli 恒等式	一般パーマ加群上
$(A_n, r)$	○ Capelli [2]	○ [11] [12]
$(C_n, n)$	○ Turnbull [9] (size = $n$ ), ○ Howe-Umeda [4] (size < $n$ ),	○ [11] ○ [12]
$(B_n, 1)$	○ (well-known)	○ [11]
$(D_n, 1)$	○ (well-known)	○ [11]
$(D_n, n)$	○ Howe-Umeda [4]	$\Delta$ size = $n$ のみ解決 [11]
	○ Turnbull 恒等式 Umeda [10]	○ Turnbull 恒等式の類似物 [12]
$(E_6, 1)$	○ Howe-Umeda [4]	○
$(E_7, 7)$	○ (1), ○ (2), × (3) Helgason [3]	○ (1), × (2), × (3)

ここで  $E_7$  型における番号づけは,  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の生成元の階数, あるいは  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の生成元の  $S(\mathfrak{n}^+)$  に関する次数であり, ×印の所が Capelli 恒等式のない生成元である. また  $(\mathfrak{g}, i_0)$  は図 1 と同じ記号である.

## 2 $C[\mathfrak{n}^+]$ の構造

多項式環  $C[\mathfrak{n}^+]$  は自然に  $L$ -加群となるが,  $L$ -加群としての既約分解は次の定理で与えられる. 特に重複度 1 で分解している (multiplicity-free).

**Theorem 2.1 (Schmid [8])** 極大放物型部分代数  $\mathfrak{p}$  を特徴づける単純ルート  $\alpha_{i_0}$  から始まる  $\mathfrak{n}^+$  のルートの強直交系で長さ最大のもの  $\alpha_{i_0} = \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r$  を用いて,  $\mu_i = -(\gamma_1 + \dots + \gamma_i)$  ( $1 \leq i \leq r$ ) と定める. このとき,  $C[\mathfrak{n}^+]$  の  $L$ -既約分解は,

$$C[\mathfrak{n}^+] = \bigoplus_{\mu = \sum_{i=1}^r m_i \mu_i} I_\mu \quad (m_i \text{ は非負整数を動く})$$

である. ただし,  $I_\mu$  は,  $C[\mathfrak{n}^+]$  の既約部分  $L$ -加群であり, 最高ウェイト  $\mu$  である唯一のものである.

この既約分解を用いて  $D_{\mathfrak{n}^+}^L \simeq (\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の生成系を表してみる.  $S(\mathfrak{n}^+)$  は  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$  の双対空間であるから,  $L$ -既約成分も互いに双対の関係がある.  $I_\mu^*$  により,  $I_\mu$  の双対加群である  $S(\mathfrak{n}^+)$  の  $L$ -部分加群を表すと, 既約分解の重複度が 1 であるから Schur の補題より,  $(\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L = \sum_\mu (I_\mu \otimes I_\mu^*)^L$  かつ,  $\dim(I_\mu \otimes I_\mu^*)^L = 1$  である. 従って,  $\{g_{\mu,j}\}_j$  を  $I_\mu$  の基底とし,  $I_\mu^*$  における双対基底を  $\{g_{\mu,j}^*\}_j$  とすると,

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L &= \left\langle z_\mu := \sum_j g_{\mu,j} \otimes g_{\mu,j}^* \mid \mu = m_1 \mu_1 + \cdots + m_r \mu_r \right\rangle_{\mathbf{C}\text{-linear}} \\ &= \langle z_i := z_{\mu_i} \mid i = 1, \dots, r \rangle_{\mathbf{C}\text{-algebra}}, \end{aligned}$$

となる.

$\mu = \mu_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) に対して,  $\sum_j g_{\mu,j} g_{\mu,j}^*(\partial) \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  を  $Z(\mathfrak{l})$  の  $\text{ad}$  による像として表したのが Capelli 恒等式であり,  $\Psi_\lambda(\sum_j g_{\mu,j} g_{\mu,j}^*) \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  を  $Z(\mathfrak{l})$  の  $\Psi_\lambda$  による像として表したのが一般パーマ加群上の Capelli 恒等式である.

### 3 例: A 型

ここでは一般パーマ加群上の Capelli 恒等式の典型的な例として,  $(A_{2n-1}, n)$  型の場合を説明する [11]. これは序の (1.1) と同じ型である.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A, B, C, D \in \text{Mat}(n, \mathbf{C}) \right\}, \\ \mathfrak{l} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A, D \in \text{Mat}(n, \mathbf{C}) \right\}, \\ \mathfrak{n}^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid B \in \text{Mat}(n, \mathbf{C}) \right\}, \\ \mathfrak{n}^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \mid C \in \text{Mat}(n, \mathbf{C}) \right\}, \end{aligned}$$

とおく.  $\text{Mat}(2n, \mathbf{C})$  の行列単位を  $E_{ij}$  で表す.  $1 \leq d \leq n$  のとき, 元の個数が  $d$  であるような  $\{1, \dots, n\}$  の部分集合  $I, J$  に対して,

$$\begin{aligned} f_{IJ} &= \det C_{IJ} = \det [E_{n+i,j}]_{i \in I, j \in J} \in S(\mathfrak{n}^-) \simeq \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+], \\ f_{IJ}^* &= \det B_{IJ} = \det [E_{j,n+i}]_{i \in I, j \in J} \in S(\mathfrak{n}^+), \\ u_{IJ} &= \det [D_{IJ} + \text{diag}(d-1, d-2, \dots, 0)] = \det [E_{n+i,n+j} + (d-j)\delta_{ij}]_{i \in I, j \in J} \in U(\mathfrak{l}), \end{aligned}$$

と定める. ここで, 行列  $C$  の部分行列であって行は  $I$ , 列は  $J$  で指定されるものを  $C_{IJ}$  で表した.

このとき, 序の冒頭に例をあげた Capelli 恒等式の低次のものと, それの一般パーマ加群上での類似物が次のように得られる.

**Proposition 3.1** 上の記号のもと,

$$(1) \sum_{\overline{I}} f_{IJ} f_{IJ}^*(\partial) = \sum_{\overline{I}} \text{ad}(u_{II}) \quad (\text{Capelli [2]})$$

$$(2) \Psi_\lambda \left( \sum_{IJ} f_{IJ} f_{IJ}^* \right) = (-1)^d \sum_{IJ} \Psi_{2\lambda+2\rho}(u_{IJ}) \Psi_0(u_{JI}) \quad (\text{Wachi [11]})$$

ただし, (1) における  $f_{IJ}^*(\partial)$  は,  $f_{IJ}^* \in S(\mathfrak{n}^+)$  を  $\mathfrak{n}^+$  上の定数係数微分作用素とみなしたものである. つまり,  $\mathfrak{n}^+ = \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  の自然な座標関数を  $x_{ij}$  としたとき,  $f_{IJ} = \det[x_{ij}]$ ,  $f_{IJ}^*(\partial) = \det[\partial_{ij}]$  ( $i \in I, j \in J$ ) である. また (2) においては,  $f_{IJ} \in S(\mathfrak{n}^-) \subset U(\mathfrak{g})$ ,  $f_{IJ}^* \in S(\mathfrak{n}^+) \subset U(\mathfrak{g})$  とみなして, 表現  $\Psi_\lambda : U(\mathfrak{g}) \rightarrow D_{\mathfrak{n}^+}$  を適用している.  $\rho$  は  $\mathfrak{n}^+$  のルートの和の半分として定義される  $\rho$  の指標である.

また,  $X \in \mathfrak{l}$  に対しては,  $\Psi_\lambda(X) = \text{ad}(X) + \lambda(X)$  であるので, (2) の  $\Psi_0$  は  $\text{ad}$  と書いても同じである.  $\square$

Capelli による Capelli 恒等式と同様に, 一般パーマ加群上の Capelli 恒等式においても,  $(S(\mathfrak{n}^-) \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  の元の像を, 同じ  $u_{IJ}$  を用いてきれいに表している.  $L$ -不変微分作用素を  $U(\mathfrak{l})$  の像として表せることは (1) からわかっているので, きれいに表せていることがここでは重要である. また,  $\mathfrak{g}$  が他のエルミート型の古典型複素単純リー代数の場合にも, 通常の Capelli 恒等式と同様なきれいな表示が得られている. さらに, (2) 右辺に現れる  $2\lambda + 2\rho$  と 0 という指標も, 他の古典型の場合にも現れる.

次節以降の例外型についても, きれいな表示の式を得ることが重要であり, そこに  $2\lambda + 2\rho$  と 0 という指標が現れるかに興味がある.

## 4 $E_6$ 型

ここでは  $(E_6, 1)$  型に対して, 一般パーマ加群上の Capelli 恒等式を示す.  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(E_6)$  とし, 図 1 における塗られていない丸によって特徴づけられる極大放物型部分代数を  $\mathfrak{p}$  とし, 塗りつぶされた丸を単純ルート系とするような  $\mathfrak{p}$  のレビ部分代数を  $\mathfrak{l}$  とする.  $\mathfrak{n}^+$  を  $\mathfrak{p}$  の巾零根基とする.  $\mathfrak{g}$  上の不変内積を, それから誘導される  $\mathfrak{g}^*$  の内積に関して単純ルートの長さが 2 となるように固定する.

代数  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の生成系として,  $\mathfrak{n}^+$  上のオイラー作用素  $e$  と,  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  のカシミール元  $c_{[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]}$  の  $\text{ad} : U(\mathfrak{l}) \rightarrow D_{\mathfrak{n}^+}$  を通しての  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$  への作用  $c := \text{ad}(c_{[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]})$  がとれることが知られている. また, これらは  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+]$  の  $L$ -既約部分加群  $I_\mu$  の上にスカラーとして作用するが, その値は  $e$  については  $I_\mu$  の次数であり,  $c$  についても一般論から計算できる (例えば [5]).

これにより  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の生成系  $z_1, z_2$  は,  $e$  と  $c$  の多項式で表せるが, 微分作用素としての階数を考えると  $z_1 \in \mathbb{C}e$ ,  $z_2 \in \mathbb{C}e + \mathbb{C}e^2 + \mathbb{C}c$  であることがわかる. ただし,  $z_1, z_2 \in (\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  を自然な同型  $D_{\mathfrak{n}^+}^L \simeq (\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  によって  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の元とみなしている.  $z_1, z_2$  の  $I_\mu$  上の作用もスカラーであるが, その値は  $(E_6, 1)$  型から単純ルート  $\alpha_6$  を除いたエルミート対称型の  $(D_5, 1)$  に帰着して, 正則概均質ベクトル空間の  $\mathfrak{b}$ -関数を用いて計算することができる.  $(E_6, 1)$  型と  $(D_5, 1)$  型で  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  がともに 2 変数多項式環と同型であることが鍵である. これらの作用素のスカラー作用を比較して,  $z_1, z_2$  を  $e$  と  $c$  の多項式で表せる.

Howe-Umeda [4] では, この方法で  $(E_6, 1)$  型の Capelli 恒等式を得た.

**Proposition 4.1 (Howe-Umeda [4])** 上の記号の下,

$$(1) z_1 = e = -\text{ad}(t_{\varpi_1}),$$

$$(2) z_2 = \frac{5}{16}e(e+8) - \frac{1}{4}c.$$

ただし,  $\varpi_1$  は単純ルート  $\alpha_1$  に対応する基本ウエイトであり,  $t_{\varpi_1}$  は不変内積によって  $\varpi_1$  に対応する  $\mathfrak{h}$  の元である.

*Proof.*  $e, c, z_1, z_2, \text{ad}(t_{\varpi_1}) \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の  $I_\mu$  ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2$ ) におけるスカラー作用は次のとおりである.

$e$	$m_1 + 2m_2$
$c$	$5m_1^2/4 + m_2^2 + m_1m_2 + 10m_1 + 8m_2$
$z_1$	$m_1 + 2m_2$
$z_2$	$m_2(m_1 + m_2 + 3)$
$\text{ad}(t_{\varpi_1})$	$-m_1 - 2m_2$

従って、上の2式それぞれに対して両辺のスカラー作用が一致することが確認でき、主張が得られる。□

さて、今の場合の一般パーマ加群上の Capelli 恒等式は  $\Psi_\lambda(z_1)$  と  $\Psi_\lambda(z_2)$  を  $\Psi_\lambda$  による  $Z(\mathfrak{l})$  の像として表した式である。ただし、ここでは  $z_1, z_2 \in (\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes S(\mathfrak{n}^+))^L$  を同型  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \simeq S(\mathfrak{n}^-)$  によって、 $U(\mathfrak{g})$  の元とみなしている。  $\Psi_\lambda(z_1)$  と  $\Psi_\lambda(z_2)$  の階数はそれぞれ2と4である。  $\Psi_\lambda(z_1)$  と  $\Psi_\lambda(z_2)$  の  $I_\mu$  上での作用がわかれば、通常の Capelli 恒等式と同じ方法でこれらを  $z_1$  と  $z_2$  の多項式として表すことができる。

**Theorem 4.2**

$$(1) \Psi_\lambda(z_1) = (\lambda + 1)z_1 + 2z_2 - z_1^2 \\ = -\frac{3}{8}\Psi_{2\lambda+2\rho}(t_{\varpi_1})\Psi_0(t_{\varpi_1}) - \frac{1}{2}c,$$

$$(2) \Psi_\lambda(z_2) = (z_2 - (\lambda + 4)z_1 + (\lambda + 1)(\lambda + 4))z_2 \\ = \left(\frac{5}{16}e^2 - \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)e + (\lambda + 1)(\lambda + 4) - \frac{1}{4}c\right)z_2.$$

ただし、(1) の  $\lambda$  は  $\text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}\varpi_1$  によって  $\lambda$  を複素数と同一視したものである。また、(2) 右辺の  $z_2$  は上の Proposition の左辺の  $z_2 \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  を表す。□

**Remark 4.3** 定理の (1) において、まず  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  のカシミール元を  $c_{[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]} = \sum_j x_j y_j$  ( $\{x_j\}$  は  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  の基底で、 $\{y_j\}$  は  $\mathfrak{g}$  の不変内積に関してこれと双対な  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  の基底) と書く。  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  の元は  $\lambda$  を施してもゼロであることと、 $X \in \mathfrak{l}$  に対しては  $\Psi_\lambda(X) = \text{ad}(X) + \lambda(X)$  であることに注意すると、

$$-\frac{1}{2}c = -\frac{1}{2}\sum_j \Psi_{2\lambda+2\rho}(x_j)\Psi_0(y_j),$$

と書いてもよい。これと、 $t_{\varpi_1}$  の長さの2乗は  $4/3$  であることを用いると

$$\Psi_\lambda(z_1) = -\frac{1}{2}\Psi_{2\lambda+2\rho}(t_{\varpi_1})\Psi_0(3t_{\varpi_1}/4) - \frac{1}{2}\sum_j \Psi_{2\lambda+2\rho}(x_j)\Psi_0(y_j) \\ = -\frac{1}{2}\sum_j \Psi_{2\lambda+2\rho}(x'_j)\Psi_0(y'_j),$$

を得る(ただし、 $\{x'_j\}$  は  $\mathfrak{l}$  の基底で、 $\{y'_j\}$  は  $\mathfrak{g}$  の不変内積に関してこれと双対な  $\mathfrak{l}$  の基底。上の表示はこれらの基底の取り方によらないこともわかる)。これは  $\mathfrak{l}$  のカシミール元の一部 ( $x'_j$ ) を  $\Psi_{2\lambda+2\rho}$  でひねってカシミール作用素を作ったと思える。

このように (1) に関してはきれいな解釈が得られ古典型のように  $\Psi_{2\lambda+2\rho}$  と  $\Psi_0$  の組も現れているが、(2) に関してはそのような解釈や表示は得られていない。

*Proof.* エルミート対称型の  $(D_5, 1)$  に帰着して,  $\lambda$  でひねられた  $b$ -関数を計算することにより [11],  $\Psi_\lambda(z_j) \in D_{n^+}^L$  の  $I_\mu$  ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2$ ) におけるスカラー作用が得られる. また,  $\lambda(t_{\varpi_1})$  の値も計算できる.

$\Psi_\lambda(z_1)$	$-m_1^2 - 2m_2^2 - 2m_1m_2 + (\lambda + 1)m_1 + (2\lambda + 8)m_2$
$\Psi_\lambda(z_2)$	$m_2(m_1 + m_2 + 3)(m_2 - \lambda - 4)(m_1 + m_2 - \lambda - 1)$
$\lambda(t_{\varpi_1})$	$4\lambda/3$

この表の中の  $\lambda$  は, 同一視  $\text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}\varpi_1$  により複素数とみなしたものである.

まず,  $(\lambda + 1)z_1 + 2z_2 - z_1^2$  の作用は, 前の Proposition の証明の表より,

$$\begin{aligned} & (\lambda + 1)(m_1 + 2m_2) + 2 \cdot m_2(m_1 + m_2 + 3) - (m_1 + m_2)^2 \\ &= -m_1^2 - 2m_2^2 - 2m_1m_2 + (\lambda + 1)m_1 + (2\lambda + 8)m_2 \end{aligned}$$

とわかり, これは上の表における  $\Psi_\lambda(z_1)$  の作用と一致しているので, (1) の一つめの等号が示された. 同様にこれら 2 つの表を用いて残り 2 つの等号も示される.  $\square$

## 5 $E_7$ 型

ここでは  $(E_7, 7)$  型に対して一般パーマ加群上の Capelli 恒等式を考察する. この場合では,  $D_{n^+}^L \simeq (S(n^-) \otimes S(n^+))^L$  の生成系は,  $z_1, z_2, z_3$  の 3 つであるが, 通常の Capelli 恒等式が  $z_3$  に対して存在しないことは良く知られている [3]. つまり,  $Z(\mathfrak{l})$  から  $D_{n^+}^L$  への自然な写像は全射ではない. しかしながら,  $\Psi_\lambda(z_1), \Psi_\lambda(z_2), \Psi_\lambda(z_3)$  が  $Z(\mathfrak{l})$  の像に入っているかどうかは, 通常の Capelli 恒等式が存在しないことだけからはわからない.  $\Psi_\lambda(z_3)$  に対して一般パーマ加群上の Capelli 恒等式が存在するかも知れないし, 逆に  $\Psi_\lambda(z_2)$  に対して存在しないかも知れない.

結論として,  $(E_7, 7)$  型における一般パーマ加群上の Capelli 恒等式は,  $\Psi_\lambda(z_1)$  に対してのみ存在することがわかる. 通常の Capelli 恒等式を述べた後に, これを説明する.

$\mathfrak{g} = \text{Lie}(E_6)$  とし, 図 1 における塗られていない丸によって特徴づけられる極大放物型部分代数を  $\mathfrak{p}$  とするなどは, 前節と同様とする.  $\mathfrak{g}$  上の不変内積も単純ルートの長さが 2 となるように固定する.

前節と同様にして, より小さいエルミート対称型に帰着させて,  $z_1, z_2$  に対する通常の Capelli 恒等式を導くことが出来る. 具体的には,  $(E_7, 7)$  型から単純ルート  $\alpha_1$  を除いたエルミート対称型の  $(D_6, 1)$  型 (単純ルートの番号づけは変わる) に帰着させると,  $z_1, z_2 \in D_{n^+}^L$  の作用が計算できる.

### Proposition 5.1

$$(1) z_1 = e = -\text{ad}(t_{\varpi_7}),$$

$$(2) z_2 = 4e + \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{4}c.$$

ただし,  $c_{[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]}$  を  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  のカシミール元とし,  $c = \text{ad}(c_{[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]})$  である.

*Proof.*  $e, c, z_1, z_2, \text{ad}(t_{\varpi_7}) \in D_{n^+}^L$  の  $I_\mu$  ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2$ ) におけるスカラー作用は次のとおりである.

$e$	$m_1 + 2m_2$
$c$	$4(m_1^2 + m_2^2 + m_1m_2 + 12m_1 + 12m_2)/3$
$z_1$	$m_1 + 2m_2$
$z_2$	$m_2(m_1 + m_2 + 4)$
$\text{ad}(t_{\varpi_7})$	$-m_1 - 2m_2$

前節のようにこの表から (1), (2) と両辺の  $I_\mu$  ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2$ ) 上の作用が一致していることがわかる.

一般の  $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3$  に対しても作用が一致していることは,  $z_1, z_2$  は  $e, c$  の多項式で書けるという事実 (cf. Proposition 5.4) により保証される.  $\square$

一般の  $I_\mu$  ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3$ ) 上の  $z_2$  の作用が上の Proposition で分かる. また,  $z_3$  の作用も  $(E_7, 7)$  型において正則概均質ベクトル空間  $(L, \mathfrak{n}^+)$  の  $b$ -関数からわかるので, 次の Corollary が得られる.

**Corollary 5.2**  $e, c, z_1, z_2, z_3, \text{ad}(t_{\varpi_7}) \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の  $I_\mu$  ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3$ ) におけるスカラー作用は次のとおりである.

$e$	$m_1 + 2m_2 + 3m_3$
$c$	$4(m_1^2 + m_2^2 + m_1m_2 + 12m_1 + 12m_2)/3$
$z_1$	$m_1 + 2m_2 + 3m_3$
$z_2$	$m_2(m_1 + m_2 + 4) + m_3(2m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 12)$
$z_3$	$m_3(m_2 + m_3 + 4)(m_1 + m_2 + m_3 + 8)$
$\text{ad}(t_{\varpi_7})$	$-m_1 - 2m_2 - 3m_3$

$\square$

これに加えて,  $\Psi_\lambda(z_j)$  の  $I_\mu$  上の作用もわかれば, 前節のように  $\Psi_\lambda(z_j)$  を  $z_k \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の多項式として書くことが出来る.

**Proposition 5.3**  $\Psi_\lambda(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は,  $z_1, z_2, z_3 \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の多項式として次のように書ける.

$$(1) \Psi_\lambda(z_1) = (\lambda + 1)z_1 + 2z_2 - z_1^2$$

$$(2) \Psi_\lambda(z_2) = z_2(z_2 - (\lambda + 5)z_1 + (\lambda + 1)(\lambda + 5)) + z_3(-2z_1 + 3\lambda + 15)$$

$$(3) \Psi_\lambda(z_3) = -z_3\{z_3 - (\lambda + 9)z_2 + (\lambda + 9)(\lambda + 5)z_1 - (\lambda + 9)(\lambda + 5)(\lambda + 1)\}$$

*Proof.* まず,  $\Psi_\lambda(z_1)$  は階数 2 であるから, その作用は,  $e, c$  の多項式, したがって  $z_1, z_2$  の多項式として書ける. よって, エルミート対称型の  $(D_6, 1)$  型に帰着して  $\lambda$  でひねった  $b$ -関数を計算することにより, 上の Proposition のようにして (1) が得られる. 階数が 2 までならばこの方法が採れるが, 階数が 4 である  $\Psi_\lambda(z_2)$  に対してはこの方法は使えない.

$\Psi_\lambda(z_3)$  は  $(E_7, 7)$  型において  $\lambda$  でひねった  $b$ -関数を計算することにより,  $I_\mu$  ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3$ ) 上の作用がわかるので, 上の Corollary を用いて (3) が得られる.

さて,  $\Psi_\lambda(z_2)$  は 4 階であるから,  $z_1, z_1^2, z_1^3, z_1^4, z_2, z_1z_2, z_1^2z_2, z_2^2, z_3, z_1z_3$  の多項式で書ける. 未定係数の個数を考えると,  $\mu = \mu_1, 2\mu_1, 3\mu_1, 4\mu_1, \mu_2, \mu_1 + \mu_2, 2\mu_1 + \mu_2, 2\mu_2, \mu_3, \mu_1 + \mu_3$  に対して  $I_\mu$  上の作用がわかれば,  $\Psi_\lambda(z_2)$  をこれらの多項式で書ける. この  $I_\mu$  のうち,  $\mu_3$  の現れないものに対しては, エルミート対称型の  $(D_6, 1)$  型に帰着して作用を計算することが出来る. 一方,  $\mu_3$  の現れる 2 つに対しては, 現在のところ計算機を用いてしか作用が計算できない. こうして計算された  $\Psi_\lambda(z_2)$



の  $I_\mu$  上の作用は次のとおりである.

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$I_\mu$ 上の $\Psi_\lambda(z_2)$ の作用 ( $\mu = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3$ )
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
0	1	0	$5\lambda(\lambda + 4)$
1	1	0	$6(\lambda - 1)(\lambda + 4)$
2	1	0	$7(\lambda - 2)(\lambda + 4)$
0	2	0	$12(\lambda - 1)(\lambda + 3)$
0	0	1	$15(\lambda + 4)(\lambda + 8)$
1	0	1	$(\lambda + 8)(17\lambda + 48)$

ただし, 表の  $\lambda$  は  $\text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}\varpi_1$  によって  $\lambda$  を複素数と同一視したものである. この表を用いて  $\Psi_\lambda(z_2)$  を  $z_1, z_1^2, \dots, z_1 z_3$  の多項式で書くことができ, (3) が得られる.  $\square$

一般バーマ加群上の Capelli 恒等式とは,  $\Psi_\lambda(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) を  $Z(\mathfrak{l})$  の像として表す式であるから,  $\Psi_\lambda(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) を  $z_1, z_2, z_3 \in D_{n^+}^L$  の多項式として書くことはできたがこれではまだ不足である. 既に述べたように  $Z(\mathfrak{l})$  から  $D_{n^+}^L$  への自然な写像は全射ではないからである. [3] ではその像は決定されていないが, その像は, 実対称空間上での不変微分作用素の同時固有関数を研究した Ochiai [7] により決定された. [3] と [7] では, EIV 型実対称空間  $(E_6/F_4)$  を考えている ( $(E_7, 7)$  型において,  $L \simeq \mathbb{C} \times E_6$  の  $n^+$  上の作用は開軌道をもつが, その開軌道上の点における  $L$  の固定化部分群は  $F_4$  に同型であることに注意) ため, ここでの設定に合わせて次の命題に像の決定について述べる.

**Proposition 5.4 (Ochiai [7])**  $(E_7, 7)$  型において,  $Z(\mathfrak{l})$  の  $\text{ad} : Z(\mathfrak{l}) \rightarrow D_{n^+}^L$  による像は次でえられる.

$$\text{ad } Z(\mathfrak{l}) = \mathbb{C}[e] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[w_2, w_2 w_3, w_3^2, w_3^3 - w_3].$$

ここで  $w_2, w_3$  は,

$$w_2 = -3z_2 + e(e + 12) + 27 = \frac{3}{4}c + 27,$$

$$w_3 = \frac{1}{162}(27z_3 - e^3 - 36e^2 - 369e + 3ew_2 + 36w_2) - 6,$$

である.  $\mathbb{C}[e]$  の部分が  $\mathfrak{l}$  の中心の像であり,  $\mathbb{C}[w_2, w_2 w_3, w_3^2, w_3^3 - w_3]$  の部分が  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  の像である.

**Remark 5.5** (1) 講演の時の  $w_3$  の定義には, その時点で気づいていなかった計算ミスと, それとは別の板書のミスがあった. ここでの定義が正しい.

(2) 落合氏は EIV 型実対称空間  $(E_6/F_4)$  を扱っているため, 落合氏の結果は  $\mathbb{C}[w_2, w_2 w_3, w_3^2, w_3^3 - w_3]$  の部分の結果である.

(3)  $D_{n^+}^L$  の生成系としては §2 より  $z_1, z_2, z_3$  がとれるが, この Proposition より  $e, w_2, w_3$  も生成系である. 従って,

$$\begin{aligned} \text{ad } Z(\mathfrak{l}) &= \mathbb{C}[e] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[w_2, w_2 w_3, w_3^2, w_3^3 - w_3] \\ &\subset \mathbb{C}[e, w_2, w_3] \\ &= \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] = D_{n^+}^L \end{aligned}$$

という関係がある.

(4)  $w_3 \notin \text{ad } Z(\mathfrak{l})$  だから  $z_3 \notin \text{ad } Z(\mathfrak{l})$  である. 証明方法は異なるが, これは Helgason [3] において証明された.

*Proof.* Ochiai [7] に沿って略証を記す.  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  とおく. 計算が困難な  $Z(\mathfrak{l})$  の生成系を  $\text{ad} : Z(\mathfrak{l}) \rightarrow D_{\mathfrak{n}^+}^L$  でうつすのではなく, Harish-Chandra 同型  $Z([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]) \simeq S(\mathfrak{h}')^W$  を用いて,  $S(\mathfrak{h}')^W$  の生成系を  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  にうつすというのが方針である. ここで  $S(\mathfrak{h}')^W$  は対称代数  $S(\mathfrak{h}')$  のワイル群不変元全体を表す.

次の事実を用いる.  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  の 27 次元表現のウェイトからなる集合を, ルートとコルートを同一視して  $\mathfrak{h}'$  にうつしたものを  $M(\subset \mathfrak{h}')$  とおく.

$$j_M^m = \sum_{x \in M} x^m \quad (m \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

と定めるとワイル群不変元となるが, 集合

$$\{j_M^m \mid j = 2, 5, 6, 8, 9, 12\}$$

は,  $S(\mathfrak{h}')^W$  の代数独立な生成系であり,  $S(\mathfrak{h})$  の斉次元で構成される.

ここでは記号の簡単のため, 上の  $M$  の代わりに各元を 6 倍した集合を  $M$  で表す.

$$\begin{aligned} M &= \{y_i + y, y_i - y \mid i = 1, \dots, 6\} \cup \{-y_i - y_j \mid 1 \leq i < j \leq 6\}, \\ y &= -3(h_1 + 2h_3 + 3h_4 + 2h_5 + h_6 + 2h_2), \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで,  $h_j$  は単純ルート  $\alpha_j$  に対応するコルートである.

$Z([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}])$  の元の  $\text{ad}$  を通しての  $I_\mu$  上の作用はスカラーであるから, 最高ウェイトベクトルへの作用を調べればよい. したがって, 3 角分解によって  $U(\mathfrak{h}')$  へ射影して  $\mu$  を施せばそのスカラーが得られる. この射影と Harish-Chandra 同型の関係は,

$$\begin{array}{ccc} \text{proj} & \text{id} - \rho_{\Delta^+} & \\ Z([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]) & \longrightarrow U(\mathfrak{h}') & \xrightarrow{\cong} U(\mathfrak{h}') : \text{Harish-Chandra 同型} \\ & \downarrow \mu & \\ & \mathbf{C} & \end{array}$$

となっているので,  $S(\mathfrak{h}')$  の生成元  $j_M^m$  に対応する  $Z([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}])$  の生成元の  $I_\mu$  上の作用は,

$$g_m := \mu((\text{id} + \rho_{\Delta^+})(j_M^m)) = \sum_{x \in M} (\mu(x) + \rho_{\Delta^+}(x))^m \in \mathbf{C}[m_1, m_2, m_3]$$

で得られる. ここで,  $\rho_{\Delta^+}$  は  $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$  の正ルートの和の半分である.

他方 Corollary 5.2 により,  $e, c, z_3$  の  $I_\mu$  上の作用がわかっているので,  $w_2, w_3$  の作用もわかる:

$w_2$	$m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 + 12(m_1 + m_2) + 27$
$w_3$	$\{2(m_1^3 - m_2^3) + 3m_1 m_2(m_1 - m_2) + 36(m_1^2 - m_2^2) + 144(m_1 - m_2)\} / 162$

$w_2$  は  $m_1, m_2$  に関して対称,  $w_3$  は  $m_1, m_2$  に関して交代となっているような定義である.

さて,

$$u_2 = w_2, \quad u_5 = w_2 w_3, \quad u_6 = w_3^2, \quad u_9 = w_3^3 - w_3,$$

とおき, これらの  $I_\mu$  上のスカラー作用 ( $m_1, m_2, m_3$  の多項式となる) も同じ記号で表す. このとき, 計算機を用いて次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} g_2 &= 144(2u_2 + 63), \\ g_5 &= -1866240u_5, \\ g_6 &= 62208(5832u_6 + 4u_2^3 + 322u_2^2 + 9702u_2 + 102357), \\ g_8 &= 248832(171072u_2u_6 + 4164048u_6 + 44u_2^4 + 4088u_2^3 + 161700u_2^2 \\ &\quad + 3213000u_2 + 25741233), \\ g_9 &= -3386105856(972u_9 + 3u_2^2u_5 + 175u_2u_5 + 2646u_5), \\ g_{12} &= 107495424(323116128u_6^2 + 2659392u_2^3u_6 + 3801285936u_2u_6 + 32788571256u_6 \\ &\quad + 169787016u_2^2 + 228u_2^6 + 29036u_2^5 + 1589070u_2^4 + 49864248u_2^3 \\ &\quad + 991041534u_2^2 + 11978203860u_2 + 66338191539). \end{aligned}$$

これにより, 多項式環  $\mathbb{C}[m_1, m_2]$  の中で,  $\mathbb{C}[g_2, g_5, g_6, g_8, g_9, g_{12}] = \mathbb{C}[u_2, u_5, u_6, u_9]$  が成立することがわかる. したがって,  $Z(\mathfrak{l}, \mathfrak{l})$  の  $\text{ad}$  による  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  への像は,  $\mathbb{C}[w_2, w_2 w_3, w_3^2, w_3^3 - w_3]$  であることがわかる.  $\mathfrak{l}$  の中心の作用はオイラー作用素 (の定数倍) であるから, 合わせて Proposition の主張を得る.  $\square$

上の Proposition では  $Z(\mathfrak{l})$  の  $\text{ad} : Z(\mathfrak{l}) \rightarrow D_{\mathfrak{n}^+}^L$  による像  $\text{ad } Z(\mathfrak{l})$  を,  $\mathbb{C}[e]$  と  $\mathbb{C}[w_2, w_2 w_3, w_3^2, w_3^3 - w_3]$  のテンソル積で表したので  $e$  による次数が入り,  $g_k \in \mathbb{C}[w_2, w_3]$  のとき,  $\sum_k e^k g_k \in \text{ad } Z(\mathfrak{l}) \iff g_k \in \mathbb{C}[w_2, w_2 w_3, w_3^2, w_3^3 - w_3]$  (for all  $k$ ) が成立する. これにより,  $D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の元が  $Z(\mathfrak{l})$  の像  $\text{ad } Z(\mathfrak{l})$  に入るかどうかの判定が容易になる.

さて, この場合の一般パーマ加群上の Capelli 恒等式を考える. 既に  $\Psi_\lambda(z_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) を  $z_j \in D_{\mathfrak{n}^+}^L$  の多項式としては書いてあるので, それが  $Z(\mathfrak{l})$  の像  $\text{ad } Z(\mathfrak{l})$  に入るかどうかを調べる.

まず  $\Psi_\lambda(z_2) = z_2(z_2 - (\lambda + 5)z_1 + (\lambda + 1)(\lambda + 5)) + z_3(-2z_1 + 3\lambda + 15)$  に対して,  $z_1, z_2 \in \text{ad } Z(\mathfrak{l})$  に注意すると,  $\Psi_\lambda(z_2) \in \text{ad } Z(\mathfrak{l}) \iff z_3(-2z_1 + 3\lambda + 15) \in \text{ad } Z(\mathfrak{l})$ . ここで,  $z_1 = e$  による次数づけを考えると, この必要条件が  $z_1 z_3 \in \text{ad } Z(\mathfrak{l})$  であり, 先に述べたことより, それは  $z_3 \in \text{ad } Z(\mathfrak{l})$  の必要十分条件である. これは不成立だから  $\Psi_\lambda(z_2) \notin \text{ad } Z(\mathfrak{l})$  である.

次に  $\Psi_\lambda(z_3)$  に対しても同様に考え,  $e^3$  の部分を考えることで  $\Psi_\lambda(z_3) \notin \text{ad } Z(\mathfrak{l})$  がわかる.

また  $\Psi_\lambda(z_1)$  に対しては,  $(2\lambda + 2\rho)(t_{\varpi_7}) = 3\lambda + 27$  であることを用いると, Proposition 5.3 (1) と Proposition 5.4 の  $w_2$  の定義式における  $z_2, e$  と  $c$  の関係式から,  $Z(\mathfrak{l})$  の像として書けることが得られる.

以上をまとめて次の定理を得る.

### Theorem 5.6

- (1)  $\Psi_\lambda(z_1) = (\lambda + 1)z_1 + 2z_2 - z_1^2 = -\frac{1}{3}\Psi_{2\lambda+2\rho}(t_{\varpi_7})\Psi_0(t_{\varpi_7}) - \frac{1}{2}c$
- (2)  $\Psi_\lambda(z_2) = z_2(z_2 - (\lambda + 5)z_1 + (\lambda + 1)(\lambda + 5)) + z_3(-2z_1 + 3\lambda + 15) \notin D_{\mathfrak{n}^+}^L$
- (3)  $\Psi_\lambda(z_3) = -z_3\{z_3 - (\lambda + 9)z_2 + (\lambda + 9)(\lambda + 5)z_1 - (\lambda + 9)(\lambda + 5)(\lambda + 1)\} \notin D_{\mathfrak{n}^+}^L$ .

**Remark 5.7** 定理の (1) は前節と同様に,  $t_{\omega_7}$  の長さの 2 乗は  $3/2$  であることから,  $\mathfrak{g}$  のカシミール元的一方を  $\Psi_{2\lambda+2\rho}$  でひねってカシミール作用素を作ったと思える.

このように (1) に関しては再びきれいな解釈が得られ, 古典型のように  $\Psi_{2\lambda+2\rho}$  と  $\Psi_0$  の組も現れているが, (2) では通常の Capelli 恒等式は存在するのに, 一般バーマ加群上の Capelli 恒等式は存在しない.

## 参考文献

- [1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5, et 6, Hermann, Paris (1968).
- [2] A. Capelli, Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques, Math. Ann., **37** (1890), 1–37.
- [3] S. Helgason, Some results on invariant differential operators on symmetric spaces, Amer. J. Math., **114** (1992), 789–811.
- [4] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, Math. Ann., **290** (1991), 565–619.
- [5] J. E. Humphreys, Finite and infinite dimensional modules for semisimple Lie algebra, Lie theories and their applications, Queen’s papers in Pure and Appl. Math. No. 48, Queen’s Univ., Kingston, Ont., (1978), 1–64.
- [6] V. G. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, J. Algebra, **64** (1980), 190–213.
- [7] H. Ochiai, Eigenspace representations of symmetric spaces of exceptional types, a lecture in the workshop “Representation Theory of Lie Groups — in honor of Professor Takeshi Hirai”, RIMS, Kyoto University, (Feb., 2002).
- [8] W. Schmid, Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermiteschen symmetrischen Räumen, Invent. Math. **9** (1969), 61–80.
- [9] H. W. Turnbull, Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators, Proc. Edinb. Math. Soc., **8** (1948), 76–86.
- [10] T. Umeda, On Turnbull identity for skew-symmetric matrices, Proc. Edinb. Math. Soc., **43** (2000), 379–393.
- [11] A. Wachi, Capelli type identities on certain scalar generalized Verma modules, J. Math. Kyoto, **40** (2000), 705–727.
- [12] A. Wachi, Capelli type identities on certain scalar generalized Verma modules II, J. Math. Soc. Japan, to appear.