数理解析研究所講究録 1321 巻 2003 年 108-113

LOCAL THETA CORRESPONDENCES AND PLANCHEREL MEASURES

市野 篤史 (ICHINO, ATSUSHI)*

1. INTRODUCTION

このノートでは, p 進体上の局所テータ対応における Plancherel 測度の対応について考察する. 筆者は [4] において, ユニタリ群よりなる reductive dual pair $(U(n,n),U(n,n))$ について, 局所テータ対応をある種の緩増加表現に対して R 群を用いて具体的に記述した. この結果をさらに一般化, つまり離散系列表現に関する対応を既知として, 緩増加表現に関する対応を決定することを考える. まず最初に, 緩増加表現を R 群の言葉で表すために絡作用素を正規化しなくてはならない. このために Plancherel 測度の対応を具体的に計算する必要が生じた. 以下では, この計算結果と手法を解説する. また簡単な応用として, supercuspidal 表現に対して, ある種の誘導表現の可約点から first occurrence index の情報が得られるので, これについても述べる.

2. 局所テータ対応

F を p 進体として, 自明でない F の指標 ψ_F を固定する. $\omega=\omega_{\psi_F}$ を Mp_r の Weil 表現とする. 但し,

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^1 \longrightarrow Mp_r \longrightarrow Sp_r \longrightarrow 1$$

は metaplectic extension である. $G\times G' \subset Sp_r$ を reductive dual pair とする.

例 2.1.

- $G=O(V),\quad G'=Sp_{n'}.$ $\qquad$ (V 二次形式付き空間)
- $G=U(V),\quad G'=U(V').$ $\qquad$ (V エルミート形式付き空間) (V' 歪エルミート形式付き空間)

以下では splitting $G\times G' \hookrightarrow Mp_r$ が存在すると仮定する. 次の定理は Howe [3] によって予想され, Waldspurger [10] により $p\neq 2$ の仮定のもとで一般に証明された.

定理 2.2 (局所テータ対応). π を G の既約許容表現で

$$\mathrm{Hom}_G(\omega|_G,\pi)\neq 0$$

をみたすものとする. このとき, G' の既約許容表現 π' で

$$\mathrm{Hom}_{G\times G'}(\omega|_{G\times G'},\pi\otimes\pi')\neq 0$$

をみたすものが存在し, π' の同型類は一意的に定まる.

*大阪市立大学大学院理学研究科.

この定理より, 写像

$$\theta : \Pi(G) \longrightarrow \Pi(G') \cup \{0\}$$

が定まる. 但し $\Pi(G)$ は G の既約許容表現の同型類全体の集合である. 我々は, この写像 θ を具体的に記述をすることに関心がある.

3. 主結果

F を p 進体, E を F の二次拡大とする. $\epsilon_{E/F}$ によって局所類体論で二次拡大 E/F に対応する $F^\times$ の指標を表す.

$$V_n = (E^m, Q)$$

を Witt 指数 n の E 上の m 次元エルミート形式付き空間,

$$V'_{n'} = (E^{m'}, \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{n'} \\ -\mathbf{1}_{n'} & \end{pmatrix})$$

を Witt 指数 n' の E 上の m' 次元歪エルミート形式付き空間とする. 但し $m' = 2n'$ である. 以下, reductive dual pair $(H, H') = (U(V_n), U(V'_{n'}))$ を考える. $E^\times$ の指標 χ で, $\chi|_{F^\times} = \epsilon_{E/F}^m$ となるものを固定する. このとき, Kudla [6] は splitting $H \times H' \hookrightarrow Mp_{mm'}$ を構成した. この splitting は ψ_F と χ の取り方によることに注意する.

$l \in \mathbb{N}$ を固定し,

$$V_{n+l} = (E^{m+2l}, \begin{pmatrix} & & \mathbf{1}_l \\ & Q & \\ \mathbf{1}_l & & \end{pmatrix})$$

を Witt 指数 $n+l$ の E 上の $m+2l$ 次元エルミート形式付き空間,

$$V'_{n'+l} = (E^{m'+2l}, \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{n'+l} \\ -\mathbf{1}_{n'+l} & \end{pmatrix})$$

を Witt 指数 $n'+l$ の E 上の $m'+2l$ 次元歪エルミート形式付き空間とする. 我々は, さらに reductive dual pair $(G, G') = (U(V_{n+l}), U(V'_{n'+l}))$ を考える. $P = MU$ を G の極大放物型部分群で, その Levi 部分群 M が $GL_l(E) \times H$ と同型なものとする. 同様に $P' = M'U'$ を G' の極大放物型部分群で, その Levi 部分群 M' が $GL_l(E) \times H'$ と同型なものとする.

π, π', σ をそれぞれ H, H', $GL_l(E)$ の離散系列表現とする. $s \in \mathbb{C}$ に対し $\sigma_s = \sigma \otimes |\det|_E^s$ とおき, 誘導表現 $I(\sigma_s \otimes \pi) = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma_s \otimes \pi)$ と $I'(\chi\sigma_s \otimes \pi') = \mathrm{Ind}_{P'}^{G'}(\chi\sigma_s \otimes \pi')$ を考える.

$$w = \begin{pmatrix} & & \mathbf{1}_l \\ & \mathbf{1}_m & \\ \mathbf{1}_l & & \end{pmatrix} \in G, \quad w' = \left(\begin{array}{cc|cc} & & \mathbf{1}_l & \\ & \mathbf{1}_{n'} & & \\ \hline -\mathbf{1}_l & & & \\ & & & \mathbf{1}_{n'} \end{array}\right) \in G'.$$

とおく. $I(\sigma_s \otimes \pi)$ の正則な section $f^{(s)}$ に対し, 絡作用素を

$$M(w, \sigma_s \otimes \pi) f^{(s)}(g) = \int_U f^{(s)}(w^{-1}ug)\, du$$

によって定義する．この積分は $\mathrm{Re}(s)>0$ ならば絶対収束して，$\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続される．さらに $\mu(\sigma_s\otimes\pi)$ を Plancherel 測度とすると，

$$M(w^{-1},w(\sigma_s\otimes\pi))M(w,\sigma_s\otimes\pi)=\mu(\sigma_s\otimes\pi)^{-1}\gamma(G/M)^2$$

が成り立つ．G' に関しても同様の等式

$$M(w'^{-1},w'(\chi\sigma_s\otimes\pi'))M(w',\chi\sigma_s\otimes\pi')=\mu(\chi\sigma_s\otimes\pi')^{-1}\gamma(G'/M')^2$$

が成り立つ．

$\psi=\psi_F\circ\mathrm{tr}_{E/F}$ によって E の指標を定める．σ の L 因子と ϵ 因子を，それぞれ $L(s,\sigma)$, $\epsilon(s,\sigma,\psi)$ と書く．また，$a\in GL_l(E)$ に対して ${}^t\bar{\sigma}^{-1}(a)=\sigma({}^t\bar{a}^{-1})$ とおく．

定理 3.1.

$$\mathrm{Hom}_{H\times H'}(\omega|_{H\times H'},\tilde{\pi}\otimes\pi')\neq 0$$

と仮定する．但し $\tilde{\pi}$ は π の反傾表現を表す．このとき

$$c=\frac{m'-m+1}{2}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&\mu(\sigma_s\otimes\pi)\gamma(G/M)^{-2}\\&=\mu(\chi\sigma_s\otimes\pi')\gamma(G'/M')^{-2}\\&\times\epsilon(s+c,\sigma,\bar{\psi})L(1-s-c,{}^t\bar{\sigma}^{-1})L(s+c,\sigma)^{-1}\\&\times\epsilon(-s+c,{}^t\bar{\sigma}^{-1},\psi)L(1+s-c,\sigma)L(-s+c,{}^t\bar{\sigma}^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

が成り立つ．

この定理により，絡作用素 $M(w,\sigma_s\otimes\pi)$ と $M(w',\chi\sigma_s\otimes\pi')$ の正規化因子の間の関係が分かる．さらにある仮定の下では (例えば σ が Steinberg 表現でなければよい)，以下で述べる命題 4.3 と補題 4.4 より，誘導表現 $I(\sigma\otimes\pi)$ と $I'(\chi\sigma\otimes\pi')$ の既約成分がそれぞれテータ対応で対応していることが分かり，それは R 群を用いて (標準的にではないが) 記述することもできる．しかし一般の緩増加表現に対しては，例えば G と G' で R 群の位数が異なる場合に困難が生じ，現時点では問題の解決に至っていない．

4. 証明

計算の手法は [4] で用いたものと本質的に変わらないので，概略だけを述べる．

$H\times H'$ の Weil 表現 ω_0 を $\mathcal{S}_0=\mathcal{S}(M_{m,n'}(E))$ 上の Schrödinger 模型として実現する．同様に，$G\times G'$ の Weil 表現 ω を $\mathcal{S}=\mathcal{S}(M_{m+2l,n'+l}(E))$ 上の Schrödinger 模型として実現する．$G\times G'$ 準同型

$$\begin{aligned}F:\omega&\longrightarrow\mathrm{Ind}_{\Delta GL_l(E)(H\times H')(U\times U')}^{G\times G'}(\chi\otimes\omega_0\otimes\mathbf{1}_{U\times U'})\\\Phi&\longmapsto[(g,g')\mapsto F(g,g';\Phi)]\end{aligned}$$

$$F(g,g';\Phi)(x_0) = \int_{v_1\in M_l(E)}\int_{v_2\in M_{l,n'}(E)} \omega(g,g')\Phi\begin{pmatrix} v_1 & v_2\\ 0 & x_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\psi(\mathrm{tr}(v_1))\,dv_2\,dv_1$$

によって定める．但し，$g\in G$, $g'\in G'$, $\Phi\in\mathcal{S}$, $x_0\in M_{m,n'}(E)$ である．

仮定より

$$\mathrm{Hom}_{H\times H'}(\omega_0\otimes\pi,\pi')\simeq\mathrm{Hom}_{H\times H'}(\omega_0,\tilde{\pi}\otimes\pi')\neq 0$$

である．ゼロでない $H\times H'$ 準同型 $t:\omega_0\otimes\pi\to\pi'$ を固定し，t を自然に

$$t:\omega_0\otimes\sigma_s\otimes\pi\longrightarrow\sigma_s\otimes\pi'$$

に拡張する．$g'\in G'$, $\Phi\in\mathcal{S}$, $I(\sigma_s\otimes\pi)$ の正則な section $f^{(s)}$ に対して

$$T(g';\Phi,f^{(s)})=\frac{1}{L(s+c,\sigma)}\int_{UH\backslash G} t(F(g,g';\Phi),f^{(s)}(g))\,dg$$

とおく．

補題 4.1. $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ のとき $T(g';\Phi,f^{(s)})$ は絶対収束して，$\mathbb{C}$ 全体に正則に解析接続される．

証明は，岩澤分解を使って Godement-Jacquet [1] による $GL_l(E)$ の zeta 積分に積分を変形すればよい．この補題により，T は $G\times G'$ 準同型

$$T:\omega\otimes I(\sigma_s\otimes\pi)\longrightarrow I'(\chi\sigma_s\otimes\pi')$$

を定めていることが分かる．さらに関数等式を用いると，T の別の積分表示も得られる．

補題 4.2. $g\in G$, $g'\in G'$, $\Phi\in\mathcal{S}$, $x_0\in M_{m,n'}(E)$ に対し

$$\hat{F}(g,g';\Phi)(x_0)=\int_{v_2\in M_{l,n'}(E)}\omega(g,g')\Phi\begin{pmatrix}\mathbf{1}_l & v_2\\ 0 & x_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}dv_2$$

とおく．このとき，$\mathrm{Re}(s)\ll 0$ に対し

$$T(g';\Phi,f^{(s)})=\omega_\sigma(-1)\epsilon(s+c,\sigma,\psi)^{-1}L(1-s-c,\tilde{\sigma})^{-1}\times\int_{UH\backslash G} t(\hat{F}(g,g';\Phi),f^{(s)}(g))\,dg$$

が成り立つ．

補題 4.1, 4.2 を用いて直接計算することにより，次が得られる．

命題 4.3.

$$\begin{aligned}&\gamma^l M(w',\chi\sigma_s\otimes\pi')T(\Phi,f^{(s)})\\&=\omega_\sigma(-1)\epsilon(-s+c,{}^t\bar\sigma^{-1},\psi)L(1+s-c,\sigma)L(s+c,\sigma)^{-1}\\&\times T(\Phi,M(w,\sigma_s\otimes\pi)f^{(s)})\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し γ は *Weil constant,* ω_σ は σ の中心指標である.

この命題を 2 回適用することによって, 定理 3.1 は得られる. ここで, 最後に $T(\Phi,f^{(s)})$ を cancel するために, 次の補題を用いた.

補題 4.4. $f^{(s)}\neq 0$ を $I(\sigma_s\otimes\pi)$ の正則な *section* で, その K への制限は s によらないものとする. このとき, $\Phi\in\mathcal{S}$, $\tilde v\in\tilde\sigma$, $\tilde u'\in\tilde\pi'$ で

$$\langle T(1;\Phi,f^{(s)}),\tilde v\otimes\tilde u'\rangle\sim L(1-s-c,\tilde\sigma)^{-1}$$

となるものが存在する.

5. 応用

この章では π, π' は supercuspidal, σ は ユニタリ supercuspidal 表現で $\sigma\simeq{}^t\bar\sigma^{-1}$ をみたすと仮定する. この場合, 誘導表現 $I(\sigma_s\otimes\pi)$ の可約点は, Plancherel 測度 $\mu(\sigma_s\otimes\pi)$ によって完全に決定される. この事実を用いて, 可約点と first occurrence index の関係を調べる.

定理 5.1 (Harish-Chandra [8]).

(i) $s\notin\sqrt{-1}\mathbb{R}$ に対し, $\mu(\sigma_s\otimes\pi)\neq 0$ が成り立つ.

(ii) $I(\sigma\otimes\pi)$ は既約 $\Longleftrightarrow\mu(\sigma\otimes\pi)=0$.

(iii) $s_0\in\mathbb{R}_{>0}$ に対し,
$I(\sigma_{s_0}\otimes\pi)$ は可約 $\Longleftrightarrow\mu(\sigma_s\otimes\pi)$ は $s=s_0$ で極を持つ.

定理 5.2 (Silberger [9]). $I(\sigma_{s_0}\otimes\pi)$ が可約となる $s_0\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ がただひとつ存在する.

以下,

$$\mathrm{Hom}_{H\times H'}(\omega|_{H\times H'},\tilde\pi\otimes\pi')\neq 0$$

と仮定する. π, π' は supercuspidal としているので, π' を与えれば m は一意的に定まることに注意する [5], [7]. $l=1$, $\sigma=\mathbf{1}$ に対し定理 3.1 を適用すると,

$$\mu(\mathbf{1}_s\otimes\pi)\sim\mu(\chi_s\otimes\pi')\frac{\zeta(1-s-c)}{\zeta(s+c)}\frac{\zeta(1+s-c)}{\zeta(-s+c)}$$

となる. 但し $\zeta(s)=L(s,\mathbf{1})=(1-q_E^{-s})^{-1}$ とおいた. 一方

$$\frac{\zeta(1-s-c)}{\zeta(s+c)}\frac{\zeta(1+s-c)}{\zeta(-s+c)}$$

の $\mathbb{R}$ 上の極は

$$s=\pm(c-1),$$

$\mathbb{R}$ 上の零点は

$$s=\pm c$$

であり, これらは $m \neq m'$ ならば cancel しない. よって, 定理 5.1, 5.2 から次が得られる.

系 5.3. $m \neq m'$ と仮定する. $s_0' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $I'(\chi_{s_0'} \otimes \pi')$ が可約となるようにとる. このとき

$$s_0' = |c|,$$

つまり

$$m \in \{m' + 1 \pm 2s_0'\}$$

が成り立つ.

References

[1] R. Godement and H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics 260, Springer-Verlag, 1972.

[2] M. Harris, S. S. Kudla, and W. J. Sweet, Jr., *Theta dichotomy for unitary groups*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 941–1004.

[3] R. Howe, *θ-series and invariant theory*, Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. 33-1, Amer. Math. Soc., 1979, pp. 275–285.

[4] A. Ichino, *On the local theta correspondence and R-groups*, preprint, 2002.

[5] S. S. Kudla, *On the local theta-correspondence*, Invent. Math. **83** (1986), 229–255.

[6] ———, *Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs*, Israel J. Math. **87** (1994), 361–401.

[7] C. Mœglin, M.-F. Vignéras, and J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Mathematics 1291, Springer-Verlag, 1987.

[8] A. J. Silberger, *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Princeton University Press, 1979.

[9] ———, *Special representations of reductive p-adic groups are not integrable*, Ann. of Math. **111** (1980), 571–587.

[10] J.-L. Waldspurger, *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$*, Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I, Weizmann, 1990, pp. 267–324.

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138

E-mail address: `ichino@sci.osaka-cu.ac.jp`