

Introduction to p -adic multiple zeta values

京大数理研 古庄英和 (Hidekazu Furusho)*

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.
E-mail: furusho@kurims.kyoto-u.ac.jp

要約: 多重ゼータ値の p 進版を考えてみたのびその紹介をします。

Ch 1. 何故 p 進多重ゼータ値は簡単に定義できないのか?

(ふつうの) 多重ゼータ値とは次で定義される実数のこととさせていただきます。
$$\zeta(k_1, \dots, k_m) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}}$$

ここで, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $k_m > 1$ としていきます。これは $k_m = 1$ のときは発散してしまいますが, $k_m > 1$ のときは必ず収束してくれます。

多重ゼータ値は現在様々な数学者達 (But 物理学者達) によって研究されていきますが, これの p 進版 (p : 素数) を考えていいる人はいないみたいだ, たのび p 進多重ゼータ値というものを考えたら何か面白い話が出来ないだろうかと思っ たのが私の p 進多重ゼータ値の研究の発端です。 p 進版を考えるとあたってまず最初に直面するのは p 進多重ゼータ値をどう定義するかという問題でしょう。恐らく安直に浮かぶ案として「上の式の各項を \mathbb{R} の元でなく \mathbb{Q}_p の元と思いい \mathbb{Q}_p 内で和をと, てその極

* 著者は日本学術振興会から援助をして頂いておられます。

限値として p 進多重ゼータ値を定義してみようか」とい
 うのが夢がされるでしょうが残念なことに「この無限和は \mathbb{Q}_p
 内では絶対に収束してくれません」。その理由を簡単に説明し
 ますと、このような無限和が \mathbb{Q}_p 内で収束するためにはずうと
 先の項は p 進的に 0 に収束しなくてはならないはず。とこ
 が $\left\{ \frac{1}{n_1 k_1 \dots n_m k_m} \right\}$ は \mathbb{R} 内では 0 に収束してくれていなのに \mathbb{Q}_p 内
 では全然 0 に近付いてくれません。だから収束しないのです。
 これが Ch1 のタイトル「なぜ p 進多重ゼータ値は簡単に定義
 できないのか？」の答えです。

というわけなので、 p 進多重ゼータ値をうまく定義するた
 めには(ぶつうの)多重ゼータ値の別解釈が必要とされます。今
 回私が採用した多重ゼータ値の解釈とは次です。

「多重ゼータ値は(一変数)多重ポリログの $z=1$ での特殊値

である。」

 (*)

他にも、「多重ゼータ値は多重ゼータ関数の格子点での特殊値

である。」とか「多重ゼータ値は結び目不変量である。」とか

「多重ゼータ値は射影直線引く点の基本群の周期である。」

とか色々別種の解釈もあるでしょうが、(*)の p 進化, 即ち

「 p 進多重ポリログというものを考え、その $z=1$ での値

として p 進多重ゼータ値を定義する。」

が私のここでの方針です。

(一変数)多重ポリログとは下の級数で定義される関数のことをさします。

$$Li_{k_1, \dots, k_m}(z) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}}$$

ここで、 $k_i \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ としています。($k_m = 1$ であっても構わない。)

これは、特に $m=1$ のときふつうのポリログになっています。

これが $|z| < 1$ のとき絶対収束していることを見るのはたやすいでしょう。「この $z \rightarrow 1$ での極限値が $k_m > 1$ のとき多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \dots, k_m)$ に収束する」というのが(世)のくわしい説明です。私

は上の多重ポリログの定義式において $z \in \mathbb{C}$ を $z \in \mathbb{C}_p$ に置き換えて \mathbb{C}_p 内で和をとって考えたものを p 進多重ポリログの定義に

しました。面白いことにこの p 進多重ポリログも半径 1 の開円板内部、即ち $|z|_p < 1$ のとき、(ここで $|\cdot|_p$ とは \mathbb{C}_p の標準的な乗法付値のこと)、 \mathbb{C}_p の位相で収束しています。そこで \mathbb{C} と同様に

するためにこの p 進多重ポリログの $z=1$ での極限値として p 進多重ゼータ値を定義してみようと思いたくなるわけですが

このままではまおしいです。何故かという $z=1$ は $\{z: |z|_p < 1\}$ から結構遠いからです。(私の「っ」てることが

よく分からない読者は右の図と p 進の世界で

起こる $\{ |z|_p < 1 \} \cap \{ |z-1|_p < 1 \} = \emptyset$ という悲劇を思い浮かべてみて

下さい。)そこで困った私は p 進多重ポリログもある方法で全平面に p 進解析接続してやることにしました。ところがこの

ときガウンチがあまりにも梁山派任してしまうという災難に



遭遇してしまうのですが、それにも動じず特異点 $z=1$ に近付くとその呪縛から逃れらぬことなどなどを次頁で説明していきます。p進多重ゼータ値はふつうの多重ゼータ値とちがって簡単に定義できずその定義の仕方自身に既に十分に味のあるだけの面白さもあり、きっと面白い研究対象だと思います。私の研究が多重ゼータ値と同様数学の領域の1つに成長していつか欲しいなと願っています。

Ch2. 多重ゼータ値 vs. p進多重ゼータ値

この章では各頁を右側と左側に分けて、左側は今まで考えらされてきたふつうの多重ゼータ値に関する話をし右側は私が考えたp進多重ゼータ値の話をすることにしました。照らし合わせてみると面白いと思います。

① MPL: $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ に対して(-変数)多重ポリログ(略して MPL^*)とは次で定まる関数のことである。

$$L_{k_1, \dots, k_m}(z) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}}$$

② 収束: MPL は $|z| < 1$ で収束する。pf 証明は容易。

① p-adic MPL: $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_p$ に対して(-変数)p進多重ポリログ(略して p-adic MPL^*)とは次で定まる関数のことである。

$$L_{k_1, \dots, k_m}(z) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{z^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}}$$

② 収束: p-adic MPL は $|z|_p < 1$ で収束する。pf 証明は容易。

* MPLとは multiple polylogarithm の略です。これは $m=1$ のときは、(古典的な)ポリログ (Colemanの)p進ポリログ [Col] になっています。

③ 微分関係式: MPL の間には次の関係が成り立つ。

$$\frac{d}{dz} Li_{k_1 \dots k_m}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} Li_{k_1 \dots k_{m-1}}(z) & (k_m \neq 1) \\ \frac{1}{1-z} Li_{k_1 \dots k_{m-1}}(z) & (k_m = 1) \end{cases}$$

特に $Li_1(z)$ は次を満たす。

$$\frac{d}{dz} Li_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

pf 証明は①の定義から direct な計算で出る。 //

④ 解析接続: ③の微分関係式より MPL の反復積分表示

$$Li_{k_1 \dots k_m}(z) = \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{t} Li_{k_1 \dots k_{m-1}}(t) dt & (k_m \neq 1) \\ \int_0^z \frac{1}{1-t} Li_{k_1 \dots k_{m-1}}(t) dt & (k_m = 1) \end{cases}$$

が得られる。そして特に

$$Li_1(z) = -\log(1-z) \text{ である。}$$

③ 微分関係式: p-adic MPL の間には次の関係が成り立つ。

$$\frac{d}{dz} Li_{k_1 \dots k_m}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} Li_{k_1 \dots k_{m-1}}(z) & (k_m \neq 1) \\ \frac{1}{1-z} Li_{k_1 \dots k_{m-1}}(z) & (k_m = 1) \end{cases}$$

特に $Li_1(z)$ は次を満たす。

$$\frac{d}{dz} Li_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

pf 証明は①の定義から direct な計算で出る。 //

④ 解析接続 (F1): 基本的に左と同じ様に反復積分して解析接続

をする。そのために Coleman の p 進積分論 [Col] を用いるのだがこの積分論はログのブランチ $\log^a(a \in \mathbb{C}_p)$ の取り方、即ち元 $a \in \mathbb{C}_p$ の取り方、毎に決まる積分論であった ([Col])。 (ログのブランチ \log^a とは $z=1$ でかままりの Taylor 展開を持ち $\log^a(1) = a$ を満たす解析的群準同型 $\mathbb{C}_p^* \rightarrow \mathbb{C}_p$ のこと。) そこで 1 つブランチ $a \in \mathbb{C}_p$ を固定して、以下ではこれに

この反復積分表示により、当初半径1の開円板でしか定義されていなかったMPLがそれを越えて解析接続することが出来る。

しかし、

③「MPLは全平面にうまく解析接続できない。でも普遍被覆 $\mathbb{C}^* - \{0, 1, \infty\}$ までいけばうまく解析接続できる。」

なぜかというところ、MPLは $t=0, 1, \infty$ の3点で1位の極をもつ微分形式 $\frac{dt}{t}$ と $\frac{dt}{t-t^2}$ の反復積分であるためにこの3点の周りを回るとモノドロミーのずれが起こるからである。だから、

④「各MPLは解析接続すると無数にブランチが派生してしまう。」

attachするColemanのp-進積分論を用いることにする。すると左と同じ様にして当初半径1の開円板でしか定義されていなかったp-adic MPLがそれを越えて解析接続出来る。

そしてこちらの場合だと

⑤「p-adic MPLは全平面に解析接続することが出来る。」

正確に言うと

「p-adic MPLは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - \{1, \infty\}$ まで解析接続出来る。」

ここが左と違う点!

⑥「各p-adic MPLは解析接続すると無数にブランチが派生してしまう。」

ここは左と同じ点!

$$[\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}] = \infty$$

なので

「このブランチは各々 ∞ 個もある。」

⑦ $k_m > 1$ のとき

$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} Li_{k_1, \dots, k_m}(z)$ は収束する。

ここで $\lim_{z \rightarrow 1}^*$ とは $\lim_{\substack{z_i \in \mathbb{C}_p \\ z_i \rightarrow 1}}^*$ 条件 $\textcircled{*}$: 「点列の定義体 $\mathbb{Q}_p(z_1, z_2, \dots) / \mathbb{Q}_p$ は finitely ramified (possibly infinite) extension field である。」 という意味です。

⑧ $k_m = 1$ のとき

$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} Li_{k_1, \dots, k_m}(z)$ は発散する。

何故なら Coleman の p -進積分論は各ブランチ $a \in \mathbb{C}_p$ の取り方に依存していたからであり、これに応じて解析接続された p -adic MPL が決まるからである。以後、ブランチ $a \in \mathbb{C}_p$ に対して決まる全平面に解析接続された p -adic MPL を $Li_{k_1, \dots, k_m}^a(z)$ とかくことにする。 $\#\mathbb{C}_p = \infty$ なので

「このブランチは各々 ∞ 個もある。」

ここが左と違う点!

⑦ Th [E1] : $k_m > 1$ のときすべて $a \in \mathbb{C}_p$ に対して $\lim_{z \rightarrow 1}^* Li_{k_1, \dots, k_m}^a(z)$ は常に収束する。

⑧ [F1] : $k_m = 1$ のとき $\lim_{z \rightarrow 1}^* Li_{k_1, \dots, k_m}^a(z)$ は常に発散するとは限らない。次頁の例 ⑩ を参照せよ。

⑨ この $\zeta_{k_1, \dots, k_m}(z)$ を他の ブランチ
で置き換えると $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |k| < 1}} \zeta_{k_1, \dots, k_m}(z)$ の収
束・発散条件は当然変わって
くる。

⑩ Prop $k_m > 1$ のとき。(即ち. 下の
式で右辺が収束するとき) この
極限は多重ゼータ値(略して
MZV*) に収束する。即ち、

$$\zeta(k_1, \dots, k_m) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |k| < 1}} \zeta_{k_1, \dots, k_m}(z)$$

である。

Notation index (k_1, \dots, k_m) ($k_i \in \mathbb{N}$) に対し
て $k_1 + \dots + k_m$ をこの index の weight と
呼ぶ。

⑪ 例:

⑨ Th([F1]) $\lim_{z \rightarrow 1} \zeta_{k_1, \dots, k_m}^a(z)$ が収束す
るかしないかは $a \in \mathbb{C}_p$ の取り方
に依らない。そして収束する
場合その極限值は $a \in \mathbb{C}_p$ の取り
方に依らない。

⑩ def ([F1]): 下の式で右辺が収
束するような (k_1, \dots, k_m) に対し
て p -adic 多重ゼータ値(略して
 p -adic MZV*) を

$$\zeta_p(k_1, \dots, k_m) := \lim_{z \rightarrow 1} \zeta_{k_1, \dots, k_m}^a(z)$$

で定義する。

$\text{Rank}(i)$ 上の ⑨ によりこの定義は
 $a \in \mathbb{C}_p$ の取り方に依らない。

(ii) $k_m = 1$ のときもし右辺が収束
するのであればその極限值は
実は同じ weight の p -adic MZV の \mathbb{Q} -
linear combination でかけてしまう([F1])。

⑪ 例: $\zeta_p(m) = \frac{p^m}{p^m - 1} L_p(m, \omega^{1-m})$ [Gol]

ここで ω は Teichmüller 指標である。

これより特に、

* MZV とは multiple zeta value の略です。

- $\zeta(2k) = \frac{(2\pi i)^{2k}}{2(2k)!} B_k$
- $\zeta(2k+1) \neq 0$

両式は、 \mathbb{C} の世界では $\log(-1) = \pi i$ であることと p 進の世界では $\log(-1) = 0$ であることを使って説明できる。

• $n = 2k$ のとき

$\zeta_p(2k) = 0$ が従う。一方、

• $n = 2k+1$ のときは $\zeta_p(2k+1) \neq 0$ ということさえ全然簡単なことではない。これは、

$$(L_{2k+1}^p): H_{2k+1}^2(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-k)) = 0$$

をいうことと同値であり、(これは岩沢理論の standard conjecture だと [KNO] に書いてある。)、これは例えば p が正則素数のときや、 $p-1 | 2k$ のときは示されている。

• $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \zeta_{2,1}(z)$ は発散する。即ち、
 $\zeta(2,1) = \infty$.

• $\lim_{z \rightarrow 1} \zeta_{2,1}^a(z)$ は発散せず $-2\zeta_p(3)$ に収束する。即ち、

$$\zeta_p(2,1) = -2\zeta_p(3) .$$

• $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \zeta_{3,1}(z)$ は発散する。即ち、
 $\zeta(3,1) = \infty$.

$$\lim_{z \rightarrow 1} \zeta_{3,1}^a(z) = \begin{cases} 0 & \zeta_p(3) = 0 (\Leftrightarrow (L_3^p): \text{false}) \\ \text{発散} & \zeta_p(3) \neq 0 (\Leftrightarrow (L_3^p): \text{o.k.}) \end{cases}$$

上の例を見てみると著者は、 $\zeta_p(k_1, \dots, k_{m-1}, 2)$ が確定するかしらないか (即ち、 $\lim_{z \rightarrow 1} \zeta_{k_1, \dots, k_{m-1}, 2}^a(z)$ が収束するかしらないか) をいうことは何か整数論で深いことをい

⑫ Prop: MZV は複素関数 MPL の特殊値なので複素数ということになるが、実際は実数である。

$$\text{i.e. } \text{MZV} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

だとするとこらへ ←-----→
 例の世界の対称物
 → 何なのだろう？

⑬ 代数構造: $Z_0 \Leftarrow \mathbb{Q}$

Z_w : weight が w の MZV で生成された \mathbb{R} の \mathbb{Q} 線型部分空間

$Z_0 \Leftarrow \bigoplus_{w=0}^{\infty} Z_w$: formal direct sum とせよ。

Prop この graded \mathbb{Q} -vector space Z_0 は実は graded \mathbb{Q} -algebra の構造をしていいる。

うことになるとはとないかと思っていいる。

⑫ Prop([F1]): p -adic MZV は \mathbb{C}_p -値関数 p -adic MPL の特殊値なので \mathbb{C}_p の元だが、実はより強く \mathbb{Q}_p の元である。

$$\text{i.e. } p\text{-adic MZV} \in \mathbb{Q}_p \subset \mathbb{C}_p.$$

Question([F1]) 実はさらにより強く、 p -adic MZV は全 2 p 進整数でなっただろうか？

$$\text{i.e. } p\text{-adic MZV} \in \mathbb{Z}_p?$$

という問題を筆者は今考えていいる。

⑬ 代数構造: $Z_0^p \Leftarrow \mathbb{Q}$

Z_w^p : weight が w の p -adic MZV で生成された \mathbb{Q}_p の \mathbb{Q} 線型部分空間

$Z_0^p \Leftarrow \bigoplus_{w=0}^{\infty} Z_w^p$: formal direct sum とせよ。

Prop([F1]) この graded \mathbb{Q} -vector space Z_0^p は実は graded \mathbb{Q} -algebra の構造をしていいる。

i.e. $Z_a \cdot Z_b \subset Z_{a+b}$ for $a, b \in \mathbb{N}$.

Rmk これの証明法は2通りある ([Ka]).

・shuffle積和公式を用いる方法と
・harmonic積和公式を用いる方法である。

⑭ Dimension Conjecture ([Za]):

$\{d_w\}_{w=0}^{\infty}$ を $(d_0, d_1, d_2) = (1, 0, 1)$

$d_w = d_{w-2} + d_{w-3}$ で定まる

数列としたとき

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_w = d_w$ だろう。

⑮ 根拠: まず思い、切り自明

なことだが上の Conjecture は

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_w \leq d_w$ (upper bounding) と

i.e. $Z_a^p \cdot Z_b^p \subset Z_{a+b}^p$ for $a, b \in \mathbb{N}$.

Rmk 筆者は p 進 K -方程式と

いうものを考え shuffle積和公式を示すことによりこの Prop を証明した。

・こちら側の世界では harmonic積和公式はまだ証明できていない。これを示すためには新しく 'p-adic MZF' (p 進多重ゼータ関数) を考え出す必要があるのかもしれない。

⑭ Dimension Guess ([F3]):

$\{d_w\}_{w=0}^{\infty}$ を左で定まる数列とした

とき $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w^p = d_{w-3}$

だろう(?)。

・ちなみに $w=0$ のとき $Z_w^p = \mathbb{Q}$

$w=1$ のとき $Z_w^p = 0$

$w=2$ のとき $Z_w^p = \mathbb{Q} \cdot \zeta_p(z) = 0$ 。

⑮ 根拠: まず思い、切り自明

なことだが上の Guess は

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_w^p \leq d_{w-3}$ (upper bounding) と

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_{\omega} \geq d_{\omega}$ (lower bounding) の 2 つに分けられる。

• upper bounding の方については $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の formulation ([De]) を用いて支持根拠が与えられる。

• 一方, lower bounding の方についてもやはり $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の formulation を用いた支持理由があるにはあるのだが実はそれほど納得のいくものではない。

$\dim_{\mathbb{Q}} Z_{\omega}^p \geq d_{\omega-3}$ (lower bounding) の 2 つに分けられる。

• upper bounding の方については $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の formulation ([De]) を用いて支持根拠を与えることができる ([F3])。

• 一方, lower bounding の方についても左の \mathbb{C} の場合と同様にして支持理由を与えることができるにはできるが, \mathbb{C} の場合と比べてあまりにも楽観的すぎる気がする。

Rmk 個人的には $\dim_{\mathbb{Q}} Z_{\omega}^p \neq d_{\omega-3}$ であつてもいいのではないかと思つているし $\dim_{\mathbb{Q}} Z_{\omega}^p$ は全ての素数 p に対して同じ値を取らずに各素数 p の整数論的性質に応じて違った値をとつてくれてもいいのではないと思つたりもしている。

⑬ MZV の線型・代数関係式

- duality formula (例えば [Ka] を参照)
- Drinfeld's associator の関係式 ([Dr], [FO])
- double shuffle relation (例えば [Ka] を参照)

その他にも、こちら側の世界ではいくつかの関係式が見つかっている。

⑭ 例: $\zeta(3) = \zeta(1, 2)$

• $\zeta(4) = 4\zeta(1, 3) = \frac{4}{3}\zeta(2, 2) = \zeta(1, 1, 2) = \frac{\pi^4}{90}$

• $\zeta(1, 4) = 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3)$

⑬ p-adic MZV の線型・代数関係式

- duality formula ([F3])
- p-adic Drinfeld's associator の関係式 ([F1], [F3])
- shuffle 積和公式 ([F1]) で示されているが harmonic 積和公式がまだ証明できていないので double shuffle relation はまだ。

同じ様にしてこちらの世界でも類似の関係式の成り立ちことは当然期待される。

⑭ 例: $\zeta_p(3) = \zeta_p(1, 2) = \frac{p^3}{p^2-1} L_p(3, \omega^2)$

• $\zeta_p(4) = \zeta_p(1, 3) = \zeta_p(2, 2) = \zeta_p(1, 1, 2) = 0$

• $\zeta_p(1, 4) = 2\zeta_p(5) = \frac{2p^5}{p^5-1} L_p(5, \omega^4)$

他にも p 進 K-方程式の話や p 進 Drinfeld's associator の話についてもくわしくかきたかったのですが全部省かせて頂きます。これらを用いると p-adic MPL 間の函数等式が得られたりと色々面白いのですがくわしくは [F1] を見て下さい。私の本研究会集会における講演ではさらに Ch3. を設けて 4 つの実例 (2 進イタール・ベッチ・ド・ラム・p 進クリスタル) の世界における射影直線引く点の基本群を図をかいて説明していき p 進多重ゼータ値の立場を明らかにしていったのですが (とても面白

か、たと思うのですが)紙面が足りなくなつたのでこれも省かせて頂きます。くれしくは[F2]を参照して頂くことにしたいと思ひます。

[参考文献]

- [Col] Coleman, R. : Dilogarithms, regulators and p -adic L-functions, *Inv. Math.* 69 (1982), no. 2, pp 171-208.
- [De] Deligne, P. : Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, *Galois groups over \mathbb{Q}* , pp 79-297, MSRI Publ, Springer, 1989.
- [Dr] Drinfeld, V.G. : On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* 2. (1991), no 4, pp 829-860.
- [Fo] Furusho, H. : Multiple zeta values and Grothendieck-Teichmüller groups, *RIMS-1357* (2002), submitted.
- [F1] _____ : p -adic multiple zeta values I, submitted.
- [F2] _____ : " II, in preparation.
- [F3] _____ : " III, in preparation.
- [Ka] 金子昌信 : 多重ゼータ値入門, 数理解析研究所講究録1097「代数的整数論とその周辺」, (1999) pp. 50-68.
- [KNQ] Kolster, M. and Nguyen Quang Do, T. : Syntomic regulators and special value of p -adic L-functions, *Inv Math* 133 (1998), no 2, pp 417-447.
- [Za] Zagier, D. : Values of zeta functions and their applications, *First European Congress of Math (Paris, 1992)*, pp 497-512, Birkhäuser, 1994.