数理解析研究所講究録 1331 巻 2003 年 84-92

GLOBAL EXISTENCE OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF WAVE EQUATIONS WITH DIFFERENT PORPAGATION SPEEDS IN ONE SPATIAL DIMENSION

津川 光太郎 (KOTARO TSUGAWA)

東北大学大学院理学研究科 (Mathematical Institute, Tohoku University)

以下の様な，伝播速度の違う波動方程式 $(s>1)$ がカップルしたシステムに対する初期値問題を考える．

(1) $$(\partial_t^2-\triangle)f=F(f,g,\partial f,\partial g), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},$$

(2) $$(\partial_t^2-s^2\triangle)g=G(f,g,\partial f,\partial g), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},$$

(3) $$f(x,0)=\epsilon f_0(x), \quad \partial_t f(x,0)=\epsilon f_1(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

(4) $$g(x,0)=\epsilon g_0(x), \quad \partial_t g(x,0)=\epsilon g_1(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

伝播速度が同じ場合 $(s=1)$ に比べて，伝播速度が違う場合 $(s>1)$ は特異性の伝播にずれが生じるため，解の時間減衰や滑らかさに関して，良い評価が得られる可能性がある．この点に着目する所が特徴である．また，F が $g,\partial g$ のみに依存する場合や，G が $f,\partial f$ のみに依存する場合を weakly coupled case と呼び，F,G が f または ∂f と g または ∂g との積で表される場合を strongly coupled case と呼ぶ．

始めに $F=F(\partial f,\partial g),G=G(\partial f,\partial g)$ の場合の結果をのべる．一般に，$n=3,s=1$ で 2 次の非線形項を持つ場合には爆発解の存在が知られているが，[1] において $n=3,s>1,F=\partial f\partial g,G=\partial f\partial g$ の場合に時間大域解が存在する事が示された．その後，weakly coupled case も含めて多くの場合について研究された ([5])．そして，$n=3$ では 2 次が伝播速度の違う場合の臨界指数である．

$F=F(f,g),G=G(f,g)$ の場合にも多くの研究が成されているが，[3] において strongly coupled case の場合は，weakly coupled case の場合よりも次数を下げる事が出来る事が指摘された．そして，[2] において $n=3$ の場合には，大域解および爆発解の存在を示す事によって臨界指数が完全に求められた．

しかし，$F=f\partial g$ などの項を含むような一般の $F=F(f,g,\partial f,\partial g)$, $G=G(f,g,\partial f,\partial g)$ の場合については今だ不明な部分が多い．

他の空間次元については，伝播速度が同じ場合との比較から，一般には，$n=2$ では3次が伝播速度の違う場合の臨界指数だと予想され，$n=1$ では線形の解が時間減衰しないため，どんなに大きな次数に対しても，時間大域解が存在しないだろうと予想される．しかし，strongly coupled case と null form の場合に限定する事により，以下のように，$n=1$ において2次の非線形項に対して時間大域解を得た．

定理 1. $n=1, s>1$ とし，非線形項は，

$$F = |C_{11}\partial_t f + C_{12}\partial_x f|^{p_1}|C_{13}\partial_t g + C_{14}\partial_x g|^{p_2} + C_{15}(\partial_t f\partial_t f - \partial_x f\partial_x f) + C_{16}(\partial_t g\partial_t g - s^2\partial_x g\partial_x g) \tag{5}$$

$$G = |C_{21}\partial_t f + C_{22}\partial_x f|^{q_1}|C_{23}\partial_t g + C_{24}\partial_x g|^{q_2} + C_{25}(\partial_t f\partial_t f - \partial_x f\partial_x f) + C_{26}(\partial_t g\partial_t g - s^2\partial_x g\partial_x g) \tag{6}$$

とする．ここで C_{ij} は任意の定数とし，$p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 1$ とする．$a>1$ に対し，初期値が

$$(1+|x|)^a\partial_x f_0,\ (1+|x|)^a f_1, (1+|x|)^a\partial_x g_0,\ (1+|x|)^a g_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$$

を満たすとき，ある $\epsilon_0>0$ が存在し，$0\leq\epsilon<\epsilon_0$ とすると，時間大域解が存在し，任意の $t>0$ に対し

$$(1+|x|)^a\partial_x f(t),\ (1+|x|)^a\partial_t f(t), (1+|x|)^a\partial_x g(x),\ (1+|x|)^a\partial_t g(t) \in L^\infty(\mathbb{R}) \tag{7}$$

を満たす．

また，この様なシステムに対しては，どれだけ滑らかさの低い空間で解の存在を示せるか？という問題も研究されており，[4] において初期値をソボレフ空間 H^m で考える場合，$n=1, p_1=p_2=q_1=q_2=1$ では時間局所解が存在するための臨界指数は $m=1$ である事が示されたが，以下のように L^1 空間を考える事により，より広い空間で示す事が出来た．

定理 2. $n=1, s>1$ とし，非線形項は(5),(6) を満たし，$p_1=p_2=q_1=q_2=1$ とする．初期値が

$$\partial_x f_0,\ f_1,\ \partial_x g_0,\ g_1 \in L^1(\mathbb{R})$$

を満たすとき，ある $\epsilon_0>0$ が存在し，$0\leq\epsilon<\epsilon_0$ とすると，時間大域解が存在し，任意の $t>0$ に対し

$$\partial_x f(t),\ \partial_t f(t),\ \partial_x g(t),\ \partial_t g(t) \in L^1(\mathbb{R}) \tag{8}$$

を満たす．

定理 1, 定理 2 より，$n = 1$ で(5)-(6) のタイプの場合は 2 次が臨界指数である事がわかる．この値は伝播速度が同じ場合の臨界指数 $(+\infty)$ と大きな差がある．よって，$n = 2$ の場合においても 3 次以下の非線形項に対しても大域解の存在が示せるかも知れないと予想される．

この証明で使われる手法は，$F = \partial(fg), G = \partial(fg)$ という場合に対しても適用できる．また，$F = |\partial g|^2, G = \partial f \partial g$ というような，weakly coupled case と strongly coupled case が混合した場合については有限時間で爆発する解の存在が示せると思われる．この様にして，$n = 1$ の場合について，大域解が存在する場合と爆発解が存在する場合とに完全に分類する事が今後の目標であり，そこで得られた結果は $n = 3$ の場合の研究の手助けになるかもしれない．

以下，定理の証明をする．

(定理 2 の証明).

$$f_\pm(x,t) = (\partial_t \pm \partial_x) f(x,t),$$

$$g_\pm(x,t) = (\partial_t \pm s\partial_x) g(x,t),$$

と定義すると，

$$\partial_t f = (f_+ + f_-)/2, \quad \partial_x f = (f_+ - f_-)/2,$$

$$\partial_t g = (g_+ + g_-)/2, \quad \partial_x g = (g_+ - g_-)/(2s),$$

となり，(1)-(6) は以下のように書き換えられる．

(9) $$(\partial_t \mp \partial_x) f_\pm(x,t) = F(f_\pm, g_\pm)(x,t),$$

(10) $$(\partial_t \mp s\partial_x) g_\pm(x,t) = G(f_\pm, g_\pm)(x,t),$$

(11) $$f_\pm(x,0) = \epsilon(f_1 \pm \partial_x f_0) \in L^1,$$

(12) $$g_\pm(x,0) = \epsilon(g_1 \pm s\partial_x g_0) \in L^1.$$

ここで以下のように変数変換をし，

(13) $$\mu = t + x, \quad \nu = t - x, \quad \mu_s = t + \frac{1}{s}x, \quad \nu_s = t - \frac{1}{s}x$$

次のように定める．

(14) $$f'_\pm(\mu,\nu) = f_\pm(x,t), \quad g'_\pm(\mu_s,\nu_s) = g_\pm(x,t),$$

(15) $$F'(f'_\pm, g'_\pm)(\mu,\nu) = F(f_\pm, g_\pm)(x,t), \quad G'(f'_\pm, g'_\pm)(\mu_s,\nu_s) = G(f_\pm, g_\pm)(x,t).$$

すると，(9)-(12) は次の積分方程式に帰着される．

$$
(16) \qquad \begin{pmatrix} f'_+(\mu,\nu) \\ f'_-(\mu,\nu) \\ g'_+(\mu_s,\nu_s) \\ g'_-(\mu_s,\nu_s) \end{pmatrix} = N(f'_\pm, g'_\pm)
$$

ここで

$$
(17) \qquad N(f'_\pm, g'_\pm) = \begin{pmatrix} f'_+(\mu,-\mu) + \int_{-\mu}^{\nu} F'(\mu,\nu')\,d\nu' \\ f'_-(-\nu,\nu) + \int_{-\nu}^{\mu} F'(\mu',\nu)\,d\mu' \\ g'_+(\mu_s,-\mu_s) + \int_{-\mu_s}^{\nu_s} G'(\mu_s,\nu'_s)\,d\nu'_s \\ g'_-(-\nu_s,\nu_s) + \int_{-\nu_s}^{\mu_s} F'(\mu'_s,\nu_s)\,d\mu'_s \end{pmatrix}
$$

である．写像 N が縮小写像である事を示すことによって積分方程式(16) の解の存在を証明する．以下の様にノルム $\|\cdot\|_X$ を定義する．

$$
\|(f'_+, f'_-, g'_+, g'_-)\|_X = \|f'_+\|_{L^1_\mu L^\infty_\nu} + \|f'_-\|_{L^1_\nu L^\infty_\mu} + \|g'_+\|_{L^1_{\mu_s} L^\infty_{\nu_s}} + \|g'_-\|_{L^1_{\nu_s} L^\infty_{\mu_s}}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\|f'_+\|_{L^1_\mu L^\infty_\nu} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sup_\nu |f'_+(\mu,\nu)|\,d\mu, \\
\|f'_-\|_{L^1_\nu L^\infty_\mu} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sup_\mu |f'_-(\mu,\nu)|\,d\nu, \\
\|g'_+\|_{L^1_{\mu_s} L^\infty_{\nu_s}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{\nu_s} |g'_+(\mu_s,\nu_s)|\,d\mu_s, \\
\|g'_-\|_{L^1_{\nu_s} L^\infty_{\mu_s}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{\mu_s} |g'_-(\mu_s,\nu_s)|\,d\nu_s
\end{aligned}
$$

である．また，シュワルツクラスに属し，このノルムが有限になる関数の集合を X とし，その部分集合 X_ϵ を次のように定める．

$$
X_\epsilon = \{(f'_+, f'_-, g'_+, g'_-) \in X \big| \|(f'_+, f'_-, g'_+, g'_-)\|_X < 4\epsilon\delta\}
$$

ただし，$\delta = (\|\partial_x f_0\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1} + \|\partial_x g_0\|_{L^1} + \|g_1\|_{L^1})$ とする．ここで，(17) より，

$$\begin{aligned}\|N(f'_\pm, g'_\pm)\|_X \leq & \|f'_+(\mu, -\mu)\|_{L^1_\mu} + \|\int_{-\mu}^{\infty} |F'(\mu, \nu')|\, d\nu'\|_{L^1_\mu} \\ & + \|f'_-(-\nu, \nu)\|_{L^1_\nu} + \|\int_{-\nu}^{\infty} |F'(\mu', \nu)|\, d\mu'\|_{L^1_\nu} \\ & + \|g'_+(\mu_s, -\mu_s)\|_{L^1_{\mu_s}} + \|\int_{-\mu_s}^{\infty} |G'(\mu_s, \nu'_s)|\, d\nu'_s\|_{L^1_{\mu_s}} \\ & + \|g'_-(-\nu_s, \nu_s)\|_{L^1_{\nu_s}} + \|\int_{-\nu_s}^{\infty} |G'(\mu'_s, \nu_s)|\, d\mu'_s\|_{L^1_{\nu_s}}\end{aligned}$$

また，(11),(13),(14) より

$$\|f'_+(\mu, -\mu)\|_{L^1_\mu} \leq \|f_+(x, 0)\|_{L^1_x} \leq \epsilon(\|\partial_x f_0\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1}).$$

同様にして，

$$\begin{aligned}\|f'_-(-\nu, \nu)\|_{L^1_\nu} &\leq \epsilon(\|\partial_x f_0\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1}), \\ \|g'_+(\mu_s, -\mu_s)\|_{L^1_{\mu_s}} &\leq \epsilon(\|\partial_x g_0\|_{L^1} + \|g_1\|_{L^1}), \\ \|g'_-(-\nu_s, \nu_s)\|_{L^1_{\nu_s}} &\leq \epsilon(\|\partial_x g_0\|_{L^1} + \|g_1\|_{L^1}).\end{aligned}$$

また，

$$\|\int_{-\mu}^{\infty} |F'(\mu, \nu')|\, d\nu'\|_{L^1_\mu} \leq \|F'(\mu, \nu)\|_{L^1_{\mu,\nu}}$$

であり，

$$F'(\mu, \nu) = \sum_{j,k=+or-} C_{j,k}|f'_j g'_k| + C' f'_+ f'_- + C'' g'_+ g'_- \tag{18}$$

と表されているので，(18) の右辺のそれぞれの項を評価する．始めに $f'_+ f'_-$ について考えると，

$$\begin{aligned}\|f'_+(\mu, \nu) f'_-(\mu, \nu)\|_{L^1_{\mu,\nu}} &\leq \|(\|f'_+\|_{L^\infty_\nu} \|f'_-\|_{L^1_\nu})\|_{L^1_\mu} \\ &\leq \|f'_+\|_{L^1_\mu L^\infty_\nu} \|f'_-\|_{L^\infty_\mu L^1_\nu} \\ &\leq \|f'_+\|_{L^1_\mu L^\infty_\nu} \|f'_-\|_{L^1_\nu L^\infty_\mu} \\ &\leq 16\epsilon^2\delta^2.\end{aligned} \tag{19}$$

次に $g'_+ g'_-$ について考えると，

$$\|g'_+(\mu_s, \nu_s) g'_-(\mu_s, \nu_s)\|_{L^1_{\mu,\nu}} \sim \|g'_+(\mu_s, \nu_s) g'_-(\mu_s, \nu_s)\|_{L^1_{\mu_s,\nu_s}}$$

であるので，(19) と同様にして

$$\|g'_+(\mu_s,\nu_s)g'_-(\mu_s,\nu_s)\|_{L^1_{\mu,\nu}} \le \|g'_+\|_{L^1_{\mu_s}L^\infty_{\nu_s}}\|g'_-\|_{L^1_{\nu_s}L^\infty_{\mu_s}} \le 16\epsilon^2\delta^2.$$

が得られる．最後に $f'_j g'_k$ について考える．いま，$s>1$ であるので，直線 $\mu=0,\nu=0,\mu_s=0,\nu_s=0$ の傾きはいづれも等しくならない．よって，適当な変数変換を用いることにより (19) と同様な議論が成り立ち，

$$\|f'_j(\mu,\nu)g'_k(\mu_s,\nu_s)\|_{L^1_{\mu,\nu}} \le 16\epsilon^2\delta^2,$$

が得られる．よって

$$\|F'(\mu,\nu)\|_{L^1_{\mu,\nu}} \le C\epsilon^2\delta^2,$$

であり，G' についても同様にして，

$$\|G'(\mu_s,\nu_s)\|_{L^1_{\mu_s,\nu_s}} \le C\epsilon^2\delta^2,$$

が導かれる．以上の結果から，

$$\|N\|_X \le 2\epsilon\delta + C\epsilon^2\delta^2$$

が成り立ち，δ に依存して，十分小さな $\epsilon>0$ をとれば，$\|N\|_X < 4\epsilon\delta$ となり，N は X_ϵ から X_ϵ の中への写像であることが示された．これが縮小写像になっていることは，通常の手法により簡単に確かめられるので省略する．また，ここで得られた解は明らかに(8) を満たす． □

(定理 1 の証明). 定理 2 の証明と同様にして，(1)–(6) は(16)–(17) に書き換えられる．定理 2 の証明と同様に写像 N が縮小写像である事を示すことによって積分方程式(16) の解の存在を証明する．以下の様にノルム $\|\cdot\|_X$ を定義する．

$$\|(f'_+,f'_-,g'_+,g'_-)\|_X = \|(1+|\mu|)^a f'_+\|_{L^\infty_{\mu,\nu}} + \|(1+|\nu|)^a f'_-\|_{L^\infty_{\mu,\nu}} + \|(1+|\mu_s|)^a g'_+\|_{L^\infty_{\mu_s,\nu_s}} + \|(1+|\nu_s|)^a g'_-\|_{L^\infty_{\mu_s,\nu_s}}$$

また，シュワルツクラスに属し，このノルムが有限になる関数の集合を X とし，その部分集合 X_ϵ を次のように定める．

$$X_\epsilon = \{(f'_+,f'_-,g'_+,g'_-) \in X \,|\, \|(f'_+,f'_-,g'_+,g'_-)\|_X < 4\epsilon\delta\}$$

ただし，$\delta = (\|(1+|x|)^a\partial_x f_0\|_{L^\infty} + \|(1+|x|)^a f_1\|_{L^\infty} + \|(1+|x|)^a\partial_x g_0\|_{L^\infty} + \|(1+|x|)^a g_1\|_{L^\infty})$ とする．ここで，(17) より，

$$\begin{aligned}
&\|N(f'_\pm, g'_\pm)\|_X \\
\leq&\|(1+|\mu|)^a f'_+(\mu,-\mu)\|_{L^\infty_\mu} + \|(1+|\mu|)^a \int_{-\mu}^{\infty} |F'(\mu,\nu')|\, d\nu'\|_{L^\infty_\mu} \\
&+\|(1+|\nu|)^a f'_-(-\nu,\nu)\|_{L^\infty_\nu} + \|(1+|\nu|)^a \int_{-\nu}^{\infty} |F'(\mu',\nu)|\, d\mu'\|_{L^\infty_\nu} \\
&+\|(1+|\mu_s|)^a g'_+(\mu_s,-\mu_s)\|_{L^\infty_{\mu_s}} + \|(1+|\mu_s|)^a \int_{-\mu_s}^{\infty} |G'(\mu_s,\nu'_s)|\, d\nu'_s\|_{L^\infty_{\mu_s}} \\
&+\|(1+|\nu_s|)^a g'_-(-\nu_s,\nu_s)\|_{L^\infty_{\nu_s}} + \|(1+|\nu|_s)^a \int_{-\nu_s}^{\infty} |G'(\mu'_s,\nu_s)|\, d\mu'_s\|_{L^\infty_{\nu_s}}
\end{aligned}$$

また，(11),(13),(14) より

$$\begin{aligned}
\|(1+|\mu|)^a f'_+(\mu,-\mu)\|_{L^\infty_\mu} &\leq \|(1+|x|)^a f_+(x,0)\|_{L^\infty_x} \\
&\leq \epsilon(\|(1+|x|)^a\partial_x f_0\|_{L^\infty} + \|(1+|x|)^a f_1\|_{L^\infty}).
\end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}
\|(1+|\nu|)^a f'_-(-\nu,\nu)\|_{L^\infty_\nu} &\leq \epsilon(\|(1+|x|)^a\partial_x f_0\|_{L^\infty} + \|(1+|x|)^a f_1\|_{L^\infty}), \\
\|(1+|\mu_s|)^a g'_+(\mu_s,-\mu_s)\|_{L^\infty_{\mu_s}} &\leq \epsilon(\|(1+|x|)^a\partial_x g_0\|_{L^\infty} + \|(1+|x|)^a g_1\|_{L^\infty}), \\
\|(1+|\nu_s|)^a g'_-(-\nu_s,\nu_s)\|_{L^\infty_{\nu_s}} &\leq \epsilon(\|(1+|x|)^a\partial_x g_0\|_{L^\infty} + \|(1+|x|)^a g_1\|_{L^\infty}).
\end{aligned}$$

また，

$$\|(1+|\mu|)^a \int_{-\mu}^{\infty} |F'(\mu,\nu')|\, d\nu'\|_{L^\infty_\mu} \leq \|(1+|\mu|)^a F'(\mu,\nu)\|_{L^\infty_\mu L^1_\nu}$$

であり，

$$F'(\mu,\nu) \leq \sum_{j,k=+or-} C_{j,k}|f'_j|^{p_1}|g'_k|^{p_2} + C'|f'_+f'_-| + C''|g'_+g'_-| \tag{20}$$

なので，(20) の右辺のそれぞれの項を評価する．始めに $|f'_+f'_-|$ について考えると，

$$\begin{aligned}
&\|(1+|\mu|)^a f'_+(\mu,\nu) f'_-(\mu,\nu)\|_{L^\infty_\mu L^1_\nu} \\
\leq&\|(1+|\mu|)^a f'_+(\mu,\nu)\|_{L^\infty_{\mu,\nu}} \|(1+|\nu|)^a f'_-(\mu,\nu)\|_{L^\infty_{\mu,\nu}} \|(1+|\nu|)^{-a}\|_{L^1_\nu} \qquad (21) \\
\leq&C\epsilon^2\delta^2.
\end{aligned}$$

次に $|g'_+ g'_-|$ について考えると,

$$
\begin{aligned}
&\|(1+|\mu|)^a g'_+(\mu_s,\nu_s) g'_-(\mu_s,\nu_s)|\|_{L^\infty_\mu L^1_\nu} \\
\le& \|(1+|\mu_s|)^a g'_+(\mu_s,\nu_s)\|_{L^\infty_{\mu_s,\nu_s}} \|(1+|\nu_s|)^a g'_-(\mu_s,\nu_s)\|_{L^\infty_{\mu_s,\nu_s}} \\
&\times \|(1+|\mu|)^a (1+|\mu_s|)^{-a}(1+|\nu_s|)^{-a}\|_{L^\infty_\mu L^1_\nu} \\
\le& C\epsilon^2\delta^2.
\end{aligned} \tag{22}
$$

が得られる．最後に $|f'_j|^{p_1}|g'_k|^{p_2}$ について考える．いま，$s>1$ であるので，直線 $\mu=0, \nu=0, \mu_s=0, \nu_s=0$ の傾きはいづれも等しくならない．よって，適当な変数変換を用いることにより(21),(22) と同様な議論が成り立ち，

$$\|(1+|\mu|)^a |f'_j(\mu,\nu)|^{p_1} |g'_k(\mu_s,\nu_s)|^{p_2}\|_{L^\infty_\mu L^1_\nu} \le C\epsilon^2\delta^2,$$

が得られる．よって

$$\|(1+|\mu|)^a F'(\mu,\nu)\|_{L^\infty_\mu L^1_\nu} \le C\epsilon^2\delta^2,$$

であり，G' についても同様にして，

$$\|(1+|\mu_s|)^a G'(\mu_s,\nu_s)\|_{L^\infty_{\mu_s} L^1_{\nu_s}} \le C\epsilon^2\delta^2,$$

が導かれる．以上の結果から，

$$\|N\|_X \le 2\epsilon\delta + C\epsilon^2\delta^2$$

が成り立ち，δ に依存して，十分小さな $\epsilon>0$ をとれば，$\|N\|_x < 4\epsilon\delta$ となり，N は X_ϵ から X_ϵ の中への写像であることが示された．これが縮小写像になっていることは，通常の手法により簡単に確かめられるので省略する．また，ここで得られた解は明らかに(7) を満たす．□

REFERENCES

[1] M. Kovalyov, *Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations*, J. Differential Equations **77** (1989) 73–83.

[2] H. Kubo and M. Ohta, *On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions*, preprint.

[3] H. Kubo and K. Tsugawa, *Global solutions and self-similar solutions of the coupled system of semilinear wave equations in three space dimensions*, to appear in DCDS.

[4] K. Tsugawa, *Time local well-posedness for the coupled system of nonlinear wave equations with different propagation speeds in 1 and 2 spatial dimensions* , preprint.

[5] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 610–632.