数理解析研究所講究録 1333 巻 2003 年 109-121

Sierpiński gasket 上の Martin 距離の Lipschitz 同値性

(Lipschitz equivalence of Martin metrics on the Sierpiński gasket)

京都大学大学院情報学研究科　今井 淳 (Atsushi Imai)
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

本研究は, 川崎 泰裕 (NTT DoCoMo 九州), 佐藤 坦 (九大数理) との共同研究である.

1. はじめに

本稿は, 研究集会:「クンツ環のフラクタル集合上の表現と数理物理への応用」にて (筆者が) 講演した内容と, 論文 [5] の概説を併せた, 総合報告である. ここに, 当研究集会主宰, 鈴木 理教授 (日本大学文理学部) に深い感謝の意を表す.

2. 準備

$\mathscr{A}$ を, N ($N \geq 2$) 個の **文字** から成る集合: $\mathscr{A} := \{1, 2, \ldots, N\}$ とする. 本節では, この原稿を通じて, よく使う記号を, 以下の (1) から (5) にまとめる.

(1) $0 \leq n \leq \infty$ に対して, $\mathscr{A}$ の n 個の直積: $\mathscr{A}^n$ を $\mathscr{W}_n$ とおく: $\mathscr{W}_n := \mathscr{A}^n$. 但し, $\mathscr{W}_0 = \mathscr{A}^0 := \{\varnothing\}$ ($\varnothing$: 空語), 更に $\mathscr{W}_\infty = \mathscr{A}^\infty$ を $\mathscr{A}$ の片側無限直積, $\mathscr{W} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{W}_n$ を **言葉の空間** と呼ぶ. 以後, $\mathscr{W}_\infty$ の元を **文字列**, $\mathscr{W}$ の元を **言葉** と呼ぶ.

(2) **言葉, 文字列の長さ**: $\mathbf{x} \in \mathscr{W}_n$ $(0 \leq n \leq \infty)$ に対して, $d(\mathbf{x}) := n$ とし, これを $\mathbf{x}$ の**長さ** と呼ぶ.

(3) **文字の冪**: 文字: $x \in \mathscr{A}$ の n 乗: x^n を $(0 \leq n \leq \infty)$

$$x^n := \begin{cases} \varnothing & \text{if } n = 0, \\ \overbrace{xx\cdots x}^{n\text{ 個}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する.

電子メールアドレス: aimai@acs.i.kyoto-u.ac.jp

(4) **言葉同志, 及び言葉と文字列の積**: $\mathbf{x} := x_1x_2\cdots x_{d(\mathbf{x})} \in \mathscr{W}$ と $\mathbf{y} := y_1y_2\cdots \in \mathscr{W} \cup \mathscr{W}_\infty$ に対して $\mathbf{xy} := x_1x_2\cdots x_{d(\mathbf{x})}y_1y_2\cdots$ で定義する.

(5) 長さ $n\,(1 \leq n < \infty)$ の言葉: $\mathbf{w} = w_1w_2\cdots w_n \in \mathscr{W}_n$ に対して, $\tau(\mathbf{w})$ を, $\mathbf{w}$ **の最後の文字**: $\tau(\mathbf{w}) := w_n$ とする. 更に, $\mathbf{w}^-$ を, $\mathbf{w}$ から $\tau(\mathbf{w})$ を取り去ったもの:

$$\mathbf{w}^- := \begin{cases} \emptyset & \text{if } n = 1, \\ w_1w_2\cdots w_{n-1} & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

とする.

3. Sierpiński gasket

$\triangle$ を, $\mathbb{R}^{N-1}$ に於ける N 個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_N \in \mathbb{R}^{N-1}$ を頂点をする, 各辺の長さが等しい単体 (simplex) の内部及び境界とする. 例えば, $N = 2$ の時は, ($\triangle$ は) 閉区間: $[p_1,\ p_2]$ を表し, $N = 3$ の時は, 頂点を p_1, p_2, p_3 とする, ($\triangle$ は) 正三角形の内部及び境界を表す.

次に, $f_i : \triangle \to \triangle\ (i \in \mathscr{A})$ を, p_i を不動点とする, 相似比 1/2 の相似変換とし,

$$f_{\mathbf{x}} := \begin{cases} \text{恒等変換} & \text{if } \mathbf{x} = \emptyset, \\ f_{x_1} \circ f_{x_2} \circ \cdots \circ f_{x_n} & \text{if } \mathbf{x} = x_1x_2\cdots x_n,\ n \geq 1 \end{cases}$$

とおく. この時, $\mathbb{R}^{N-1}$ に於いて, $\mathscr{S} = \bigcup_{i=1}^N f_i(\mathscr{S})$ を充たす, 空でない compact 距離空間: $\mathscr{S}$ が存在することが知られている. この $\mathscr{S}$ を **Sierpiński gasket** と呼ぶ. しかも, この $\mathscr{S}$ は

$$\mathscr{S} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathscr{W}_n} f_{\mathbf{x}}(\triangle)$$

を充たす.

補題 3.1. $\mathbf{x}_n := x_1x_2\cdots x_n \in \mathscr{W}_n\ (n \geq 1)$ に対して,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f_{\mathbf{x}_n}(\triangle) \quad (\subset \mathscr{S})$$

は 1 点集合 (singleton).

4. 共軛な言葉, 共軛な文字列

補題 3.1 は, $\mathscr{S}$ 上の任意の点には, 必ず (それに) 対応する文字列が存在していることを教示している. 例えば, $p_1, p_2 \in \mathscr{S}$ には $1^\infty, 2^\infty \in \mathscr{W}_\infty$ が (各々) 対応する. しかしながら,

12^∞ と 21^∞ は $\mathscr{S}$ 上の同じ点を表していることからも判る様に, その対応は 1 対 1 ではない.

そこで, $\mathbf{w} \in \mathscr{W} \cup \mathscr{W}_\infty$ に対して, $\mathbf{w}$ の**共軛** $\mathbf{w}^\#$ を

$$\mathbf{w}^\# := \begin{cases} \mathbf{w}_0 b a^n & \text{if } \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 a b^n \text{ where } \mathbf{w}_0 \in \mathscr{W},\ a, b \in \mathscr{A}\ (a \neq b),\ 0 \leq n \leq \infty \\ \mathbf{w} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とする. このとき, 全ての $\mathbf{w} \in \mathscr{W} \cup \mathscr{W}_\infty$ に対して $\mathbf{w}^{\#\#} = \mathbf{w}$ が成り立つ.

次に $\mathscr{W}_\infty$ 上に二項関係: $\sim$ を

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \overset{\text{定義}}{\iff} \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ または } \mathbf{x}^\# = \mathbf{y}$$

で定義すると, "$\sim$" は $\mathscr{W}_\infty$ 上の **同値関係** となる. $\mathscr{W}_\infty$ を, この "$\sim$" で割った空間: $\mathscr{W}_\infty/\sim$ が $\mathscr{S}$ を表す (制御する) のである.

命題 4.1. $(\mathscr{W}_\infty/\sim) \cong \mathscr{S}$. 但し, "$\cong$" は「同相 (homeomorphism)」を表す.

5. Green 函数と Martin 核

$\mathscr{W}$ 上の **遷移確率** p を

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\mathbb{1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}^-) + \mathbb{1}_{\mathbf{x}^\#}(\mathbf{y}^-)}{2N} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}$$

で定義する. 但し,

$$\mathbb{1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \end{cases}$$

即ち, $\mathscr{W}$ を状態空間とする **Markov 連鎖**: $\{X_n\}$ を定義する.

更に n **段階の遷移確率** $p(n : \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$p(n : \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) & \text{if } n = 0, \\ \sum_{\mathbf{u} \in \mathscr{W}} p(n-1 : \mathbf{x}, \mathbf{u}) p(\mathbf{u}, \mathbf{y}) & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

で定義する. この時, ($\mathscr{W}$ 上の) **Green 函数** g を

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n : \mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(d(\mathbf{y}) - d(\mathbf{x}) : \mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}$$

によって定めると ($\mathscr{W}$ 上の) **Martin 核** k は

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{g(\varnothing, \mathbf{y})} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}$$

で定義される. Denker と 佐藤は, 論文 [1] で, この Martin 核の精密評価を得ることに成功した.

命題 5.1. [1]　$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}$ が $k(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) > 0$ を充たしているならば, 以下の (1) か (2) のいづれかが成り立つ:

(1)　$d(\mathbf{x}) = d(\mathbf{y})$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ で且つ $k(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = N^{d(\mathbf{x})}$.

(2)　$d(\mathbf{x}) + 1 \leq d(\mathbf{y})$ ならば, $\mathbf{y}$ は, 或る文字 $y_0, y_1, \ldots, y_n, c \in \mathscr{A}$ が在って

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{-} y_0 y_1 \cdots y_n c \quad \text{又は} \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\#-} y_0 y_1 \cdots y_n c$$

と表され, もし $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{-} y_0 y_1 \cdots y_n c$ ならば

$$k(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = k(\mathbf{x}^{\#},\ \mathbf{y}) = \frac{1 + \mathbb{1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{\#})}{4} N^{d(\mathbf{x})} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{x})}(y_k)}{2^k} + \frac{\mathbb{1}_{\tau(\mathbf{x})}(y_n)}{2^n} \right)$$

となる.

6. $\mathscr{W}$ 上の MARTIN 距離

$\mathbf{a} = \{a_n\}$ を, 実数列とする. この時,

$$\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) := |2^{-d(\mathbf{x})} - 2^{-d(\mathbf{y})}| + \sum_{n=1}^{\max\{d(\mathbf{x}),\ d(\mathbf{y})\}} \frac{a_n}{N^n} \sup_{\mathbf{u} \in \mathscr{W}_n} |k(\mathbf{u},\ \mathbf{x}) - k(\mathbf{u},\ \mathbf{y})|$$

によって, 写像: $\rho_{\mathbf{a}} : \mathscr{W} \times \mathscr{W} \to [0,\ \infty)$ が定義される.

註 6.1.　(1)　$n \geq \max\{d(\mathbf{x}),\ d(\mathbf{y})\} + 1$ の時 $\sup_{\mathbf{u} \in \mathscr{W}_n} |k(\mathbf{u},\ \mathbf{x}) - k(\mathbf{u},\ \mathbf{y})| = 0$ となることに注意する.

(2)　空語 (: $\varnothing$) も $\mathscr{W}$ の元であることに注意する. 今, 特に $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \varnothing$ とすると $\max\{d(\mathbf{x}),\ d(\mathbf{y})\} = 0$ となる為, 上記の「和」は「$n = 0$ から」にするべきである. しかしながら, Martin 核の定義により $\sup_{\mathbf{u} \in \mathscr{W}_0} |k(\mathbf{u},\ \mathbf{x}) - k(\mathbf{u},\ \mathbf{y})| = |k(\varnothing,\ \mathbf{x}) - k(\varnothing,\ \mathbf{y})| = 1 - 1 = 0$ が, 全ての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}$ に対して成り立つので「$n = 1$ から」として構わない.

他方, 任意に固定した $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbf{x}_0 := \begin{cases} 2 & \text{if } m = 1, \\ 1^{m-2}21 & \text{if } m \geq 2, \end{cases} \qquad \mathbf{y}_0 := \begin{cases} 1 & \text{if } m = 1, \\ (1^{m-2}2)^{\#}2 & \text{if } m \geq 2. \end{cases}$$

で $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathscr{W}$ を定義すると, 遷移確率の定義: (5.1) から $\sup_{\mathbf{u}\in\mathscr{W}_n}|k(\mathbf{u},\ \mathbf{x}_0)-k(\mathbf{u},\ \mathbf{y}_0)| = \mathbb{1}_n(m)N^n$ が, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について成り立つことが (簡単に) 判る, つまり $\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}_0) = a_m$ となるので,

補題 6.2. $\rho_{\mathbf{a}}$ が $\mathscr{W}$ 上の距離となる為の必要十分条件は, 全ての n に対して $a_n > 0$ となることである.

正の実数列 $\mathbf{a}$ に対して, 距離: $\rho_{\mathbf{a}}$ を, **$\mathbf{a}$ を重みとする ($\mathscr{W}$ 上の) Martin 距離** と呼ぶ.

註 6.3. $\rho_{\mathbf{a}}$ の (本質的なものの) 提唱者は Martin [6] である. 後に Dynkin [3] によって, 離散状態空間に定義された.

7. MARTIN 境界と SIERPIŃSKI GASKET

補題 7.1. 異なる重み: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して, $\mathscr{W}$ 上の列: $\{\mathbf{x}_n\}$ が $\rho_{\mathbf{a}}$-Cauchy 列であることと $\rho_{\mathbf{b}}$-Cauchy 列であることは同値である.

証明. $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathscr{W}$ が $\rho_{\mathbf{a}}$-Cauchy であるとすると, 次の (C1) か (C2) のいづれかが成り立つことから $\{\mathbf{x}_n\}$ が $\rho_{\mathbf{b}}$-Cauchy であることも解る.

(C1) 或る $\mathbf{x} \in \mathscr{W}$ と $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ $(\forall n \geq n_0)$ が成立.

(C2) $d(\mathbf{x}_n) \to \infty$ で且つ $\lim_n k(\mathbf{u},\ \mathbf{x}_n)$ が全ての $\mathbf{u} \in \mathscr{W}$ に対して存在する. 但し, ここでの "lim" は, 空間: $\{k(\mathbf{u},\ \cdot) | \mathbf{u} \in \mathscr{W}\}$ の各点収束位相での意味. □

$\overline{\mathscr{W}}$ を, 距離: $\rho_{\mathbf{a}}$ による **$\mathscr{W}$ の完備化** とすると (補題7.1 より, $\overline{\mathscr{W}}$ は $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ の採り方に依らない), $\overline{\mathscr{W}}$ は compact 距離空間になる. 更に, $\mathbf{u} \in \mathscr{W}$ を固定した時, 写像: $k(\mathbf{u},\ \cdot) : \mathscr{W} \to \mathbb{R}$ は一様連続なので $\rho_{\mathbf{a}}$ は $\overline{\mathscr{W}}$ 上の写像:

$$\rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^*,\ \mathbf{y}^*) = |2^{-d(\mathbf{x}^*)} - 2^{-d(\mathbf{y}^*)}| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{N^n} \sup_{\mathbf{u}\in\mathscr{W}_n} |k(\mathbf{u},\ \mathbf{x}^*) - k(\mathbf{u},\ \mathbf{y}^*)| \qquad \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \overline{\mathscr{W}}$$

に拡張される.

補題 7.2. $\rho_{\mathbf{a}}$ が $\overline{\mathscr{W}}$ 上の距離となる為の必要十分条件は

$$\mathbf{a} \in \ell_1^+ := \left\{ \mathbf{a} = \{a_n\}_n \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,\ a_n > 0 \text{ for } \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

証明. $\Pi : \mathscr{W}_\infty \to (\mathscr{W}_\infty/\sim)$ を自然な射影 (canonical projection) とする. この時 $n \in \mathbb{N}$ を任意に固定すれば, 簡単な計算により $\sup_{\mathbf{u}\in\mathscr{W}_n} |k(\mathbf{u},\ \Pi(1^\infty)) - k(\mathbf{u},\ \Pi(2^\infty))| = N^n$ となることが判る, つまり $\rho_{\mathbf{a}}(\Pi(1^\infty),\ \Pi(2^\infty)) = \sum_{n=1}^\infty a_n$ となることから従う. □

一方, Denker と佐藤は, 論文 [1] で Sierpiński gasket $\mathscr{S}$ を, **Martin 境界**: $\mathscr{M} := \overline{\mathscr{W}} \setminus \mathscr{W}$ として表現することに成功した (証明の鍵となったのが命題 5.1):

命題 7.3. [1] $\mathscr{M} \cong (\mathscr{W}_\infty/\sim)$. つまり命題 4.1 により $\mathscr{M} \cong \mathscr{S}$.

故に, この命題は, $\mathscr{S}$ 上に, Euclid 距離とは異なる Martin 距離:

$$\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\ \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{N^n} \sup_{\mathbf{u}\in\mathscr{W}_n} |k(\mathbf{u},\ \xi) - k(\mathbf{u},\ \eta)| \qquad \mathbf{a} \in \ell_1^+, \xi, \eta \in \mathscr{S} \tag{7.1}$$

が定義されることをも示唆する. 以後, (7.1) を $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ **を重みとする $\mathscr{S}$ 上の Martin 距離**と呼ぶ.

以後 $\mathbf{a} = \{a_n\} \in \ell_1^+$ に対して, $G_{\mathbf{a}}(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ を

$$G_{\mathbf{a}}(n) := \sum_{k=1}^{n} 2^{k-n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{7.2}$$

とする.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, 写像: $\Pi_n : \mathscr{W}_\infty \to \mathscr{W}_n$ を $\Pi_n(\mathbf{x}) := x_1 x_2 \cdots x_n$ で定義する (ここで $\mathbf{x} := x_1 x_2 \cdots$). 更に $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}_\infty$ に対して

$$\alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y}} := \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N} | \Pi_k(\mathbf{x}) \neq \Pi_k(\mathbf{y})\} & \text{if } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \\ \infty & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \end{cases}$$

$$\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} := \begin{cases} \min\{k \geq \alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + 1 | \Pi_k(\mathbf{x}) \neq \Pi_k(\mathbf{y})^\#\} & \text{if } \mathbf{x} \not\sim \mathbf{y}, \\ \infty & \text{if } \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \end{cases} \qquad (\geq \alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + 1).$$

で, $\alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を定義しておく. 以下, 簡単な為, $\sup_{\xi,\ \eta\in\mathscr{S}} \|\xi - \eta\| = 1$ であるとする. 次の補題 7.4 は以後に於いて頻繁に使う.

補題 7.4. $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ とし, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}_\infty, \xi, \eta \in \mathscr{S}$ を $\xi = \Pi(\mathbf{x}), \eta = \Pi(\mathbf{y})$ を充たすものとする. この時, 以下の (1), (2) が成立する.

(1) $2^{-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}-5/2}\sqrt{N/(N-1)} \leq \|\xi - \eta\| \leq 2^{-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}+3}$.

(2) $2^{-2} G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \leq \rho_{\mathbf{a}}(\xi,\ \eta) \leq 2 G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})$, ここで $G_{\mathbf{a}}$ は (7.2) で定義したものである.

証明. (1) は [2] の Lemma 3.6 を参照の事. (2) も [2] の Lemmas 3.3, 3.5 と殆んど同じ. 実際, これらの Lemma より $\xi \neq \eta$ ならば

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathscr{W}_n} |k(\mathbf{u},\,\xi) - k(\mathbf{u},\,\eta)| \geq \begin{cases} 2^{n-2-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} N^n & \text{if } 1 \leq n \leq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \\ 2^{-2} N^n & \text{if } n \geq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + 1 \end{cases} \tag{7.3}$$

及び

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathscr{W}_n} |k(\mathbf{u},\,\xi) - k(\mathbf{u},\,\eta)| \leq \begin{cases} 2^{n+1-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} N^n & \text{if } 1 \leq n \leq \alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \\ 2^{n-1-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} N^n & \text{if } \alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + 1 \leq n \leq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \\ 2^{-1} N^n & \text{if } n \geq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + 1 \end{cases} \tag{7.4}$$

が得られる. 従って $\mathbf{a} = \{a_n\}$ とすると (7.1) と (7.3) より

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{a}}(\xi,\,\eta) &\geq \sum_{n=1}^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} (2^{n-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}-2} N^n)\frac{a_n}{N^n} + \sum_{n=\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}+1}^{\infty} (2^{-2}N^n)\frac{a_n}{N^n} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} \frac{a_n}{2^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}-n}} + \sum_{n=\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}+1}^{\infty} a_n\right) \\ &= 2^{-2} G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

上からの評価は (7.4) から従う. $\xi = \eta$ の場合は, $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ であるので $\sum_{n=1}^{k} 2^{n-k} a_n = o(1)$ となることと $\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} = \infty$ であることから結論が得られる. □

8. $\mathscr{S}$ 上の MARTIN 距離の LIPSCHITZ 同値性

フラクタル解析に於ける, Hausdorff 次元等の重要な特性量は, 互いに Lipschitz 同値な距離でないと保存されない. 従って,

「重み: $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ の, どんな条件の下で, $\rho_{\mathbf{a}}$ の Lipschitz 同値性が特徴付けられるか ?」

は, 当然考察せねばならない問題である. 本節では, Martin 距離の Lipschitz 同値性について調べた結果を挙げる.

先づ, 「Lipschitz 連続」と「Lipschitz 同値」の意味を明確にしておく.

定義 8.1. d_1 と d_2 は $\mathscr{S}$ 上に定義された 2 つの距離とする. この時,

(1) d_1 が **d_2-Lipschitz 連続である** とは, $\xi, \eta \in \mathscr{S}$ に無関係な定数 $C > 0$ が在って

$$d_1(\xi,\,\eta) \leq C d_2(\xi,\,\eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathscr{S}$$

を充たす時を言う.

(2) d_1 と d_2 が **Lipschitz 同値である** とは $\xi, \eta \in \mathscr{S}$ に無関係な定数 C_1, C_2 $(0 < C_1 \leq C_2 < \infty)$ が在って

$$C_1 d_1(\xi,\, \eta) \leq d_2(\xi,\, \eta) \leq C_2 d_1(\xi,\, \eta) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathscr{S}$$

を充たす時を言う.

以下の命題で $\mathscr{S}$ 上の, Euclid 距離: $\|\cdot\|$ と Martin 距離から入る 2 つの位相の関係について述べる.

命題 8.2. $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ とする. この時

(1) $\mathscr{S}$ 上の 2 つの距離: $\rho_{\mathbf{a}}$ と $\|\cdot\|$ は同じ位相を定める.

(2) $\|\cdot\|$ は $\rho_{\mathbf{a}}$-Lipschitz 連続である.

証明. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}_\infty$, $\xi, \eta \in \mathscr{S}$ を $\xi = \Pi(\mathbf{x}), \eta = \Pi(\mathbf{y})$ を充たすものとする.

(1) 先づ, 補題 7.4 の (1) より $\|\xi - \eta\| \to 0$ と $\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \to \infty$ は同値であることが判る. 故に $\mathbf{a} = \{a_n\} \in \ell_1^+$ であるので $\sum_{n=1}^{k} 2^{n-k} a_n = o(1)$ であることから $\|\xi - \eta\| \to 0$ と $G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \to 0$ は同値である. 従って補題 7.4 の (2) より $\|\xi - \eta\| \to 0$ と $\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\, \eta) \to 0$ は同値である.

(2) (7.2) より, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $G_{\mathbf{a}}(m+1) > 2^{-1} G_{\mathbf{a}}(m)$ が成立するので $G_{\mathbf{a}}(m) \geq 2^{-m+1} G_{\mathbf{a}}(1)$, つまり $4G_{\mathbf{a}}(m)/G_{\mathbf{a}}(1) \geq 2^{-m+3}$ が得られる. 故に補題 7.4 より $G_{\mathbf{a}}(1)\|\xi - \eta\| \leq 4G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \leq 16\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\, \eta)$ となることから結論が得られる. □

次に, 本節の主定理として, 異なる重みを持つ, 2 つの Martin 距離の Lipschitz 同値性について述べる.

定理 8.3. 異なる重み: $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell_1^+$ を持つ $\mathscr{S}$ 上の 2 つの距離: $\rho_{\mathbf{a}}$ と $\rho_{\mathbf{b}}$ が, Lipschitz 同値である為の必要十分条件は

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{G_{\mathbf{a}}(n)}{G_{\mathbf{b}}(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{G_{\mathbf{a}}(n)}{G_{\mathbf{b}}(n)} < \infty$$

証明. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}_\infty, \xi, \eta \in \mathscr{S}$ を $\xi = \Pi(\mathbf{x}), \eta = \Pi(\mathbf{y})$ を充たすものとする. この時補題 7.4 の (2) より $2^{-3} G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})/G_{\mathbf{b}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \leq \rho_{\mathbf{a}}(\xi, \eta)/\rho_{\mathbf{b}}(\xi, \eta) \leq 2^3 G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})/G_{\mathbf{b}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})$ となる. 故に $\rho_{\mathbf{a}}$ が $\rho_{\mathbf{b}}$-Lipschitz 連続となる為の必要十分条件は

$$\left(\liminf_{n\to\infty} G_{\mathbf{b}}(n)/G_{\mathbf{a}}(n)\right)^{-1} = \limsup_{n\to\infty} G_{\mathbf{a}}(n)/G_{\mathbf{b}}(n) < \infty.$$

従って ($G_{\mathbf{a}}(n), G_{\mathbf{b}}(n) > 0$ だから) $\lim_{n\to\infty} G_{\mathbf{b}}(n)/G_{\mathbf{a}}(n) > 0$ となることから従う. □

最後に, $\rho_{\mathbf{a}}$ と $\|\cdot\|$ の Lipschitz 同値性について述べる.

定理 8.4. $\mathscr{S}$ 上の, 重み: $\mathbf{a} = \{a_n\}_n$ を持つ $\rho_{\mathbf{a}}$ と $\|\cdot\|$ が Lipschitz 同値である為の必要十分条件は $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_n < \infty$.

証明. 命題 8.2 の (2) より, $\rho_{\mathbf{a}}$ が $\|\cdot\|$-Lipschitz 連続である為の必要十分条件が

$$\sum_{n=1}^\infty 2^n a_n < \infty$$

であることを示せば十分である. 以下 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}_\infty, \xi, \eta \in \mathscr{S}$ を $\xi = \Pi(\mathbf{x}), \eta = \Pi(\mathbf{y})$ を充たすものとする. 先づ

$$-3 \leq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + [\log_2 \|\xi - \eta\|] \leq 3 \tag{8.1}$$

が成立することを示す. ここで $[x]$ は x を越えない最大の整数とする. $A_N := \sqrt{N/(N-1)}$ とすると補題 7.4 の (1) より

$$\log_2 2^{-5/2} A_N \|\xi - \eta\|^{-1} \leq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \leq \log_2 2^3 \|\xi - \eta\|^{-1}. \tag{8.2}$$

これをもう一度厳密に書き直すと

$$\log_2 2^{-5/2} A_N \|\xi - \eta\|^{-1} + 1 - \mathbb{1}_{\mathbf{Z}}(\log_2 2^{-5/2} A_N \|\xi - \eta\|^{-1}) \leq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \leq [\log_2 2^3 \|\xi - \eta\|^{-1}],$$

つまり $z_1 := \mathbb{1}_{\mathbf{Z}}(\log_2 \|\xi - \eta\|)$, $z_2 := [\log_2 \sqrt{2} A_N]$, $z_3 := \mathbb{1}_{\mathbf{Z}}(\log_2 \sqrt{2} A_N \|\xi - \eta\|^{-1})$ とすれば

$$z_1 + z_2 - z_3 - 3 \leq \beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + [\log_2 \|\xi - \eta\|] \leq z_1 + 2$$

となる. ここで簡単な計算により

$$z_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } N = 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

故に

$$z_1 + z_2 - z_3 - 3 = \begin{cases} -3 & \text{if } N \geq 3 \text{ and } z_1 = 0, \\ -2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので (8.1) が従う.

さて $\xi, \eta \in \mathscr{S}$ が $|\xi - \eta| > 2^{-7/2}A_N$ を充たしているとせよ. このとき $\mathscr{S}$ は $\mathbb{R}^{N-1}$ で compact であるから命題 8.2 の (1) より $\sup_{\xi,\,\eta\in\mathscr{S}} \rho_{\mathbf{a}}(\xi,\,\eta) < \infty$. 従って

$$\frac{\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\,\eta)}{\|\xi - \eta\|} < 2^{7/2}A_N^{-1}\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\,\eta) \leq 2^{7/2}A_N^{-1} \sup_{\xi,\,\eta\in\mathscr{S}} \rho_{\mathbf{a}}(\xi,\,\eta) < \infty$$

となることから, 以後の議論では $\xi, \eta \in \mathscr{S}$ は $0 < |\xi - \eta| \leq 2^{-7/2}A_N$ を充たしているとして良い. このとき (8.2) より $\log_2(2^{-5/2}A_N\|\xi - \eta\|^{-1}) \geq 1$ となることに注意する. (7.2) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $G_{\mathbf{a}}(n) > G_{\mathbf{a}}(n+1)$ が成立する, つまり数列: $\{G_{\mathbf{a}}(n)\}$ は単調減少列なので (8.1) と補題 7.4 の (2) より

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\,\eta) &\leq 2\Biggl(\sum_{n=1}^{-3-[\log_2\|\xi-\eta\|]} 2^{3+[\log_2\|\xi-\eta\|]}\cdot 2^n a_n + \sum_{n=-2-[\log_2\|\xi-\eta\|]}^{\infty} a_n\Biggr) \\
&= 2^{3+[\log_2\|\xi-\eta\|]}\Biggl(2\sum_{n=1}^{-3-[\log_2\|\xi-\eta\|]} 2^n a_n + 2^{-2-[\log_2\|\xi-\eta\|]} \sum_{n=-2-[\log_2|\xi-\eta|]}^{\infty} a_n\Biggr).
\end{aligned}$$

従って $\|\xi - \eta\|/2 < 2^{[\log_2\|\xi-\eta\|]} \leq \|\xi - \eta\|$ であることを使えば

$$\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\,\eta) \leq 8\|\xi - \eta\|\Biggl(2\sum_{n=1}^{-3-[\log_2\|\xi-\eta\|]} 2^n a_n + 2^{-[\log_2\|\xi-\eta\|]-2} \sum_{n=-2-[\log_2\|\xi-\eta\|]}^{\infty} a_n\Biggr)$$

が得られる. よって $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n < \infty$ ならば $2^k\sum_{n=k}^{\infty} a_n = o(1)$ であることを使えば結論が従う. □

9. Hausdorff 次元の評価

前節では, Martin 距離から入る $\mathscr{S}$ の位相の構造, 異なった重みを持つ Martin 距離同士の Lipschitz 同値性, Martin 距離と Euclid 距離の関係, 等が判った. この節では, 前節で得られた結果を使って, $\mathscr{S}$ 上の (重みを伴った) Martin 距離に関する Hausdorff 次元を評価

したことを報告する. Hausdorff 次元は, その空間に定義される距離に依存しているので, 以後, 距離: d に関する $\mathscr{S}$ の Hausdorff 次元を $\dim_d \mathscr{S}$ で表す.

先づ, 以下で, 良く知られている, Hutchinson [4] や Moran [7] によって得られた, $\dim_{\|\cdot\|} \mathscr{S}$ の値を挙げておく.

命題 9.1. [4, 7] $\dim_{\|\cdot\|} \mathscr{S} = -(\log N)/\log(1/2)$.

註 9.2. 命題 8.2 の (2) で $\|\cdot\|$ は $\rho_{\mathbf{a}}$-Lipschitz 連続であることがわかっているので, 命題 9.1 より $\dim_{\rho_{\mathbf{a}}} \mathscr{S} \geq \dim_{\|\cdot\|} \mathscr{S} = -(\log N)/\log(1/2)$ となることに注意しておく.

始めに, 特別な重み: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\gamma) := \{\gamma^n\} \in \ell_1^+$ を*持つ $\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}$ に関する $\mathscr{S}$ の Hausdorff 次元: $\dim_{\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}} \mathscr{S}$ を以下で与える.

定理 9.3.

$$\dim_{\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}} \mathscr{S} = \begin{cases} -(\log N)/\log(1/2) & \text{if } 0 < \gamma < 1/2, \\ -(\log N)/\log \gamma & \text{if } 1/2 \leq \gamma < 1. \end{cases}$$

証明. $0 < \gamma < 1/2$ ならば $\{(2\gamma)^n\}_n \in \ell_1^+$ なので定理 8.4 より $\dim_{\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}} \mathscr{S} = \dim_{\|\cdot\|} \mathscr{S} = -(\log N)/\log(1/2)$ となる. 更に $\dim_{\rho_{\mathbf{a}(1/2)}} \mathscr{S} = \dim_{\|\cdot\|} \mathscr{S} = -(\log N)/\log(1/2)$ となることは既に [2] の Theorem 3.6 で示されている. 従って, 以後は $1/2 < \gamma < 1$ として良い.

以下 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{W}_\infty$, $\xi, \eta \in \mathscr{S}$ を $\xi = \Pi(\mathbf{x})$, $\eta = \Pi(\mathbf{y})$ を充たすものとする. (7.2) より

$$G_{\mathbf{a}(\gamma)}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \frac{\gamma}{(2\gamma-1)(1-\gamma)}\gamma^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} - \frac{2\gamma}{2\gamma-1}2^{-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}$$

なので, これから

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\gamma^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} \leq G_{\mathbf{a}(\gamma)}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \leq \frac{\gamma}{(2\gamma-1)(1-\gamma)}\gamma^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}. \tag{9.1}$$

が従う. 故に, これと補題 7.4 の (2) より

$$\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}(\xi, \eta) \leq \frac{2\gamma}{(2\gamma-1)(1-\gamma)}\left(e^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\log(1/2)}\right)^{(\log\gamma)/\log(1/2)}.$$

を得る. 更に補題 7.4 の (1) で $2^{-3}\|\xi-\eta\| \leq e^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\log(1/2)} \leq 2^{5/2}A_N^{-1}\|\xi-\eta\|$ となることを知っているので, 結局或る定数 $C > 0$ が在って $\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}(\xi, \eta) \leq C\|\xi-\eta\|^{(\log\gamma)/\log(1/2)}$ と†な

*故に $0 < \gamma < 1$.

†つまり $\rho_{\mathbf{a}}$ は 指数: $(\log\gamma)/\log(1/2)$ の $\|\cdot\|$-Hölder 連続となる.

る. (9.1) を使って, 同様に

$$\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}(\xi,\,\eta) \geq \frac{\gamma}{4(1-\gamma)}(e^{\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\log(1/2)})^{(\log\gamma)/\log(1/2)}$$

も得られるので或る 2 つの定数 $C_1, C_2 > 0$ が在って

$$C_1\|\xi-\eta\|^{(\log\gamma)/\log(1/2)} \leq \rho_{\mathbf{a}(\gamma)}(\xi,\,\eta) \leq C_2\|\xi-\eta\|^{(\log\gamma)/\log(1/2)}$$

と書け[‡]る. 以上のことから

$$\dim_{\rho_{\mathbf{a}(\gamma)}}\mathscr{S} = ((\log\gamma)/\log(1/2))^{-1}\dim_{\|\cdot\|}\mathscr{S} = -(\log N)/\log\gamma$$

となる. □

定理 8.3, 註 9.2, 及び, この定理 9.3 を手掛かりにして, 一般の重み: $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ に対する $\dim_{\rho_{\mathbf{a}}}\mathscr{S}$ を評価した結果が, 以下の定理 9.4 である.

定理 9.4. $\mathbf{a} = \{a_n\} \in \ell_1^+$ とする. この時,

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n < \infty$ ならば, $\dim_{\rho_{\mathbf{a}}}\mathscr{S} = -(\log N)/\log(1/2)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n = \infty$ ならば,

$$-(\log N)/\log\underline{\Gamma}(\mathbf{a}) \leq \dim_{\rho_{\mathbf{a}}}\mathscr{S} \leq -(\log N)/\log\overline{\Gamma}(\mathbf{a}).$$

但し,

$$\underline{\Gamma}(\mathbf{a}) := \sup\{1/2 \leq \gamma < 1 | \liminf_{n\to\infty}\gamma^{-n}G_{\mathbf{a}}(n) > 0\},$$

$$\overline{\Gamma}(\mathbf{a}) := \inf\{1/2 < \gamma \leq 1 | \limsup_{n\to\infty}\gamma^{-n}G_{\mathbf{a}}(n) < \infty\}.$$

証明. (1) は定理 8.4 から得られるので (2) のみに触れる. 今 (7.2) より

$$(1/2)^{-n}G_{\mathbf{a}}(n) = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_k + 2^n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

なので $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty}(1/2)^{-n}G_{\mathbf{a}}(n) = \infty$ となる. 他方 (簡単な計算から) $\lim_{n\to\infty} 1^{-n}G_{\mathbf{a}}(n) = \lim_{n\to\infty} G_{\mathbf{a}}(n) = 0$ であることも判るので結局 $\{1/2 \leq \gamma < 1 | \liminf_{n\to\infty}\gamma^{-n}G_{\mathbf{a}}(n) > 0\} \neq \varnothing$ 及び $\{1/2 < \gamma \leq 1 | \limsup_{n\to\infty}\gamma^{-n}G_{\mathbf{a}}(n) < \infty\} \neq \varnothing$ となることが確かめられる.

[‡]つまり, 逆に $\|\cdot\|$ は指数: $(\log\gamma)/\log(1/2)$ の $\rho_{\mathbf{a}}$-Hölder 連続となる.

さて $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathscr{W}_\infty$ とする. このとき $1/2 < \gamma < 1$ に対して (9.1) より

$$(2\gamma-1)(1-\gamma)\gamma^{-1}G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})r^{-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}} \leq G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})/G_{\mathbf{a}(\gamma)}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \leq (1-\gamma)\gamma^{-1}G_{\mathbf{a}}(\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\gamma^{-\beta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}}$$

となるので定理 8.3 と 9.3 より求めたい結論を得る. □

References

1. M. Denker and H. Sato: Sierpiński gasket as a Martin boundary I: Martin kernels. *Potential Anal.* **14** (2001), 211–232.
2. ______: Sierpiński gasket as a Martin boundary II: The intrinsic metric. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **35** (1999), 769–794.
3. E. B. Dynkin, Boundary theory of Markov processes (the discrete case). *Russian Math. Surveys* **24** (1969), 1–42.
4. J. E. Hutchinson: Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), 713–747.
5. A. Imai, Y. Kawasaki and H. Sato: Martin metrics on the Sierpiński gasket. To appear in *Stoch. Dyn.*
6. R. S. Martin, Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **49** (1941), 137–142.
7. P. A. P. Moran: Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **42** (1946), 15–23.