

数理解析研究所講究録 1342

短期共同研究

IV型対称領域上の保型形式の研究

京都大学数理解析研究所

2003年10月

これは2002年12月に数理解析研究所での短期共同研究として行われたミニ集会の記録である。多変数保型形式・高次元モジュラー多様体のうち、特にIV型対称エルミート領域に関連するものに焦点を合わせた理由は、最近これに関する研究がいくつかことなる方向で進展を見せているからである。

現代の多変数保型形式の研究の淵源が19世紀後半のFelix KleinやHenri Poincaré等を中心とする一変数保型関数の研究にあることは周知である。幾何学・解析学とさらに種々の点で整数論と絡み合うこの主題が、当時の西欧の最も優れた数学者を魅了する分野であったことは間違いない。

これを多変数の場合に拡張するのは極めて自然な成り行きである。Hilbert, Siegel, 戦後の優れた日本人数学者の寄与などにより、この方面ではこれまでに大きな成果が得られた。しかしながら、現状をつぶさに見てみると、我々はまだ期待されているほど豊富な成果を、特に高次元特有の事象を見出すと点において、満足のいくように手にしていないことに気づく。

多変数の保型形式・高次元のモジュラー多様体は何故難しいのであろうか？明らかな最も大きな理由は、多変数故の対象の自由度の大きさである。解析的・表現論的な側面からこのことを少しより具体的に説明しよう。

保型形式論には、実半単純Lie群 G とその中の(算術的)不連続部分群 Γ が登場する。 G の極大部分群 K を一つ固定するとき G/K は対称空間になる。 G 上の保型形式 f は左 Γ 不変の C^∞ であるので $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ の元であるが、さらに右 K 有限であり、これは G の元による右移動により既約、あるいは有限の長さの (\mathfrak{g}, K) 加群 V を生成し、さらに V の元は無遠において適切な増大条件を満たすようなものである。

さて研究の現状をみると比較的まとまった「理論」があるのは次のような状況のときである：

(A): 保型形式 f に対応する保型的 L 関数を構成する一つの標準的な手法として f のFourier展開の情報の一部(大域的なWhittakerモデル)を使うものがある。群 G がquasi-splitのときに通用するこの手法は、表現 V がgenericあるいはlargeといわれるとき、即ちGelfand-Kirillov次元が可能な限りで最大になるとき(つまり G の最大べき単部分群 N の次元とひとしいとき)にしか適用できない；

(B): 現時点で大域的な(つまり整数論的な言い方をすれば任意素数 p における振る舞いも)理解ができる保型形式としては、 V (および f で生成される既約な p 進の表現も)が極小表現つまりGelfand-Kirillov次元が可能な限り小さいものか、それに近いくらい小さなものが挙げられる。

古典的な $G = SL(2, \mathbf{R})$ のときは V が非零で既約である限り、その

Gelfand-Kirillov 次元は全て 1 であるので、全ての場合が (A) であり同時に (B) である。しかし G が大きくなると、極小表現 V と「極大表現」(large) V' では大きく様相をことにし、しかもこれには V に属する保型形式 f と V' に属する保型形式 f' の幾何学的意味の違いも関連している。

伝統的に G/K がエルミート対称領域のとき、 V が highest weight module (つまり f が正則保型形式) のときの研究が比較的早くから、それなりの成果をあげて成功した理由の一つには、そのときに V の Gelfand-Kirillov 次元が離散系列表現と呼ばれるものの中で最も小さいものであると言う事実がある。

さて古典的状况に比して格段に大きな自由度を有つ対象を研究する手法・道具は、それに応じて複雑で大きなものにならざるを得ない。Jean-Pierre Serre がどこかで言うか書いているが、代数幾何学と表現論は数学の分野で最も難しいものであるようである。かくして、一変数保型関数の研究のときに密接に結びついていた幾何学的視点・手法と解析学的視点・手法は多変数の研究では分離し始め、同じ対象でも相互に接点の少ない研究グループによって研究されるにいたる。

この集まりは、過去の「統一の時代」に見られた眺望を今の時代に少しでも回復しようという試みである。勿論それは決して容易ではないが、どこからか始めなければ今後始まるであろう「高次元・多変数特有の構造」の研究において失うものが多いように思う。

最後のこの企画の代表者である、筆者の怠慢により原稿の上梓が大幅に遅延したことを、寄稿者並びに潜在的な読者諸氏にお詫びする。

2003 年 9 月

織田孝幸

集会における講演者

12月24日午後

- 1) 織田孝幸 (東京大学数理科学); 2) 森山知則 (東京大学数理科学);
- 3) 石井 卓 (東京大学数理科学)

25日午前

- 1) 金銅誠之 (名古屋大学多元数理); 2) 都築正男 (上智大学理工学部);
- 3) 西山 亨 (京都大学総合人間学部)

25日午後

- 1) 吉川謙一 (東京大学数理科学); 2) 志賀弘典 (千葉大学理学部);
- 3) 吉田正章 (九州大学数理学)

26日

- 1) 菅野孝史 (金沢大学理学部); 2) 小林俊行 (京都大学数理解析研究所)

IV型対称領域上の保型形式の研究
 Automorphic forms on type IV symmetric domains
 短期共同研究報告集

2002年12月24日～12月26日
 研究代表者 織田 孝幸 (Takayuki Oda)
 副代表者 早田 孝博 (Takahiro Hayata)

目 次

1.	Automorphic forms on type IV symmetric domains -----	1
	東大・数理科学 織田 孝幸(Takayuki Oda)	
2.	松島 - 村上同型と簡約 Lie 群のコホモロジー的表現について -----	13
	東大・数理科学 森山 知則(Tomonori Moriyama)	
3.	$SO_0(2, q)$ のクラス 1 主系列表現に対する球関数について -----	24
	東大・数理科学 石井 卓(Taku Ishii)	
4.	AUTOMORPHIC GREEN FUNCTIONS ON ARITHMETIC QUOTIENTS OF TYPE IV SYMMETRIC DOMAIN -----	35
	上智大・理工 都築 正男(Masao Tsuzuki)	
5.	THETA LIFTING OF NEARLY HOLOMORPHIC MODULAR FORM -----	40
	京大・総合人間 西山 享(Kyo Nishiyama)	
6.	IV型、Complex ball の算術商をモジュライ空間に持つ代数多様体の例について--	53
	名大・多元数理科学 金銅 誠之(Shigeyuki Kondo)	
7.	CALABI-YAU 超曲面、判別式、QUILLEN 計量 -----	61
	東大・数理科学 吉川 謙一(Ken-Ichi Yoshikawa)	
8.	The family of $K3$ surfaces with a transcendental lattice $U(2)^2 \times \langle -2 \rangle^4$ for a general member -----	70
	フンボルト財団研究員、 ベルリン=フンボルト大 小池 健二(Kenji Koike) 千葉大・自然科学 志賀 弘典(Hironori Shiga)	
9.	$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上の $(1, 1)$ 次曲線 4 本の配置について -----	82
	名大・多元数理科学 落合 啓之(Hiroyuki Ochiai) フンボルト財団研究員、 ベルリン=フンボルト大 小池 健二(Kenji Koike)	
10.	楕円保型関数 λ の無限積表示 -----	86
	九大・数理学 吉田 正章(Masaaki Yoshida)	
11.	IV型領域上の正則保型形式と L 関数 -----	93
	京産大・理 村瀬 篤(Atsushi Murase) 金沢大・理 菅野 孝志(Takashi Sugano)	
12.	$O(p, q)$ の極小ユニタリ表現のシュレディンガーモデル -----	107
	京大・数理研 小林 俊行(Toshiyuki Kobayashi)	