

# 頂点作用素代数 $V_L^+$ の自己同型群

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東京大学大学院数理科学研究科  
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo  
e-mail: shima@ms.u-tokyo.ac.jp

## 1 序

頂点作用素代数 (VOA) の公理は Borchers, Frenkel らによって与えられ, 研究されてきた. その中でも VOA の自己同型群を研究することは重要である. 例えば, ムーンシャイン加群と呼ばれる VOA の全自己同型群は散在型単純群の中で位数最大であるモンスター単純群である. 自己同型群を研究することは VOA の対称性を研究することのみならず, モンスター単純群などの面白い群を新たな視点から考察することになる. そして, ムーンシャイン予想に代表されるような有限群論, VOA 論と他分野との新たな繋がりが発見されることが期待される.

一般に VOA  $V$  とその自己同型群  $G \subset \text{Aut}(V)$  に対して,  $V$  の  $G$  による固定部分空間  $V^G$  は  $V$  の部分 VOA となる. しかしながら, たとえ  $V$  の性質が良く分かっているとしても  $V^G$  の性質を調べることは難しいことが多い.

VOA の典型的な例の一つとして偶格子  $L$  から作られる格子 VOA  $V_L$  がある. この VOA の性質についてはよく研究されており, 既約加群の分類, フュージョン規則や自己同型群の決定などはすでになされている. 偶格子  $L$  の自己同型  $-1$  の持ち上げとして得られる  $V_L$  の位数 2 の自己同型による固定部分空間を  $V_L^+$  と書くことにする. 最近, 一般の階数の偶格子  $L$  に対して  $V_L^+$  の既約加群の分類が 安部氏, Dong によってなされ, フュージョン規則が 安部氏, Dong, Li によって決定された.

本稿ではそれら  $V_L^+$  の性質を用いてその全自己同型群  $\text{Aut}(V_L^+)$  を決定するアルゴリズムについて解説する.  $\text{Aut}(V_L^+)$  が有限群となる必要かつ十分条件は  $L$  が長さの平方が 2 の元 (ルート) を持たないことである. よって, 有限群と VOA との関係を研究する立場から, 主にルートを持たない偶格子  $L$  から作られる  $V_L^+$  の全自己同型群について考察する. この場合に  $\text{Aut}(V_L^+)$  の生成元を与え, その位数を決定することが出来た. 特に,  $\text{Aut}(V_L^+)$  が格子の自己同型の持ち上げ以外の元を持つための必要かつ十分条件が  $L$  が二元線形符号に関する Construction B で構成されることであることを示した. よって, 原理的にはルートを持たない偶格子  $L$  に対して  $\text{Aut}(V_L^+)$  の構造を決定することが可能である. しか

しながら  $\text{Aut}(L)$  の構造は格子  $L$  に依存しており  $\text{Aut}(V_L^+)$  の構造に  $\text{Aut}(L)$  が深く関係していることから、全ての偶格子  $L$  に対して  $\text{Aut}(V_L^+)$  の構造を統一的に議論することは難しい。

具体例として、ルートを持たない偶格子の典型的な例である単純ルート格子  $R$  を  $\sqrt{2}$  倍して得られる格子  $\sqrt{2}R$  から作られる  $V_{\sqrt{2}R}^+$  の全自己同型群のリストを与えた。また、ルートを持たない偶格子  $L$  が  $\sqrt{2}E_8$  または階数 16 の Barnes-Wall 格子と同型の場合に限り  $V_L^+$  が例外的に良い対称性を持つことを示し、それらの全自己同型群を決定した。

このアルゴリズムは  $\text{Aut}(V_L^+)$  だけに限らず VOA  $V$  の有限可換自己同型群  $A$  による固定点として得られる部分 VOA  $V^A$  の全自己同型群を調べる際にも有効である。この方法で  $\text{Aut}(V^A)$  の構造を詳しく調べるには  $\text{Aut}(V)$  や  $V^A$  の性質が良く知られていなければ困難であろう。

詳しい証明等については [Sh] を参照していただきたい。本稿で扱う VOA は複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義されているものである。また古典群や群の拡大の表記は [ATLAS] のものを用いる。

## 2 準備

この章では必要な定義や事実について述べる。VOA の一般論は [Bo, FLM] を参照していただきたい。

### 2.1 頂点作用素代数

この節では VOA に関するいくつかの定義を与える。

**定義 2.1.**  $\mathbb{C}$  上の頂点作用素代数 (VOA)  $V = (V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  とは  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  で次数付けされた  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間  $V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$  (ただし、各  $n$  に対して  $V_n$  は  $\mathbb{C}$  上有限次元)、頂点作用素と呼ばれる線形写像

$$\begin{aligned} Y : V &\rightarrow (\text{End}V)[[z, z^{-1}]], \\ v &\mapsto Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}, \end{aligned}$$

*Vacuum vector* と呼ばれる  $V_0$  の元  $\mathbf{1}$  と *Virasoro element* と呼ばれる  $V_2$  の元  $\omega$  の 4 つ組であり、 $a, b \in V, p, q, r \in \mathbb{Z}$  に対して次の (V1) から (V7) までの公理を満たすものである。

$$(V1) \quad a_n b = 0 \text{ for } n \gg 0.$$

$$(V2) \quad Y(\mathbf{1}, z) = \text{Id}_V, \text{ ただし } \text{Id}_V \text{ は } \text{End}(V) \text{ の単位元.}$$

(V3) *Borcherds identity*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{r+i}b)_{p+q-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \left( a_{p+r-i}b_{q+i} - (-1)^r b_{q+r-i}a_{p+i} \right). \end{aligned}$$

(V4)  $Y(v, z)\mathbf{1} \in (\text{End}V)[[z]]$ ,  $v_{-1}\mathbf{1} = v$ .

(V5)  $L(n) = \omega_{n+1}$  とおくと 中心電荷 (central charge) と呼ばれる  $c \in \mathbb{C}$  が存在して,  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して次が成り立つ:

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)c\delta_{m+n,0}.$$

(V6)  $a \in V_n$  に対して  $L(0)a = na$ .

(V7)

$$\frac{d}{dz}Y(v, z) = Y(L(-1)v, z).$$

**注意 2.2.** 公理 (V3) の式は両辺ともに無限和に見えるが,  $V$  の元に作用させることで有限和となるので well-defined である.

**定義 2.3.** VOA  $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  に対して,  $M = (M, Y_M)$  が  $V$ -加群であるとは,  $\mathbb{Z}_{\geq 0} + h$  ( $h \in \mathbb{Q}$ ) で次数付けされた  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間  $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{h+n}$  (ただし各  $n$  に対して  $M_{h+n}$  は  $\mathbb{C}$  上有限次元) と頂点作用素と呼ばれる線形写像

$$\begin{aligned} Y_M: V &\rightarrow (\text{End}M)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto Y_M(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n^M z^{-n-1}, \end{aligned}$$

の 2 つ組が  $a, b \in V$ ,  $u \in M$ ,  $p, q, r \in \mathbb{Z}$  に対して以下 (M1) から (M3) を満たすことである.

(M1)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{r+i}b)_{p+q-i}^M \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \left( a_{p+r-i}^M b_{q+i}^M - (-1)^r b_{q+r-i}^M a_{p+i}^M \right). \end{aligned}$$

$$(M2) \quad Y_M(\mathbf{1}, z) = \text{Id}_M.$$

$$(M3) \quad u \in M_\lambda \text{ に対して } \omega_1^M u = L(0)u = \lambda u.$$

**定義 2.4.**  $V = (V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  を VOA とする. 次数を保つ  $V$  の自己線形同型写像  $g$  が次の (A1) から (A3) を満たすとき VOA  $V$  の自己同型 という.

$$(A1) \quad gY(v, z)g^{-1} = Y(gv, z) \text{ for } v \in V.$$

$$(A2) \quad g\omega = \omega.$$

$$(A3) \quad g\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

また,  $\text{Aut}(V)$  で  $V$  の全自己同型群を表すことにする.

**定義 2.5.** 加群  $M = \sum_{i=0}^{\infty} M_{i+h}$  の 指標 (character) とは形式的冪級数

$$\text{ch}(M) := \sum_{i=0}^{\infty} (\dim M_{i+h}) q^{i+h}$$

のことをいう.

$V$ -加群上への自己同型群  $\text{Aut}(V)$  の作用について考える.

**命題 2.6.**  $V$  を VOA として,  $M = (M, Y_M)$  を  $V$ -加群とする.  $V$  の自己同型  $g$  に対して,

$$Y_{M^g}(v, z) := Y_M(gv, z)$$

は  $M$  上の頂点作用素となる. この頂点作用素によって得られる新たな  $V$ -加群を  $M^g := (M, Y_{M^g})$  と表すことにする.

**注意 2.7.**  $V$ -加群  $M$  が既約であったなら,  $M^g$  も既約である. したがって,  $\text{Aut}(V)$  が既約  $V$ -加群全体の集合へ置換群として作用する. また,  $M$  と  $M^g$  はベクトル空間としては同型であり Virasoro element は自己同型で保たれることから  $\text{ch}(M) = \text{ch}(M^g)$  が成り立つ.

**定義 2.8.**  $V = (V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  を VOA,  $(M^i, Y_{M^i})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を  $V$ -加群とする.  $\mathcal{Y}$  が  $\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1 \quad M^2 \end{pmatrix}$  型の 交絡作用素 (intertwining operator) とは線形写像

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} : M^1 &\rightarrow (\text{Hom}(M^2, M^3))\{z\}, \\ v &\mapsto \mathcal{Y}(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{C}} v_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

であって  $a \in V, v \in M^1$  and  $u \in M^2, q \in \mathbb{C}, p, r \in \mathbb{Z}$  に対して次の (I1), (I2), (I3) を満たすものをいう.

(I1) 任意の  $k \in \mathbb{C}$  に対して,  $v_{n+k}u = 0$  for  $n \gg 0$ .

(I2)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{r+i}^{M_1} v)_{p+q-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} \left( a_{p+r-i}^{M_3} v_{q+i} - (-1)^r v_{q+r-i} a_{p+i}^{M_2} \right). \end{aligned}$$

(I3)

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Y}(v, z) = \mathcal{Y}(L(-1)v, z).$$

$\binom{M^3}{M^1 M^2}$  型の交絡作用素全体は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間をなす. その空間を  $I_V \left( \binom{M^3}{M^1 M^2} \right)$  で表し,  $N_{M^1 M^2}^{M^3} := \dim I_V \left( \binom{M^3}{M^1 M^2} \right)$  と定義する.

ここで, 既約  $V$ -加群  $M_1, M_2$  に対して形式的な積

$$M_1 \times M_2 = \sum_{M_3} N_{M^1 M^2}^{M^3} M^3$$

を フュージョン規則 (fusion rule) という. ただし,  $M_3$  は既約  $V$ -加群全体を動く.

**注意 2.9.** (1)  $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$  を VOA,  $(M, Y_M)$  を  $V$ -加群とする. すると  $Y$  は  $\binom{V}{V V}$  型の交絡作用素,  $Y_M$  は  $\binom{M}{V M}$  型の交絡作用素となる.

(2) 一般には  $N_{M^1 M^2}^{M^3}$  は有限とは限らない. しかし, 知られている “良い” VOA は  $N_{M^1 M^2}^{M^3} = 0$  または  $1$  となっていることが多い.

(3)  $g \in \text{Aut}(V)$  に対して,  $N_{M^1, g M^2, g}^{M^3, g} = N_{M^1 M^2}^{M^3}$  が成り立つ.

## 2.2 頂点作用素代数 $V_L^+$ とその性質

この節では格子と頂点作用素代数  $V_L^+$  の性質について述べる.

**定義 2.10.**  $L \subset \mathbb{R}^n$  が階数  $n$  の 格子 であるとは,  $\mathbb{R}^n$  の基底  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset L$  で  $L = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i$  を満たすものが存在することである.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $\mathbb{R}^n$  の正定値対称双線形形式とし,  $L_i = \{v \in L \mid \langle v, v \rangle = i\}$  とおく. 格子  $L$  が任意の  $v \in L$  に対して  $\langle v, v \rangle \in 2\mathbb{Z}$  を満たすときに 偶格子 であるという. このとき,  $L_2$  の元を ルート と呼ぶ. また,  $L^\circ = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall v \in L\}$  を 双対格子 と呼ぶ.

**注意 2.11.** 偶格子  $L$  は  $L \subset L^\circ$  を満たす.

格子の基本的な構成法として 2 元線形符号を用いるものがある. 特に, Construction B と呼ばれる構成法が本稿では重要であり, それについて述べる. 簡単に符号の定義を復習する.

**定義 2.12.** 長さ  $n$  の 2 元線形符号 とは  $\mathbb{F}_2$  上の  $n$  次元ベクトル空間の部分空間のことである.  $\mathbb{F}_2^n$  の基底  $\{e_i\}$  を固定しておき,  $\mathbb{F}_2^n$  の元  $x = \sum x_i e_i$  を  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  と表す.  $\mathbb{F}_2^n$  の元  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  に対して  $x$  の 重さ を  $\#\{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x_i \neq 0\}$  と定義する. 2 元線形符号  $C$  が 重偶 であるとは  $C$  の任意の元の重さが 4 の倍数となっていることである.  $C$  の 最小重み とは  $C$  の 0 を除く元の重さの最小値のことである.

**定義 2.13.**  $C$  を長さ  $n$  の重偶 2 元線形符号とする. このとき, 格子

$$B(C) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \mid (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n) \in C, \sum_{i=1}^n v_i \in 4\mathbb{Z} \right\}$$

を直交基底  $\{\sqrt{2}e_i\}$  を基にした Construction B で実現された格子という. ただし  $\bar{v}_i \equiv v_i \pmod{2}$  である.

**注意 2.14.**  $B(C)$  は偶格子である. もし  $C$  の最小重みが 8 以上であったならば  $B(C)$  はルートを持たない.

偶格子  $L$  の  $\{\pm 1\}$  による中心拡大で, 交換関係  $[e^\alpha, e^\beta] = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle}$  を満たすものが同型を除いて唯一つ存在し, それを  $\hat{L}$  と書く. ただし  $L \rightarrow \hat{L}, \gamma \mapsto e^\gamma$  は断面とする.

**注意 2.15.** [FLM] の命題 5.4.1 より  $\text{Aut}(\hat{L}) \sim (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \cdot \text{Aut}(L)$  である.  $\text{Aut}(\hat{L})$  の元  $g$  の  $\text{Aut}(L)$  への自然な写像の像が  $h$  のときに,  $g$  を  $h$  の持ち上げ (*lift*) という.

偶格子  $L$  から VOA が自然に構成される. それを格子 VOA と呼び  $V_L$  と書く. 本稿では詳しく述べないが, 具体的な構成法に関しては [FLM] の 7 章 と 8 章を参考にされたい. 構成法から  $V_L$  の小さい次数の次元が簡単に計算でき  $\dim(V_L)_0 = 1, \dim(V_L)_1 = n + |L_2|$  を得る. また  $\text{Aut}(\hat{L})$  の元が自然に  $\text{Aut}(V_L)$  の元へ拡張されることがわかる.

$V_L$  と同様に  $\lambda + L \in L^\circ/L$  に対して, 既約  $V_L$ -加群  $V_{\lambda+L}$  が構成できる. さらに  $V_L$  の既約加群は  $\{V_{\lambda+L} \mid \lambda + L \in L^\circ/L\}$  に限ることが知られている. また, Dong と永友氏 ([DN1]) によって  $\text{Aut}(V_L)$  に関して次のことが示されている.

**命題 2.16.** [DN1]  $\text{Aut}(V_L) = \langle N, \text{Aut}(\hat{L}) \rangle$ , ただし  $N = \langle \exp(a_0) \mid a \in (V_L)_1 \rangle$ .

$\theta$  を  $-1 \in \text{Aut}(L)$  の  $\text{Aut}(V_L)$  への持ち上げで位数 2 の元とする. このとき  $V_L$  の  $\theta$  による固定部分空間  $V_L^+$  と  $\theta$  の  $-1$  固有空間を  $V_L^-$  を得る. すると  $V_L^+$  が部分 VOA となり,  $V_L = V_L^+ \oplus V_L^-$  である.  $V_L^+$  の小さい次数の空間の次元は  $\dim(V_L^+)_0 = 1, \dim(V_L^+)_1 = |L_2|/2$  となっていることがわかる.  $V_L^+$  の既約加群は

$$\begin{aligned} [\mu] &= V_{\mu+L} \text{ for } \mu \in L^\circ \setminus (L/2), \\ [\lambda]^\pm &= V_{\lambda+L}^\pm \text{ for } \lambda \in L^\circ \cap L/2, \\ [\chi]^\pm &= V_L^{T_\chi, \pm}. \end{aligned}$$

が知られていた。ただし、 $\chi$  は  $\hat{L}$  をある正規部分群で割った群の中心指標である。

Dong と永友氏 ([DN2]) によって階数 1 の場合、安部氏と Dong ([AD]) によって一般の階数の場合に  $V_L^+$  の既約加群は  $\{[\mu], [\lambda]^\pm, [\chi]^\pm\}$  のいずれかと同型となることが示された。特に  $V_L^+$  の既約加群は有限個である。

また、 $V_L^+$  のフュージョン規則は安部氏 ([Ab]) によって階数 1 の場合が、安部氏, Dong Li ([ADL]) によって一般の階数の場合に完全に決定された。

### 3 主結果

この章では主結果である  $\text{Aut}(V_L^+)$  を決定するアルゴリズムについて述べる。

#### 3.1 自己同型群の決定の方針

この節では大まかな  $V_L^+$  の自己同型群の計算の方針について述べる。まず、一般の VOA に関して次のようなことが成り立つ。

観察  $V$  を VOA,  $M$  を  $V$ -加群とする。  $P$  を  $M$  の  $\text{Aut}(V)$  の作用による軌道とする。このとき、自然な写像

$$\text{Aut}(V) \rightarrow \mathfrak{S}(P) \quad (3.1)$$

が定まる。ただし  $\mathfrak{S}(P)$  は  $P$  上の置換群とする。

方針 逆に  $P$  やこの写像の核について調べることで  $\text{Aut}(V)$  を知ることが出来るのではなからうか?

この方針に従って  $\text{Aut}(V)$  を計算するためには良い加群  $M$  を選ぶ必要がある。また  $V$  自身の性質についても良く知られていなければ軌道  $P$  や核を計算するのも困難となる。

そこで  $V = V_L^+$ ,  $M = V_L^-$  の場合について考える。実際に  $\text{Aut}(V_L^+)$  のいくつかの元、 $V_L^+$  の既約加群の分類とフュージョン規則を用いて軌道と核について調べる。特に  $L$  がルートを持たない場合には、核が  $\text{Aut}(\hat{L})/\langle\theta\rangle$  の部分群になることを 3.2 節で示し、軌道の決定を 3.3 節で行い、(3.1) の像に関する考察を 3.4 節で行う。したがって、原理的には  $\text{Aut}(V_L^+)$  の構造を計算することが出来る。

**注意 3.1.** もし  $L_2 \neq \phi$  であれば  $\text{Aut}(V_L^+)$  は無限群となる。なぜならば  $(V_L^+)_1 \neq 0$  であり、よって  $\langle \exp(a_0) \mid a \in (V_L^+)_1 \rangle \subset \text{Aut}(V_L^+)$  が無限群を成すならである。ゆえに、本稿ではルートを持たない格子を主に考えている。

### 3.2 $\text{Aut}(V_L^+)$ の一点固定部分群

この節では  $\text{Aut}(V_L^+)$  の既約加群全体への作用を考えたときの  $V_L^-$  の固定部分群について述べる.

**定理 3.2.**  $L$  を偶格子とし,  $g$  を  $V_L^+$  の自己同型とする.  $\text{Aut}(V_L)$  の元  $\tilde{g}$  で  $\tilde{g}|_{V_L^+} = g$  かつ  $\tilde{g}(V_L^-) = V_L^-$  を満たすものが存在するための必要かつ十分条件は  $V_L^+$ -加群として  $V_L^{-g} \cong V_L^-$  が成り立つことである. さらに, 自己同型  $\tilde{g}$  は  $\langle \theta \rangle$  倍を除いて一意に定まる.

ここでは詳しく述べないが, もっと一般的な有限可換群  $A$  で次数付けられた VOA がある種のフュージョン規則を満たす場合に同様の定理が成り立つ.

よって, 軌道  $P$  は  $V_L^-$  を含んでいるから  $\text{Aut}(V_L^+)$  の  $P$  への作用に関する一点固定部分群は  $\text{Aut}(V_L)$  における  $\theta$  の中心化群を  $\langle \theta \rangle$  で割った群である.  $L$  がルートを持たない場合は, 命題 2.16 から次の命題を得る.

**命題 3.3.** もし  $L_2 = \phi$  であれば  $\text{Aut}(V_L)$  における  $\theta$  の中心化群は  $\text{Aut}(\hat{L})$  である.

注意 2.15 より  $\text{Aut}(\hat{L})$  の構造は分かっている. したがって,  $L_2 = \phi$  であれば  $\text{Aut}(\hat{L})$  の部分群である (3.1) の核を計算することが可能である.

**注意 3.4.**  $L_2 = \phi$  のとき  $|\text{Aut}(V_L^+)| = |P| \cdot |\text{Aut}(\hat{L})/\langle \theta \rangle|$  が成り立つ. よって, 軌道  $P$  を計算することが出来れば  $\text{Aut}(V_L^+)$  の位数がわかる.

### 3.3 $V_L^-$ の軌道と例外型の自己同型

この節では  $L$  がルートを持たない場合に軌道  $P$  を完全に決定する. その際に用いるのは格子の自己同型の持ち上げではない例外型の自己同型である.

まず  $V_L^-$  の軌道  $P$  の決定をするために  $V_L^+$  の既約加群が  $P$  に属するための必要条件を考える. 注意 2.7, 2.9 より次の事が成り立つことがわかる.

- ・  $P$  の元の指標は  $\text{ch}(V_L^-)$  に等しい.
- ・  $\text{Aut}(V_L^+)$  の作用はフュージョン規則を保つ. 例えば,  $V_L^- \times V_L = V_L^+$  であることから,  $M \in P$  に対して  $M \times M = V_L^+$  が成り立つ.

これらのことを用いて次の包含関係を得る.

**命題 3.5.**  $L$  を階数  $n$  でルートを含まない偶格子とする. このとき

$$P \subseteq \begin{cases} \{[0]^-, [\lambda]^\pm\} & \text{if } n \neq 8, 16, \\ \{[0]^-, [\lambda]^\pm, [\chi]^- \} & \text{if } n = 8, \\ \{[0]^-, [\lambda]^\pm, [\chi]^+ \} & \text{if } n = 16, \end{cases}$$

が成り立つ. ただし,  $\lambda$  は  $|(\lambda + L)_2| = 2n$  を満たす  $L^\circ \cap (L/2)$  の元全体を動く.



したがって,  $n = 8, 16$  の場合は例外的に対称性が大きくなる可能性があり, 実際に以下のことがわかる.

**命題 3.6.**  $L$  を階数 8 または 16 でルートを持たない偶格子とする. このとき  $P$  が  $[\chi]^+$  または  $[\chi]^-$  を含むための必要かつ十分条件は  $L$  が  $\sqrt{2}E_8$  または階数 16 の Barnes-Wall 格子  $\Lambda_{16}$  に同型となることである.

**注意 3.7.** 直接計算から  $L$  が  $\sqrt{2}E_8$  または  $\Lambda_{16}$  と同型のときに 命題 3.5 の式において等号が成り立つことが確認できる.

この 2 つの格子は特別であり, 非常に良い対称性を持つことがわかる. それ以外の格子については次が成り立つ.

**定理 3.8.**  $L$  をルートを持たない階数  $n$  の偶格子とする.  $L$  が  $\sqrt{2}E_8$  と  $\Lambda_{16}$  のどちらとも同型でないとする. このとき,  $P = \{[0]^-, [\lambda]^\pm \mid \lambda \in L^\circ \cap L/2, |(\lambda + L)_2| = 2n\}$  が成り立つ.

この定理を証明するために,  $V_L^+$  の例外型の自己同型が存在するための必要かつ十分条件を考え, その作用をみる必要がある.

**補題 3.9.**  $L$  をルートを持たない階数  $n$  の偶格子とする.  $\lambda \in L^\circ \cap L/2$  が  $|(\lambda + L)_2| = 2n$  を満たすならば  $(\lambda + L)_2$  は直交基底  $\{\alpha_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  とそれらの元の  $-1$  倍したベクトルで構成されている. さらに,  $L$  は直交基底  $\{\alpha_i\}$  を基にしたある最小重みが 8 以上の重偶 2 元線形符号に関する Construction B で実現される.

[FLM] の 11 章において  $V_L^+$  の例外型の自己同型  $\sigma$  が具体的に構成されている.

**命題 3.10.** [FLM]  $L$  を直交基底  $\{\alpha_i\}$  を基にした最小重みが 8 以上の重偶 2 元線形符号に関する Construction B で実現されている格子とする. このとき,  $V_L^+$  は例外型の自己同型  $\sigma$  を持ち,  $[0]^{-\sigma} \cong [\alpha_1]^+$  を満たす.

ただし, この例外型の自己同型  $\sigma$  の構成は直交基底  $\{\alpha_i\}$  に依存しているので, いくつも存在することに注意する. 補題 3.9 と命題 3.10 を用いて定理 3.8 を得る.

また, 定理 3.8, 補題 3.9 と命題 3.10 の系として次を得る.

**系 3.11.**  $L$  をルートを持たない偶格子とする.

- (1)  $\text{Aut}(V_L^+)$  は格子の自己同型の持ち上げと Frenkel らによって構成された特別な自己同型によって生成される.
- (2)  $\text{Aut}(V_L^+)$  が格子  $L$  の自己同型群の持ち上げ以外の自己同型を持つための必要かつ十分条件は  $L$  が最小重みが 8 以上の重偶 2 元線形符号に関する Construction B で実現されることである.

### 3.4 軌道の特徴付けと $V_L^+$ の構造

この節では軌道の特徴づけをして、(3.1) の像について考察をする。

$\text{Aut}(V_L^+)$  の構造を調べるためには (3.1) の像を完全に決定する必要がある。そこで  $V_L^-$  の軌道  $P$  の特徴付けを考えることで次のことがわかる。

**命題 3.12.**  $L$  をルートを持たない偶格子として、 $Q = P \cup \{V_L^+\}$  とおく。もし  $L$  が  $\sqrt{2}E_8$  と  $\Lambda_{16}$  のどちらとも同型でないとすれば  $Q$  はフュージョン規則を和として  $\mathbb{F}_2$  上のベクトル空間の構造を持つ。したがって  $F$  を (3.1) の核とすると  $\text{Aut}(V_L^+)/F \subseteq \text{GL}(Q)$  が成り立つ。

全ての偶格子に対して、命題 3.12 の包含関係の等号が成り立つか、成り立たないならどんな部分群になっているか、ということを一元的に調べるのは難しい。その原因の一つに  $\text{Aut}(\hat{L})$  の (3.1) の像を一元的に調べるのが難しいことがある。ただし、個々の格子に対して  $\text{Aut}(\hat{L})$  を考察し、その像を調べることは可能である。

実際、いくつかの格子については、命題 3.12 の式が等号となり、よって (3.1) の像が決定できる。また、3.2 節の議論から (3.1) の核を求めることが出来る。次の章ではこのような格子の例について考察する。

## 4 具体例

この章ではルートを持たない偶格子の典型的な例である ルート格子  $R$  を  $\sqrt{2}$  倍した  $\sqrt{2}R$  と階数 16 の Barnes-Wall 格子  $\Lambda_{16}$  の自己同型群を与える。

定理 3.8 から  $L \cong \sqrt{2}A_n$  ( $n \neq 3$ ),  $\sqrt{2}E_6$ ,  $\sqrt{2}E_7$  のときは  $P = \{V_L^-\}$  であることがわかる。また、命題 3.12 と定理 3.8 から  $L \cong \sqrt{2}A_3$ ,  $\sqrt{2}D_n$  ( $n \geq 5$ ) のときは  $P$  は  $\mathbb{F}_2$  上の 2 次元ベクトル空間の零点以外の集合とみなせることが、 $L \cong \sqrt{2}D_4$  のときは  $P$  は  $\mathbb{F}_2$  上の 3 次元ベクトル空間の零点以外の集合とみなせることがわかる。さらに、命題 3.12 の包含関係が等号になることが直接計算によって示せる。

命題 3.6 より  $L \cong \sqrt{2}E_8$  または  $L \cong \Lambda_{16}$  の場合は例外的に対称性が大きいことがわかる。これらの場合には既約加群全体上にフュージョン規則を和と定義することで  $\mathbb{F}_2$  上の 10 次元ベクトル空間の構造が入ることがわかる。さらに、その上に  $+$  タイプの二次形式  $q$  が自然に定義できて  $P$  は零点を除く  $q$  に関する等方的な元全体の集合となっていることがわかる。

これらのことを用いて計算することで次の表を得る。

$V_L^+$  の自己同型群

$L$	$\text{Aut}(V_L^+)$	$ P $
$\sqrt{2}A_n (n \neq 3)$	$2^n : \mathfrak{S}_{n+1}$	1
$\sqrt{2}A_3$	$(2^2 : \mathfrak{S}_4).GL_2(2)$	3
$\sqrt{2}D_4$	$(2^4 : \mathfrak{S}_4).GL_3(2)$	7
$\sqrt{2}D_n (n \geq 5)$	$(2^{2n-2} : \mathfrak{S}_n).GL_2(2)$	3
$\sqrt{2}E_6$	$2^6 : U_4(2) : 2$	1
$\sqrt{2}E_7$	$2^7 : Sp_6(2)$	1
$\sqrt{2}E_8$	$O_{10}^+(2).2$	527
$\Lambda_{16}$	$2^{16} \cdot O_{10}^+(2)$	527

## 参考文献

- [ATLAS] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, Atlas of finite groups, Oxford, Oxford University Press (1985).
- [Ab] T. Abe, Fusion rules for the charge conjugation orbifold, *J. Algebra*, **242** (2001), 624–655.
- [AD] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra  $V_L^+$ : General case, preprint, math.QA/0210274.
- [ADL] T. Abe, C. Dong and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebras  $M(1)^+$  and  $V_L^+$ , in preparation.
- [Bo] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.*, **83** (1986), 3068–3071.
- [DN1] C. Dong and K. Nagatomo, Automorphism groups and Twisted modules for lattice Vertex operator algebras, *Comtemp. Math.* **248** (1999), 117–133
- [DN2] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of vertex operator algebra  $V_L^+$  for rank one lattice  $L$ , *Comm. Math. Phys.* **202** (1999), 169–195.
- [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, (1989).
- [Sh] H. Shimakura, Automorphism group of the vertex operator algebra  $V_L^+$  for an even lattice  $L$  without roots, preprint.