

## オプション価格評価のための高性能計算技術 — 高速多重極展開法と二重指数型数値積分公式の適用 —

名古屋大学大学院 計算理工学専攻 山本有作

Yusaku Yamamoto, Department of Computational Science & Engineering, Nagoya University

### 1 はじめに

オプションとは、将来のある時点で、特定の価格である資産を売買する権利のことである。資産としては、たとえば株式、債券、外貨などが考えられる。オプションの例としては、たとえば1年後にある株式を1000円で売却する権利（**プットオプション**）、3ヵ月後に1ドルを110円で購入する権利（**コールオプション**）などが挙げられる。オプションには、権利行使が満期時点（上の例では1年後あるいは3ヶ月後）でのみ可能な**ヨーロピアンオプション**と、満期までの任意の時点で可能な**アメリカンオプション**がある。また、アメリカンオプションの変種として、満期以前の予め定められた複数の時点においてのみ権利行使が可能な**バミューダンオプション**も市場で活発に取引されている。

いま、時刻  $t$  における資産価格を  $S_t$ 、満期の時刻を  $T$ 、オプションにより資産を購入或いは売却できる価格（**行使価格**と呼ぶ）を  $K$  とする。このとき、時刻  $0$  においてある人  $A$  が別の人  $B$  からヨーロピアン型のコールオプションを購入したとすると、満期時点で  $S_T > K$  なら  $A$  は権利を行使して  $B$  から資産を購入し、それをすぐに市場価格  $S_t$  で売却することにより、差額の利益  $S_T - K$  を得ることができる。一方、 $S_T \leq K$  であっても、 $A$  は何もしないことにより、損はせずに済む。したがって、時刻  $t$ 、資産価格  $S_t$  において権利行使を行ったときの  $A$  の利益（オプションの**ペイオフ**と呼ぶ）を  $h_t(S_t)$  と書くと、

$$h_T(S_T) = \max(S_T - K, 0) \tag{1}$$

となり、これは常に非負である。一方、 $B$  の利益は常に非正である。したがってオプションの取引が成り立つためには、最初の時点で  $A$  が  $B$  にオプションの代価を支払う必要がある。この代価としていくら払うのが適当かを決めるのが**オプション価格評価**の問題であり、金融工学における基本的な問題の一つである。

オプション価格評価を行うには、資産価格の変動をモデル化する必要がある。もっとも簡単なモデルとして、資産価格  $S_t$  が幾何的ブラウン運動に従う場合、すなわち

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{2}$$

の場合が**ブラック＝ショールズモデル**と呼ばれ、金融工学で広く利用されている。ここで、 $W_t$  はウィーナー過程、 $\mu$  は資産の**期待収益率**（定数）、 $\sigma$  は**ボラティリティ**と呼ばれる資産価格の変動の大きさを表す定数である。このモデルの下での（時刻  $0$  での）ヨーロピアンオプションの価格は、オプションのペイオフの期待値として

$$Q_0(S_0) = e^{-rT} E_0[h_T(S_T)] \tag{3}$$

と決めるのが合理的であることが Black & Scholes [5] により示されている。ここで、 $r$  は銀行預金などの**無危険資産の利子率**（定数）で、 $e^{-rT}$  はオプションから得られる利益が時刻  $T$  でのものであるのに対してオプションの代価を支払うのが時刻  $0$  であることを補正するための**割引率**である。また、 $E_0$  は**リスク中立確率**の下での時刻  $0$  における期待値演算子であり、これは資産価格が別の幾何的ブラウン運動

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{4}$$

に従うとしたときの期待値演算子として定義される。(3) 式によりオプション価格を評価することの正当性については、[9][15]なども参照されたい。

ヨーロッパオプションの価格は、(3)式に(1)式を代入して計算することにより解析的に求めることができ、**ブラック＝ショールズの公式**として知られている。しかし、アメリカンオプションやバミューダンオプションについては、そのような公式が存在しない。そのため、価格は数値計算により求めざるを得ず、高速・高精度な価格評価法を目指して活発に研究が行われている。

本報告では、バミューダンオプションを例に取り、**高速多重極展開法** [11][4]、**二重指数型数値積分公式** [16]のような数値計算技術を利用することで、従来法よりも格段に高速・高精度な価格評価法が構成できることを示す [7][8]。また、この手法が**バリアオプション**、**ルックバックオプション**などのいわゆる**エキゾチックオプション**に対しても適用可能であることを述べる [8]。

## 2 従来の価格評価方法

### 2.1 動的計画法に基づく価格評価法

まず、アメリカンオプションの価格評価問題について考える。時刻  $t$ 、資産価格  $S_t$  で権利を行使したときのアメリカンオプションのペイオフを  $h_t(S_t)$  (たとえばアメリカンコールオプションなら  $h_t(S_t) = \max(S_t - K, 0)$ ) とすると、このオプションの時刻 0 における価格は、

$$Q_0(S_0) = \sup_{\tau} \{e^{-r\tau} E_0[h_{\tau}(S_{\tau})]\} \quad (5)$$

と書けることが知られている [9]。ここで、 $E_0$  はヨーロッパオプションの場合と同様にリスク中立確率の下での時刻 0 における期待値演算子であり、 $\tau$  は**マルコフ停止時刻**である。停止時刻はアメリカンオプションの**行使戦略** (各時刻において株価がどの範囲にきたとき権利を行使するかという戦略) に対応し、上式は最適行使戦略の下でのペイオフの期待値を割引いたものが時刻 0 でのオプション価値であることを示す。

権利行使が離散的な時点のみに制限されているバミューダンオプションの場合には、最適行使戦略の決定に動的計画法を用いることができ、(5)式は満期時刻  $T$  でのオプション価値から始めて、時刻を遡っていくことにより計算できる。具体的には、まず満期  $T$  におけるオプションの価値はペイオフそのものであるから、

$$Q_T(S_T) = h_T(S_T) \quad (6)$$

次に、ある権利行使可能な時刻  $t_{n+1}$  において  $Q_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}})$  が (すべての  $S_{t_{n+1}}$  の値に対して) わかっている場合に、1つ前の権利行使可能時刻  $t_n$  における  $Q_{t_n}(S_{t_n})$  を求めることを考える。時刻  $t_n$  においては、その時点で権利を行使するかしないかの2つの選択肢があり、

- 権利を行使した場合の利益 (**行使価値**) は  $h_{t_n}(S_{t_n})$
- 権利を行使せずに時刻  $t_{n+1}$  までオプションを保持する場合の価値 (**持続価値**) は  $e^{-r(t_{n+1}-t_n)} E_{t_n}[Q_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}})]$

となる [3]。オプションの保持者は、時刻  $t_n$  においてこの2つの価値を比べ、行使価値のほうが大きければ権利を行使し、持続価値のほうが大きければ権利を保持する。したがって、時刻  $t_n$ 、資産価格  $S_{t_n}$  におけるオプションの価値は、行使価値と持続価値のうち大きい方、すなわち

$$Q_{t_n}(S_{t_n}) = \max\{h_{t_n}(S_{t_n}), e^{-r(t_{n+1}-t_n)} E_{t_n}[Q_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}})]\} \quad (7)$$

となると考えられる (より精密な議論については [9]などを参照)。(7)式を使えば、時刻  $t_n$  での任意の資産価格  $S_{t_n}$  の値に対し、オプション価値  $Q_{t_n}(S_{t_n})$  を計算することが可能となる。また、これを時刻  $t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots$  に対して順々に行っていくことにより、最終的に時刻 0 におけるオプション価格  $Q_0(S_0)$  を計算することができる。なお、(7)に基づく数値計算では、各  $S_{t_n}$  の値に対する  $Q_{t_n}(S_{t_n})$  を計算する毎に期待値  $E_{t_n}[Q_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}})]$  を評価することが必要となり、これをどのように計算するかがポイントとなる。

## 2.2 多分木法

以上のような動的計画法に基づくバリュエーションの価格評価法として、多分木法 [1] と確率的メッシュ法 [6] とが挙げられる。

多分木法では、 $(t, W)$  平面に規則的な格子を取り、ウィーナー過程  $W_t$  を格子上的確率過程で近似する。いま、時刻  $t = i\Delta t$  において  $W = j\Delta W$  であるとき、時刻  $t = (i+1)\Delta t$  において  $W$  は集合  $\{(j-b)\Delta W, (j-b+1)\Delta W, \dots, (j+b)\Delta W\}$  のどれかの値をそれぞれ確率  $p_{-b}, p_{-b+1}, \dots, p_b$  で取るとする。 $b=2$  の場合 (5分木法) における格子の例を図 1 に示す。

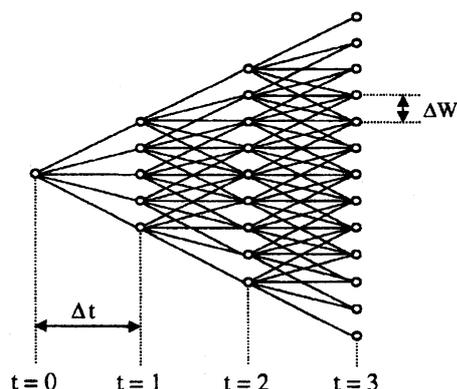


図 1: 5分木法 ( $b=2$ ) における格子

このとき、格子点  $(i, j)$  における期待値は、 $t = (i+1)\Delta t$  における  $2b+1$  個の格子点  $t$  での値を用いて

$$E[Q_{t_{i+1}} | S_{i,j}] = \sum_{k=-b}^b p_k Q_{i+1, j+k} \quad (8)$$

と計算できる [1]。確率  $p_k$  を決めるに当たっては、格子上的確率過程とウィーナー過程の  $2b$  次までのモーメントが等しくなるという条件を課し、この条件より、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 2 \cdot \Delta W^2 & 2 \cdot (2\Delta W)^2 & \dots & 2 \cdot (b\Delta W)^2 \\ 0 & 2 \cdot \Delta W^4 & 2 \cdot (2\Delta W)^4 & \dots & 2 \cdot (b\Delta W)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 \cdot \Delta W^{2b} & 2 \cdot (2\Delta W)^{2b} & \dots & 2 \cdot (b\Delta W)^{2b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta t \\ 3\Delta t^2 \\ \vdots \\ \frac{(2b)!}{2^b b!} (\Delta t)^b \end{pmatrix} \quad (9)$$

および

$$p_{-k} = p_k \quad (10)$$

を満たすように決める。

多分木法では、時間ステップ数  $M$  を増やすとともにパラメータ  $b$  を大きくすることで精度が向上する。実際、オプションのペイオフが十分な回数だけ連続微分可能であると仮定すれば、多分木法により計算したオプションの価格は収束率  $O(M^{-(b+1)})$  で真の価格に収束することが示されている [13]。しかし、図より明らかのように、各時間ステップにおける格子点数の平均は  $O(M)$  であり、各時間ステップでの期待値計算に必要な計算量は  $O(Mb)$  となる。そのため多分木法では、 $M$  と  $b$  を増やして高精度な解を求めようとすると計算量が大きくなりすぎるという問題点があった。

### 2.3 確率的メッシュ法

一方、確率的メッシュ法では、 $(t, W_t)$  平面内にウィーナー過程の  $N$  本のサンプルパスを生成し、時刻  $t_n$  における  $i$  番目のサンプルパス上の点  $S_{t_n, i}$  における期待値を、時刻  $t_{n+1}$  における全サンプルパス上のオプション価値の重み付き平均として

$$E[Q_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}})|S_{t_n, i}] = \sum_{j=1}^N Q_{t_{n+1}, j} w_{t_n, ij} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11)$$

と計算する [6]。ここで重み  $w_{t_n, ij}$  は、 $S_{t_n}$  が与えられたときの  $S_{t_{n+1}}$  の条件付き確率分布を  $f_{t_n}^S(S_{t_{n+1}}|S_{t_n})$  とするとき、

$$w_{t_n, ij} = \frac{f_{t_n}^S(S_{t_{n+1}, j}|S_{t_n, i})}{\sum_{i'=1}^b f_{t_n}^S(S_{t_{n+1}, j}|S_{t_n, i'})}. \quad (12)$$

と定める [6]。

確率的メッシュ法でも、サンプルパスの数  $N$  を増やすことで精度が向上する。しかし、各時間ステップでの計算量は、(11) 式から明らかなように  $O(N^2)$  となる。そのため確率的メッシュ法でも、高精度な解を得るには大きな計算量が必要であるという問題点があった。

## 3 高速多重極展開法による加速

本節では、以上で説明した多分木法および確率的メッシュ法を、高速多重極展開法の一つである高速ガウス変換を用いて加速する方法について説明する。

### 3.1 $b$ が大きい場合の多分木法

従来の多分木法では、計算量を抑えるため、枝の数を決めるパラメータ  $b$  は 1 ~ 3 程度とするのが普通であった。しかし、ここでは高精度の解法を考えるため、 $b$  が極めて大きい (たとえば  $b > 1000$ ) 場合を考える。このとき、 $\Delta W$  を 0 に近づけつつ  $b$  を大きくすると、(9)、(10) 式で与えられる  $p_k$  はガウス型関数  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp(-\frac{k\Delta W^2}{2\Delta t})$  に漸近することが示せる [7]。したがって、(8) 式は

$$E[Q_{t_{i+1}}|S_{i, j}] = \frac{\Delta W}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \sum_{k=-b}^b Q_{i+1, j+k} \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta t}(W_j - W_{j+k})^2\right\}. \quad (13)$$

となる。(13) 式は  $O(M)$  個の  $j$  に対して計算する必要があるため、各時刻での計算量は  $O(Mb)$  であるが、もしこれをより少ないオーダーの計算量で計算することができれば、精度と計算量の両面で優れた価格評価法が構築できることになる。

### 3.2 高速ガウス変換の適用

この目的のためには、Greengard & Strain によって提案された高速ガウス変換 [11][4] が利用できる。高速ガウス変換とは、ガウス型関数に関する離散畳み込み積

$$G(x_i) = \sum_{j=1}^N q_j \exp\left\{\frac{(x_i - y_j)^2}{\delta}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N') \quad (14)$$

を計算するための高速多重極展開法の一つであり、直接計算では  $O(NN')$  の計算量が必要なこの計算を  $O(N + N')$  で実行することができる。

以下、高速ガウス変換の原理について簡単に述べる。まず、ある  $x_0, y_0$  が存在してすべての  $i, j$  に対して  $|x_i - x_0| < \delta^{1/2}$ ,  $|y_j - y_0| < \delta^{1/2}$  が成り立つと仮定すると、(14) 式のガウス型関数は次のように展開できる [11]。

$$e^{-(x_i - y_j)^2 / \delta} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\beta!} \frac{1}{\alpha!} \left( \frac{y_j - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\alpha} h_{\alpha+\beta} \left( \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{\delta}} \right) \left( \frac{x_i - x_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\beta} \quad (15)$$

ここで、 $h_{\alpha}(x)$  は次の式で定義されるエルミート関数である。

$$h_{\alpha}(x) = (-1)^{\alpha} \left( \frac{d}{dx} \right)^{\alpha} e^{-x^2} \quad (16)$$

式 (15) は、上記のエルミート関数の定義式と、ガウス型関数の展開式

$$e^{-(x-y)^2} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{y^{\alpha}}{\alpha!} h_{\alpha}(x) \quad (17)$$

とを使って容易に証明できる。また、(15) 式の展開は極めて収束が速く、倍精度計算では  $\alpha = \beta = 8$  程度まで取れば十分なことが知られている。

式 (15) を  $\alpha = \beta = \alpha_{\max}$  で打ち切り、式 (14) に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} G(x_i) &\cong \sum_{j=1}^N q_j \sum_{\beta=0}^{\alpha_{\max}} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}} \frac{1}{\beta!} \frac{1}{\alpha!} \left( \frac{y_j - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\alpha} h_{\alpha+\beta} \left( \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{\delta}} \right) \left( \frac{x_i - x_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\beta} \\ &= \sum_{\beta=0}^{\alpha_{\max}} \frac{1}{\beta!} \left( \frac{x_i - x_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\beta} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}} h_{\alpha+\beta} \left( \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{\delta}} \right) \left\{ \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=1}^N q_j \left( \frac{y_j - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\alpha} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

この式より、 $G(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N'$ ) は次の 3 ステップで計算できることがわかる。

1.  $A_{\alpha} \equiv \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=1}^N q_j \left( \frac{y_j - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\alpha}$  ( $\alpha = 0, \dots, \alpha_{\max}$ ) を計算
2.  $B_{\beta} \equiv \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{\max}} A_{\alpha} h_{\alpha+\beta} \left( \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{\delta}} \right)$  ( $\beta = 0, \dots, \alpha_{\max}$ ) を計算
3.  $G(x_i) = \sum_{\beta=0}^{\alpha_{\max}} B_{\beta} \frac{1}{\beta!} \left( \frac{x_i - x_0}{\sqrt{\delta}} \right)^{\beta}$  ( $i = 1, \dots, N'$ ) を計算

$\alpha_{\max}$  を固定したとき、ステップ 1、ステップ 3 はそれぞれ  $O(N)$ ,  $O(N')$  の計算量で計算できる。また、ステップ 2 は  $N$  にも  $N'$  にも依存しない定数の計算量で計算できる。したがってこの場合には、離散畳み込み積 (14) が  $O(N + N')$  で計算できることがわかる。

一般の場合には、 $|x_i - x_0| < \delta^{1/2}$ ,  $|y_j - y_0| < \delta^{1/2}$  が任意の  $i, j$  について成り立つような  $x_0, y_0$  は存在しないが、この場合にも図 2 に示すように  $x, y$  の空間をそれぞれ長さ  $\delta^{1/2}$  の区間に区切り、各区間のペアに対して上記の 3 ステップアルゴリズムを適用すれば、全体の計算量は  $O(N + N')$  で済むことがわかっている [11]。

以上では高速ガウス変換の基本的な考え方のみを説明したが、実際のアルゴリズムでは、計算を更に高速化するための様々な工夫が組み込まれている。これらについての説明や、誤差解析、多次元への拡張などについては [11][4] を参照されたい。

この高速ガウス変換を多分木法における式 (13) 式の計算に適用することにより、計算量を  $O(Mb)$  から  $O(M + b)$  へと大きく削減でき、高精度かつ高速な新しい価格評価法が構築できる。

### 3.3 他の資産価格モデルへの拡張

この価格評価法は、ブラック＝ショールズモデル以外の資産価格モデルにも拡張できる。たとえば、ブラック＝ショールズモデルに資産価格のジャンプを取り入れたモデルとして、マートンモデル [15] がある。

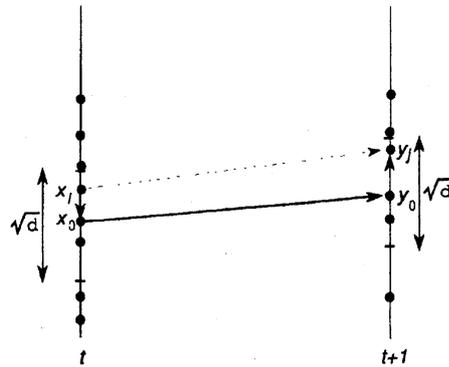


図 2: 幅  $\delta^{1/2}$  の区間への分割

マーティンモデルでは、(積分形式で書いた場合) 資産価格  $S_t$  が次の式に従って発展すると仮定する。

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z_0 + \sum_{i=1}^{N_t^P(\Delta t)} (\delta z_i - \kappa) \right\} \quad (19)$$

ここで、 $N_t^P(\Delta t)$  は時刻  $t$  と  $t + \Delta t$  の間に生じるジャンプの数であり、強度  $\lambda$  のポアソン過程に従うと仮定する。また、 $z_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) はそれぞれ正規分布  $N(0, 1)$  に従う独立な確率変数であり、 $\kappa$  と  $\delta$  は 1 回のジャンプの平均値と標準偏差を決める定数である。式 (19) の  $\{ \}$  内の最初の 2 項はブラック=ショールズモデル (4) を積分形式で書いたときに出てくる項であり、 $\sum_{i=1}^{N_t^P(\Delta t)} (\delta z_i - \kappa)$  が新たに付け加わったジャンプの効果を示す項である。

このモデルに対しては、多分木法を拡張した *Amin* のアルゴリズム [2] が適用可能であり、その場合、(8) 式に対応する期待値の計算式における  $p_k$  は複数のガウス分布の重み付き和で近似できる。したがって、この場合にも高速ガウス変換を拡張した方法によって計算の高速化が可能である。詳細については [7] を参照されたい。

他の重要な資産価格モデルとしては、ジャンプが指数分布に従うと仮定する *Kou* のモデル [14]、ボラティリティ  $\sigma$  が定数でなく、それ自体確率過程に従うと仮定する *Heston* のモデル [12]、ボラティリティの確率的変動とジャンプの両方の効果を取り入れた *アフィンジャンプ拡散モデル* [10] などがある。これらに対しては高速ガウス変換は直接には適用できないが、高速多重極展開法の考え方にに基づき、新しい高速アルゴリズムの開発が試みられている [7]。

### 3.4 確率的メッシュ法への適用

以上では多分木法に対する高速ガウス変換の応用を説明したが、高速ガウス変換は 2 節で紹介したもう一つの価格評価法である確率的メッシュ法に対しても適用できる。

確率的メッシュ法では、期待値計算における重み  $w_{t_n, ij}$  は (12) 式で定義されるが、これは適当な変数変換を行って  $S_{t_n, i}$  を新しい変数  $y_{t_n, i}$  で置き換えることにより、

$$w_{t_n, ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta t} (y_{t_{n+1}, j} - y_{t_n, i})^2 \right\} c_j \quad (20)$$

というガウス型関数の形に書けることが示せる。ここで、 $c_j$  は  $j$  のみに依存する定数である [7]。このように変形すると (11) 式はガウス型関数に関する離散量み込み積になるので、高速ガウス変換が適用できる。

## 4 二重指数型数値積分公式の利用

(7) 式の期待値  $E[Q_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}})]$  の計算において、多分木法では標本点を等間隔に選び、確率的メッシュ法ではランダムに選んで計算を行っていた。このように標本点を選んだ理由として、多分木法ではウィーナー過程  $W_t$  を格子上での確率過程で近似するという考え方、確率的メッシュ法ではウィーナー過程の期待値を有限個のサンプルパスからの平均値で近似するという考え方が背景にあった。しかし、確率過程を近似するという考え方から離れ、単に期待値  $E[Q_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}})]$  を数値積分により計算するという立場に立てば、より良い標本点の選び方が考えられるはずである。

そのような方法の一つとして、標本点を二重指数関数型数値積分公式 [16] の標本点に選ぶことが考えられる [8]。これにより、等間隔に選んだ場合（台形公式に相当）あるいはランダムに選んだ場合（モンテカルロ法に相当）に比べ、標本点の数を増やしたときの収束性は大きく向上すると考えられる。

ただし、(7) 式を  $t_{n+1}$  について書いてみればわかるように、被積分関数  $Q_{t+1}(S_{t+1})$  は max 関数により定義されているので、一般には 1 階微分が不連続である。そのため、単純に二重指数型数値積分公式を適用したのでは、良い結果が得られない。そこで、まずニュートン法などにより

$$h_{t_{n+1}}(S_{t_{n+1}}) = E_{t_{n+1}}[Q_{t_{n+2}}(S_{t_{n+2}})] \quad (21)$$

が成り立つ点を求めて積分区間を 2 個の区間に分割し（コールオプションの場合には 1 階微分の不連続点は高々 1 個であることがわかっている）、各区間に対して二重指数型数値積分公式を適用する [8]。これにより、標本点  $N$  の増加に対して期待値計算の誤差は指数関数的に減少することが期待できる。時刻  $t_n$  での  $N$  個の点に対する期待値計算にそれぞれ  $O(N)$  の計算量が必要なため、この方法による各時刻での計算量は  $O(N^2)$  であるが、前節で述べた高速ガウス変換を組み合わせることにより、計算量のオーダーを  $O(N)$  に削減できる。したがって、各時点での計算量が  $O(N)$  であり、かつ誤差が  $N$  につれて指数関数的に減少する極めて高速・高精度な価格評価法を実現できることになる。

## 5 数値実験

### 5.1 多分木法に基づく方法

以上で提案した解法について、数値実験による評価を行った。プログラムは C 言語で記述し、計算は Pentium II (266MHz) の PC を使い、Red-Hat Linux 上で GNU C++ コンパイラを用いて行った。

**ブラック＝ショールズモデルの下でのバミューダンオプション** まず、多分木法に基づく各種の方法を用いてブラック＝ショールズモデルの下でのバミューダンオプションの価格を計算し、計算時間と精度の比較を行った。比較対象の方法は、(1) 二分木法（各格子点から出る枝の本数が 2 本の多分木法であり、実務でよく使われる）、(2) 高速ガウス変換を用いて加速した多分木法（3.2 参照）、(3) 二重指数型数値積分公式と高速ガウス変換を組み合わせた方法（4 節参照）の 3 つである。

計算対象のオプションは初期資産価格  $S_0 = 100$ 、満期  $T = 0.5$ （年）、利子率  $r = 0.05$ （/年）、ボラティリティ  $\sigma = 0.2$ （/年）、配当率  $q = 0.07$ （/年）、権利行使可能時点数が  $n = 10$  のバミューダンコールオプションであり、行使価格  $K$  は 90 から 110 まで 5 刻みに変えて価格計算を行った。これらのオプションに対する参照価格  $Q_0$  を表 1 に示す。これは  $b = 409,600$  という極めて大きな分岐数を持つ多分木法により計算した価格であり、少なくとも小数点以下 6 桁は正しいと考えられる [7]。

表 1 ブラック＝ショールズモデルの下でのバミューダンオプションの価格

$K$	90	95	100	105	110
$Q_0$	10.73001013	7.32288562	4.75727741	2.94105489	1.73255637

各解法を用いて格子点（あるいは標本点）数を変えながらこれらのオプションの価格を計算し、計算時間と誤差との関係をプロットした結果を図3に示す[8]。ただし、(1), (2), (3)の方法をそれぞれ binomial, multinomial-FGT, DE-FGT として表示してある。また、誤差としては計算価格と上記の参照価格との誤差の2乗を5種のオプションについて合計し、その平方根を取った値を用いた。

図より、(2)の解法は(1)に比べて誤差の減少が速く、(3)は更に速くなっていることが観察できる。したがって、高精度なオプション価格が必要な場合、(2), (3)は有効な価格評価法であるということが出来る。

**マートンモデルの下でのバミューダンオプション** 次に、資産価格のジャンプを考慮したマートンモデルの下でのバミューダンオプションの価格を計算し、計算時間と精度の比較を行った。比較対象の方法は、(1) Amin のアルゴリズム [2], (2) 高速ガウス変換を用いて加速した Amin のアルゴリズム (3.3 参照), (3) 二重指数型数値積分公式と高速ガウス変換を組み合わせた方法の3つである。

計算対象のオプションは初期資産価格  $S_0 = 40$ 、満期  $T = 1.0$  (年)、利子率  $r = 0.08$  (/年)、ボラティリティ  $\sigma = \sqrt{0.05}$  (/年)、配当率  $q = 0$  (/年)、権利行使可能時点数が  $n = 10$ 、ジャンプに関するパラメータが  $\lambda = 5.0$  (/年)、 $\delta = \sqrt{0.05}$ 、 $\kappa = -\frac{1}{2}\delta^2$  のバミューダンコールオプションであり、行使価格  $K$  は30から50まで5刻みに変えて価格計算を行った。これらのオプションに対する参照価格  $Q_0$  を表2に示す[8]。

表2 マートンモデルの下でのバミューダンオプションの価格

$K$	30	35	40	45	50
$Q_0$	2.70636133	4.58094453	6.99527475	9.90671277	13.25586096

各解法に対する計算時間と誤差との関係を図4に示す[8]。ただし、(1), (2), (3)の方法をそれぞれ Amin, Amin-FGT, DE-FGT として表示した。誤差の計算法はブラック=ショールズモデルの場合と同じである。

図より、(2)の解法は(1)に比べて最初から計算精度の面で大きく優れていることがわかる。また、漸近的には(3)の解法が(2)に比べて速く、指数関数的な誤差減少が見られることがわかる。

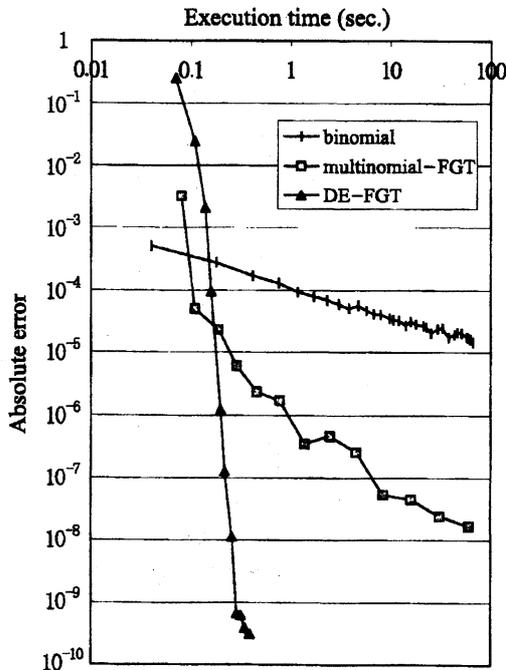


図3: ブラック=ショールズモデルの下でのバミューダンオプションに対する各解法の計算時間と精度

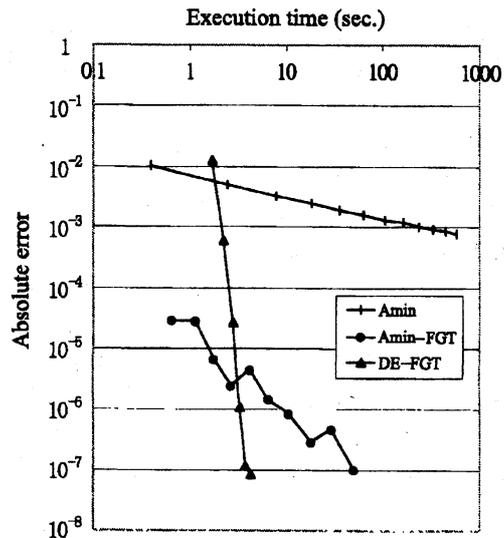


図4: マートンモデルの下でのバミューダンオプションに対する各解法の計算時間と精度

## 5.2 確率的メッシュ法に基づく方法

最後に、高速ガウス変換による確率的メッシュ法を加速した例を示す。計算対象のオプションは、ブラック＝ショールズモデルの下での初期資産価格  $S_0 = 100$ 、満期  $T = 3.0$  (年)、利子率  $r = 0.05$  (/年)、ボラティリティ  $\sigma = 0.20$  (/年)、配当率  $q = 0.10$  (/年)、行使価格  $K = 100$ 、権利行使可能時点数  $n = 2$  のバミューダンコールオプションである。

このオプションの価格を、通常確率的メッシュ法と高速ガウス変換により加速した確率的メッシュ法により計算した場合の計算価格と計算時間を表3に示す。また、計算時間のグラフを図5に示す [7]。ただし、図中で direct は高速ガウス変換なしの場合の計算時間、FGT は高速ガウス変換を用いて加速した場合の計算時間を示す。

表3 バミューダンコールオプションに対する確率的メッシュ法の適用

サンプルパス数	通常確率的メッシュ法		高速ガウス変換による加速	
	価格	計算時間	価格	計算時間
1,000	7.754283	4.04s	7.754283	0.03s
3,000	7.445551	36.37s	7.445551	0.11s
10,000	7.365219	412.34s	7.365219	0.31s
30,000	7.276099	(Timer overflow)	7.276099	0.96s
100,000	—	—	7.202183	3.38s

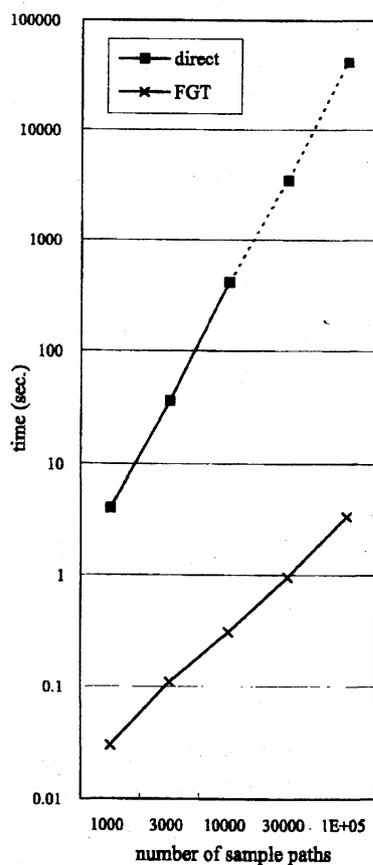


図5: バミューダンコールオプションに対する確率的メッシュ法の計算時間

表より、高速ガウス変換を用いる場合と用いない場合の計算結果は、少なくとも小数点以下6桁まで一致していることがわかる。また、高速ガウス変換は確率的メッシュ法を劇的に高速化しており、たとえばサンプルパス数が10,000の場合は1000倍以上の高速化が得られていることがわかる。また、図5より明らかなように、通常確率的メッシュ法ではサンプルパス数 $N$ を増やした場合に計算時間が $O(N^2)$ で増加するのに対し、高速ガウス変換を使うことでこれを $O(N)$ に抑えることができる。

## 6 他の種類のオプションへの適用

オプションには、これまで紹介したバミューダンオプションの他にも多くの種類があり、さらに現在でも新しい品種の開発が進められている。中でも重要なオプションとして、バリアオプションとルックバックオプションがある。バリアオプションとは、ある閾値 $H$ を持つオプションであり、満期までの間に資産価格 $S_t$ が $H$ を超えた場合には権利が無効になる（あるいは $H$ を超えた場合に初めて権利が有効になる）オプションである。また、ルックバックオプションとは、期間 $[0, T]$ における $S_t$ の最大値（あるいは最小値）を $S_{\max}$  ( $S_{\min}$ ) とするとき、満期 $T$ において資産を価格 $S_{\max}$  で売却できる（あるいは価格 $S_{\min}$  で購入できる）オプションである。これらのオプションに対して、更にヨーロピアン型とアメリカン型の区別、バリア越えの検出（あるいは最大値の観測）を連続時間で行うか、それともある決められた離散的な時点でのみ行うかの区別などがあり、極めて多様なオプションが存在する。

その中でも、離散的な時点でのみ観測を行うバリアオプションおよびルックバックオプションは、価格を精度良く計算することが難しいオプションとして知られていたが、二重指数型数値積分公式と高速ガウス変換を組み合わせた方法では、これらのオプションもバミューダンオプションと同様、極めて高速・高精度に価格計算を行うことができる。詳しくは[8]を参照されたい。

また、近年では金融資産以外の確率的事象に対するオプションも重要になってきており、特に気象変化による事業へのリスクを補償する天候デリバティブの市場が拡大しつつある。高速ガウス変換に基づく計算法は、この天候デリバティブの価格評価にも有効であることが確かめられている[17]。

## 7 今後の課題

本稿ではオプション価格評価への高性能計算技術の適用例として、高速多重極展開法と二重指数型数値積分公式とを用いたバミューダンオプションの新しい価格評価法について述べた。同様の手法は、バリアオプションやルックバックオプションなどのエキゾチックオプションに対しても適用可能であり、また近年注目されている天候デリバティブに対しても有効である。

今後の課題としては、資産価格のジャンプが指数分布に従うと仮定するKouのモデル[14]やボラティリティの確率的変動を取り入れたHestonのモデル[12]、アフィンジャンプ拡散モデル[10]など、より実際的な資産価格モデルへの拡張、および本手法を多数の株式やオプションからなるポートフォリオの最適運用問題へ適用することなどが挙げられる。

## 謝辞

本研究の共同研究者であるコロンビア大学のMark Broadie教授、および本報告を行う機会を与えて下さった東京大学の小柳義夫教授、名古屋大学の杉原正顯教授に感謝いたします。また、共同研究を行う機会を与えてくださった(株)日立製作所中央研究所の皆様に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] J. Alford and N. Webber: Very High Order Lattice Methods for One Factor Models, Jan. 2001.
- [2] K. Amin: Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time, *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, pp. 1833-1863 (1993).
- [3] L. Andersen and M. Broadie: Practical Primal-Dual Simulation Algorithms for Pricing Multidimensional American Options, Working paper, Columbia University, March 2001.
- [4] B. Baxter and G. Roussos: A New Error Estimate of the Fast Gauss Transform, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 24, No. 1, pp. 257-259 (2002).
- [5] F. Black and M. Scholes: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-654 (1973).
- [6] M. Broadie and P. Glasserman: A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options, Working paper, Columbia University, 1997.
- [7] M. Broadie and Y. Yamamoto: Application of the Fast Gauss Transform to option Pricing, *Management Science*, Vol. 49, No. 8, pp. 1071-1088 (2003).
- [8] M. Broadie and Y. Yamamoto: A Double-Exponential Fast Gauss Transform Algorithm for Pricing Discrete Path-Dependent Options, conditionally accepted by *Operations Research*.
- [9] D. Duffie: *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd ed., Princeton University Press, 1996.
- [10] D. Duffie, J. Pan and K. Singleton: Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusions, *Econometrica*, Vol. 68, pp. 1343-1376 (2000).
- [11] L. Greengard and J. Strain: The Fast Gauss Transform, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 12, No. 1, pp. 79-94 (1991).
- [12] S. Heston: A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343 (1993).
- [13] S. Heston and G. Zhou: On the Rate of Convergence of Discrete-Time Contingent Claims, *Mathematical Finance*, Vol. 10, No. 1 pp. 53-75 (2000).
- [14] S. Kou: A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, Vol. 48, No. 8, pp. 1086-1101 (2002).
- [15] R. Merton: *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, 1992.
- [16] H. Takahashi and M. Mori: Double Exponential Formulas for Numerical Integration, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, Vol. 9, pp. 721-741 (1974).
- [17] 山本有作, 恵木正史: 高速ガウス変換を用いた天候デリバティブの価格評価手法, 情報処理学会論文誌 ACS に掲載予定.