

# 二重指数関数型変換に基づく 線形積分方程式の数値解法

Numerical Solution of Linear Integral Equation

Based on the Double Exponential Transformation

東京電機大学理工学部 アヒニヤズ ヌルメメット (Ahniyaz Nurmuhammad)  
 マイヌル メメット (Mayinur Muhammad)  
 森 正武 (Masatake Mori)  
 School of Science and Engineering,  
 Tokyo Denki University

## 1 はじめに

区間  $(a, b)$  内で解析関数 (端点で特異性を持っても構わない) の定積分

$$\int_a^b f(x) dx \tag{1.1}$$

に対して二重指数関数型変換に基づいて提案された数値積分公式が効率の高い計算方法であることが良く知られており [2], その方法が最適であることも理論的に証明されている [3]. また二重指数関数型変換は数値計算および関数近似の幅広い分野で適用されており, 最近二重指数関数型変換が組み込まれた Sinc 近似を用いて不定積分の数値計算に対しても効率の高い数値積分公式が提案された [1]. 本研究では, その不定積分公式を線形積分方程式の数値解に適用することにより, 効率の良い数値解法を得た. ここで, この方法による近似解と真の解との誤差が  $\exp(-cN/\log N)$ ,  $c > 0$  程度であることを理論と実験の両面から示す.

## 2 近似解と収束

### 2.1 近似解

一般的に

$$h(x)u(x) - \lambda \int_a^{b(x)} K(x, \xi)u(\xi) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b$$

を積分方程式と言うが,  $b(x) = x, h(x) = 1$  のとき

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, \xi)u(\xi) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b \tag{2.1}$$

を Volterra 型第二種積分方程式といい,  $b(x) = b, h(x) = 1$  のとき

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)u(\xi) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b \tag{2.2}$$

を Fredholm 型第二種積分方程式と言う。  $u(x)$  は未知関数で、  $K(x, t\xi)$  を積分核という。

積分核が  $K(x, \xi) = K(\xi)$  の場合のみ、積分方程式

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(\xi)u(\xi)d\xi = g(x), \quad a < x < b \quad (2.3)$$

の近似解を求める方法はすでに [4] で提案されたが、そこでは積分核  $K(\xi)$  が

$$\begin{aligned} |K(\phi_1(t))\phi_1'(t)| &\leq C(\exp(-\alpha|t|)), \quad t \in (-\infty, \infty) \\ \xi = \phi_1(t) &= \frac{b-a}{2} \tanh \frac{t}{2} + \frac{b+a}{2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

を満たすとして、  $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha N}}$  としたときの誤差は  $O(\exp(-\sqrt{\pi d \alpha N}))$  であるとしている。本研究では、主に第二種積分方程式の近似解を考える。

### 2.1.1 Volterra 型第二種積分方程式

われわれは Volterra 型第二種積分方程式 (2.1) の近似解を二重指数関数型不定積分公式 [1] を用いて求めることを考える。 [1] では不定積分

$$\int_a^s f(x)dx, \quad a < s < b \quad (2.5)$$

を変換

$$x = \phi(t) = \frac{(b-a)}{2} \tanh \left( \frac{\pi}{2} \sinh t \right) + \frac{(b+a)}{2}, \quad x_j = \phi(jh) \quad (2.6)$$

を用いて被積分関数  $f(\phi(t))\phi'(t)$  が  $D_d = \{t \in \mathbb{C} : |\text{Im}t| < d, d > 0\}$  で解析的かつ

$$|f(\phi(t))\phi'(t)| \leq C(\exp(-\alpha \exp |t|)), \quad |t| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

を満たすとして、  $h = \frac{1}{N} \log(\pi d N / \alpha)$  とすると、その不定積分が次のような公式で計算出来ることが提案されている。

$$\begin{aligned} \int_a^s f(t)dt &= \sum_{j=-N}^N f(\phi(jh))\phi'(jh) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left( \pi \frac{\phi^{-1}(s)}{h} - j\pi \right) \right) \\ &\quad + O \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

ただし、  $\text{Si}(x)$  は次の積分正弦関数である。

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi, \quad \text{Si}(-x) = -\text{Si}(x). \quad (2.9)$$

そこで、Volterra 型第二種積分方程式 (2.1) が有界な解を持つとして、  $\xi$  における不定積分

$$\int_a^x K(x, \xi)u(\xi)d\xi$$

を二重指数関数型不定積分公式 (2.8) によって次のように近似する.

$$\int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi \approx h \sum_{j=-N}^N K(x, \xi_j) \phi'(jh) u_j \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left( \pi \frac{\phi^{-1}(x)}{h} - j\pi \right) \right). \quad (2.10)$$

ここで,  $x = \xi_k = \phi(kh)$  とおいて,  $\{u_j\}_{j=-N}^N$  を collocation 法によって

$$u_k - \lambda h \sum_{j=-N}^N K(\xi_k, \xi_j) \phi'(jh) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi(k-j)) \right) u_j = g(\xi_k), \quad (2.11)$$

$$\xi_k = \phi(kh), \quad k = -N, -N+1, \dots, N-1, N$$

で決めることにする. この  $\{u_j\}_{j=-N}^N$  に関する連立方程式を解いて, 積分方程式 (2.1) の近似解

$$u_N(x) = g(x) + \lambda h \sum_{j=-N}^N K(x, \xi_j) \phi'(jh) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left( \pi \frac{\phi^{-1}(x)}{h} - j\pi \right) \right) u_j \quad (2.12)$$

を得ることができる.

### 2.1.2 近似解の収束

ここで

$$\delta_{kj}^{(-1)} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi(k-j)) \right), \quad A = [K(\xi_k, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)}]$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = (u_{-N}, \dots, u_N)^T, \quad \mathbf{g} = (g(\xi_{-N}), \dots, g(\xi_N))^T$$

として (2.11) を行列で書くと

$$(I - \lambda h A) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}$$

となる. これを解いて得られる近似解  $u_N(x)$  と真の解  $u(x)$  との誤差を評価してみる.

$$\begin{aligned} |u(x) - u_N(x)| &= \left| u(x) - g(x) - \lambda h \sum_{j=-N}^N K(x, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)} u_j \right| \\ &\leq |\lambda| h \sum_{j=-N}^N |K(x, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)}| |(u(\xi_j) - u_j)| \\ &\quad + |\lambda| h \sum_{|j|>N} |K(x, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)} u(\xi_j)| + O(h e^{-\pi d/h}) \end{aligned}$$

となるので, 上式の右辺での第一項と第二項それぞれを

$$E_N = |\lambda| h \sum_{j=-N}^N |K(x, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)}| |(u(\xi_j) - u_j)|,$$

$$E_\infty = |\lambda| h \sum_{|j|>N} |K(x, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)} u(\xi_j)| + O(h e^{-\pi d/h})$$

としておいて,  $E_N$  をさらに評価していくと, Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} E_N &\leq |\lambda|h \left( \sum_{j=-N}^N |K(x, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=-N}^N |u(\xi_j) - u_j|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_0 |\lambda|h \left( \sum_{j=-N}^N |K(x, \xi_j) \phi'(jh)|^2 \right)^{1/2} \| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \| \end{aligned}$$

となる. ただし  $|\delta_{kj}^{(-1)}| \leq C_0$  とし,  $\mathbf{u} = (u(\xi_{-N}), \dots, u(\xi_N))^T$  とした. ここで

$$\| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \| \leq \| (I - \lambda h A)^{-1} \| \| (I - \lambda h A) \mathbf{u} - \mathbf{g} \|$$

であることに注意し, まず  $\{(I - \lambda h A) \mathbf{u} - \mathbf{g}\}$  の第  $k$  成分を  $v_k$  として評価する.

$$\begin{aligned} v_k &= \{(I - \lambda h A) \mathbf{u} - \mathbf{g}\}_k \\ &= u(\xi_k) - \lambda h \sum_{j=-N}^N K(\xi_k, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)} u(\xi_j) - g(\xi_k) \\ &= \lambda h \sum_{|j|>N} K(\xi_k, \xi_j) \phi'(jh) \delta_{kj}^{(-1)} u(\xi_j) + O(h e^{-\pi d/h}) \end{aligned}$$

ここで,

$$|K(x, \phi(t)) \phi'(t)| \leq C (\exp(-\alpha \exp|t|)), \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (2.13)$$

が成り立つと仮定し,  $u(\xi_j)$  が有界であることに注意すると, 刻み幅  $h$  を

$$h = \frac{1}{N} \log(\pi d N / \alpha) \quad (2.14)$$

としたとき

$$|v_k| \leq \frac{|\lambda| C \log N}{N} \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right)$$

である. したがって

$$\left( \sum_{k=-N}^N |v_k|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{|\lambda| C \log N}{\sqrt{N}} \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right)$$

となり,

$$\| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \| \leq \| (I - \lambda h A)^{-1} \| \frac{|\lambda| C \log N}{\sqrt{N}} \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right) \quad (2.15)$$

である.

一方, 充分大きい  $N$  に対して

$$\| (I - \lambda h A) \mathbf{u} \| \geq \left( 1 - |\lambda| C_2 \frac{\log N}{\sqrt{N}} \right) \| \mathbf{u} \| \quad (2.16)$$

であり, したがって

$$\| (I - \lambda h A)^{-1} \| \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N} - |\lambda| C_2 \log N}$$

である。さらに (2.13) より

$$\left( \sum_{j=-N}^N \left| \frac{K(x, t_j)}{\phi'(t_j)} \delta_{kj}^{(-1)} \right|^2 \right)^{1/2} \leq M$$

となるので、結局

$$E_N \leq |\lambda|^2 h C_3 \log N \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right)$$

となり、また

$$E_\infty \leq |\lambda| h C_4 \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right)$$

は明らかである。よって

$$\sup_{x \in (a, b)} |u(x) - u_N(x)| \leq O \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right)$$

である。

### 2.1.3 Volterra 型第一種積分方程式

Volterra 型第一種積分方程式

$$-\lambda \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi = g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.17)$$

において  $K(x, x) \neq 0$  かつ  $g(x)$ ,  $K(x, \xi)$  は  $x$  について微分可能ならば、両辺を  $x$  について微分すると

$$-\lambda K(x, x) u(x) - \lambda \int_a^x \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} u(\xi) d\xi = g'(x)$$

となる。ここで改めて

$$K_1(x, \xi) = \frac{-1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}, \quad g_1(x) = -\frac{g'(x)}{\lambda K(x, x)}$$

とすると次の Volterra 型第二種積分方程式が得られる。

$$u(x) - \int_a^x K_1(x, \xi) u(\xi) d\xi = g_1(x). \quad (2.18)$$

したがって、方程式 (2.18) の近似解は

$$u_N(x) = -\frac{g'(x)}{\lambda K(x, x)} - h \sum_{j=-N}^N \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial}{\partial x} (K(x, \xi_j)) \phi'(jh) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left( \pi \frac{\phi^{-1}(x)}{h} - j\pi \right) \right) u_j$$

として得られる。この方程式での核  $K_1(x, \xi)$  が

$$|K_1(x, \phi(t)) \phi'(t)| \leq C (\exp(-\alpha \exp |t|)), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

を満たすとすれば、 $h = \frac{1}{N} \log(\pi d N / \alpha)$  としたときに近似解  $u_N(x)$  と真の解  $u(x)$  との誤差は同じく

$$\sup_{x \in (a, b)} |u(x) - u_N(x)| \leq O \left( \exp \left( -\frac{\pi d N}{\log(\pi d N / \alpha)} \right) \right)$$

となる。

### 2.1.4 Fredholm 型第二種積分方程式

種積分方程式 (2.2) に対しても二重指数関数型定積分公式を用いて、定積分を

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi \approx h \sum_{j=-N}^N K(x, \xi_j) \phi'(jh) u_j$$

と近似し,  $\{u_j\}_{j=-N}^N$  を

$$u_k - \lambda h \sum_{j=-N}^N K(\xi_k, \xi_j) \phi'(jh) u_j = g(\xi_k), \quad \xi_k = \phi(kh), \quad k = -N, \dots, N$$

にて決めることにすると, 方程式 (2.2) の近似解

$$u_N(x) = g(x) + \lambda h \sum_{j=-N}^N K(x, \xi_j) \phi'(jh) u_j \quad (2.19)$$

が得られる. Volterra 型方程式と同じく積分核が

$$|K(x, \phi(t)) \phi'(t)| \leq C (\exp(-\alpha \exp|t|)), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

を満たすならば, 刻み幅の  $h$  を

$$h = \frac{1}{N} \log(2\pi dN/\alpha) \quad (2.20)$$

としたとき近似解  $u_N(x)$  と真の解  $u(x)$  との誤差は

$$\sup_{x \in (a,b)} |u(x) - u_N(x)| \leq C \left( \exp \left( -\frac{2\pi dN}{\log(2\pi dN/\alpha)} \right) \right) \quad (2.21)$$

である.

## 3 数値例

ここで, いくつかの数値例上げる. 積分核に端点しか特異点がなければ実際の数値計算では  $d = \pi/2$  ととることができる.  $N = 2, 4, \dots$  として,  $(a, b)$  での  $10^3$  個の (等分割) 点での誤差  $\max_{1 \leq i \leq 1000} |u(x_i) - u_N(x_i)|$  を計算した. 計算は 4 倍長で行ったが, 2 倍長で行うと誤差が  $10^{-15}$  程度までのものについては同じ結果が得られる. 積分正弦関数の計算については次の積分表示に変換  $x = \exp(t - \exp t)$  を用いた二重指数関数型定積分公式 [2] を適用し直接に数値積分する方法をとった.

$$\begin{aligned} \text{Si}(x) &= \frac{\pi}{2} - f_1(x) \cos x - f_2(x) \sin x, \\ f_1(x) &= \int_0^\infty \frac{x e^{-\xi}}{\xi^2 + x^2} d\xi, \quad f_2(x) = \int_0^\infty \frac{\xi e^{-\xi}}{\xi^2 + x^2} d\xi \end{aligned}$$

例 1. 次の Volterra 型第二種積分方程式の近似解を計算してみる.

$$u(x) - \int_0^x [10e^{-(x-\xi)} - 6e^{-2(x-\xi)}]u(\xi)d\xi = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

真の解は

$$u(x) = \frac{15e^{4x}}{112} + \frac{4e^{-3x}}{189} - \frac{x^2}{6} - \frac{17}{36}x - \frac{67}{432}$$

である. この例では  $a=0, b=1$  であるため変換関数  $\phi$  を

$$\xi = \phi(t) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) + \frac{1}{2}, \quad \xi = \psi^{-1}(t) = \phi(t) \quad (3.1)$$

とする.  $\alpha = \pi/2, d = \pi/2$  なので,  $h = [\log(\pi N)]/N$  とした. 計算結果は一重指数型変換の場合とあわせて図.1 に示す. 図.1 からわれわれの方法での計算誤差が理論誤差と同じく  $\exp(-cN/\log N)$  の速度で 0 に収束している.

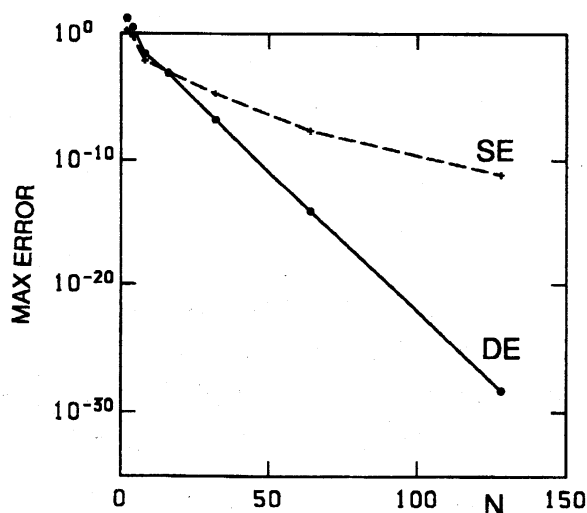


Fig. 1: Max error of Example.1

例 2. Volterra 型第一種積分方程式

$$\int_0^x [2 - (x-\xi) - \frac{1}{2}(x-\xi)^2]u(\xi)d\xi = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

の近似解を計算して見る. ここで  $u(x), g(x)$  は

$$u(x) = \frac{e^{-x}}{68}(-23 \sin 2x + 61 \cos 2x) + \frac{e^x}{12} + \frac{e^{-x/2}}{51}, \quad g(x) = e^{-x} \sin 2x$$

である.  $K(x, x) = 2 \neq 0$  であるから, この方程式を第二種に変えて近似解を求めることができる. 二重指数関数型変換として (3.1) を使う.  $d = \pi/2, \alpha = \pi/2$  なので  $h = [\log(\pi N)]/N$  である. 計算結果を図.2 に示す.

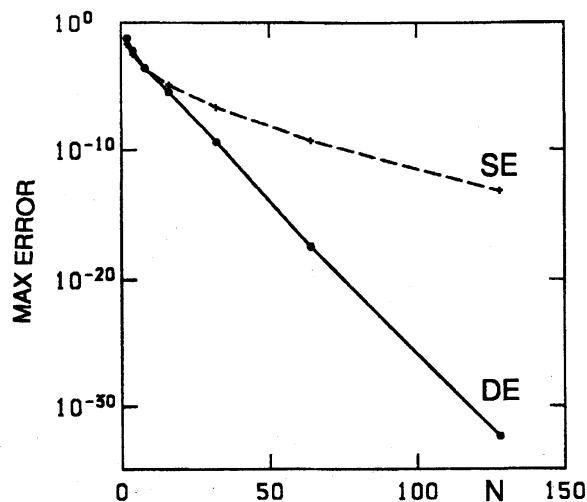


Fig. 2: Max error of Example.2

例 3. 次は [5] からとった例である.

$$u(x) - \int_0^{\pi/2} (x\xi)^{3/2} u(\xi) = g(x), \quad g(x) = x^{1/2} - \frac{\pi^3}{24} x^{3/2}$$

真の解は  $u(x) = x^{1/2}$  である. [5] によれば,  $g(x)$  と  $K(x, \xi)$  は  $x = 0$  に特異性を持つので Standard Galerkin 法と Fast Galerkin 法は収束が遅いと言われている. しかし Table 1 での結果から見れば, 我々の方法は Standard Galerkin 法と Fast Galerkin 法で理想的な収束が得られない特異性をもつ方程式に対しても有効である上, 非常に効率の高い方法であり, 誤差は  $\exp(-cN/\log N)$  と同じ速度で収束していることがわかる.

Table1 : Maxerror of Example.3

| N  | DE                     | Standard              | Fast                  |
|----|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 8  | $4.03 \times 10^{-5}$  | $7.00 \times 10^{-2}$ | $2.40 \times 10^{-2}$ |
| 16 | $1.18 \times 10^{-10}$ | $3.70 \times 10^{-2}$ | $3.70 \times 10^{-3}$ |
| 64 | $1.54 \times 10^{-33}$ | $1.90 \times 10^{-2}$ | $1.30 \times 10^{-3}$ |

以上の数値実験からも見るように, この方法は解析的な積分核を持つ積分方程式だけではなく特異性もつ方程式にも非常に有効であり, 連立線形方程式を一回解くだけで積分方程式の非常に精度の高い近似解が得られる. また常微分方程式の初期値問題にも適用できるという面からも幅広い応用も期待できる. 初期値問題と非線形積分方程式への応用については次の機会に報告する.

## 参考文献

- [1] M. Mayinur, M. Mori, Double exponential formulas for numerical indefinite integration, J. Comput. Appl. Math. 161 (2003) 431-448.



- [2] H. Takahasi, M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS Kyoto Univ. 9 (1974) 721–741.
- [3] M. Sugihara, Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach — , Numer. Math. 75 (1997) 379–395.
- [4] F. Stenger, Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions , Computation Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1993.
- [5] L. M. Delves and J. L. Mohammed, Computational methods for integral equations, Cambridge University Press 1985.