

## 2層液体シートの表面張力不安定の薄膜近似による解析

京大・情報学

佐野 雅之 (Masayuki Sano)

京大・情報学

船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems

Graduate School of Informatics, Kyoto University

### 1 序

液体が薄いシート状になって流れている液体シートはノズルやスリットから流体に初速度を与えて噴き出させるときに生じる。このような液体シートの形としては平面2次元状、中空の円環形などが考えられる。液体シートの安定性の問題は液体スプレーの形成や液体シートによる遮蔽などの観点から重要であり理論的には今までにさまざまな場合が調べられてきた [1]。

1層シートにおいては長波長で2つの不安定モードがある事が知られている [2][3]。一つは界面が同じ方向に変位する対称 (sinuous) モードであり、もう一つは界面が逆方向に変位する反対称 (varicose) モードである。

線形解析の結果として反対称モードの不安定成長率は対称モードの不安定成長率よりも大きいと言う事が知られている。1層平面2次元シートにおいては不安定は界面における Kelvin-Helmholtz 不安定であり真空中では不安定は生じないが、円環形シートにおける不安定は界面における表面張力不安定であって真空中でも生じることが知られている [4][5][6]。

円環形液体シートの崩壊過程の詳細を知るためには非線形の効果を取り入れた時間発展を調べる必要がある。しかし液体シートは移動境界を含む系であるので直接数値計算は計算量が多いという面で困難である。したがって何らかの近似を用いて系をモデル化し、より計算しやすいようなモデル方程式を導く事が有効である。1層円環形シートの研究において薄膜の厚さ方向にナビエ・ストークス方程式を積分した平均化方程式を導く手法 (薄膜近似) が有効であることが知られている。[5, 6] このモデルの基本的考え方は、薄膜では厚さ方向のスケールが流れ方向に対して小さいことから厚さ方向の自由度を近似的に扱うことでより簡単な計算モデルを導出するものである。具体的には速度と圧力について厚さ方向の分布形を仮定し基礎方程式を  $r$  方向について積分し平均化するというものである。[8] 薄膜近似による解析で1層円環形シートの崩壊過程として中空部が閉じて崩壊する場合やシートの厚さが0になって崩壊する場合があることが知られている。

ここでは2層の中空円環形液体シートに注目し、その非線形時間発展を薄膜近似を適用して調べる。2層の液体シートでは対称モード、反対称モードの他にもう一つのモードが現れる。また2層の液体の密度比や初期厚さの比、界面の表面張力係数の比といったパラメータが導入される。特にその時間不安定についての非線形効果を取り入れた数値計算を行ない、その形状の時間発展を調べる。

### 2 薄膜近似モデルの2層液体シートへの適用

図1のように円柱座標系において  $z$  軸の方向に流れる2層の円環形液体シートを考えて内側を第1層、外側を第2層とする。流体は非粘性流体とする。第  $i$  層での圧力と  $r, z$  それぞれの方向の速度成分を  $r, z$  の関数として  $p_i(z, r, t), v_r^{(i)}(z, r, t), v_z^{(i)}(z, r, t), (i = 1, 2)$  とおく。シートで囲まれた部分の圧力と、外部の圧力はそれぞれ  $p_0, p_3$  で定数とする。定常流においては  $v_z^{(i)} = V_i, v_r^{(i)} = 0$

である。また界面を内側から  $r = R_i(z, t)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) とする。定常流において  $R_i = R_{i0}$  とする。 $i$  層での密度を  $\rho_i$ , 界面での表面張力係数を内側から順に  $\sigma_{01}, \sigma_{12}, \sigma_{23}$  とおく。

基礎方程式は連続の式とオイラー方程式である。それらを各層ごとに円環の厚さ方向に平均化するために  $r$  をかけて  $R_1(z, t)$  から  $R_2(z, t)$  又は  $R_2(z, t)$  から  $R_3(z, t)$  まで積分する。

$$\int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^{(i)}) dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial z} r dr = 0 \quad (1)$$

$$\int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial t} r dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_z^{(i)2}}{\partial z} r dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r v_z^{(i)} v_r^{(i)}) dr = - \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial z} r dr \quad (2)$$

$$\int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial t} r dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^{(i)2}) dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial z} (v_z^{(i)} v_r^{(i)}) r dr = - \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial r} r dr \quad (3)$$

境界条件は運動学的境界条件

$$v_r^{(1)}(R_1) = \frac{\partial R_1}{\partial t} + v_z^{(1)} \frac{\partial R_1}{\partial z}, \quad v_r^{(1)}(R_2) = \frac{\partial R_2}{\partial t} + v_z^{(1)} \frac{\partial R_2}{\partial z} \quad (4)$$

$$v_r^{(2)}(R_2) = \frac{\partial R_2}{\partial t} + v_z^{(2)} \frac{\partial R_2}{\partial z}, \quad v_r^{(1)}(R_3) = \frac{\partial R_3}{\partial t} + v_z^{(3)} \frac{\partial R_3}{\partial z} \quad (5)$$

と界面での圧力の差と表面張力の関係を与える力学的境界条件である。

$$p^{(1)}(R_1) = p_0 - \Delta p_1, \quad p^{(2)}(R_2) = p^{(1)}(R_2) - \Delta p_2, \quad p^{(2)}(R_3) = p_3 + \Delta p_3 \quad (6)$$

ここで  $\Delta p_i$  は界面における表面張力による圧力のとびであり、

$$\Delta p_i = \sigma_{i-1,i} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \quad (7)$$

で与えられる。ただし  $\frac{1}{l_1}$  と  $\frac{1}{l_2}$  は界面の曲率で

$$\frac{1}{l_1} = - \frac{\frac{\partial^2 R_i}{\partial z^2}}{\left( 1 + \left( \frac{\partial R_i}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{l_2} = \frac{1}{R_i \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R_i}{\partial z} \right)^2}} \quad (8)$$

である。

実際に平均化された方程式を導くためには厚さ方向の各物理量の関数を決定する必要がある。そのために「シートの厚さがその上に生じる擾乱の波長に比べて小さい」という仮定をおく。このことを物理量に関する仮定として次のように表す。これが薄膜近似の考え方である。

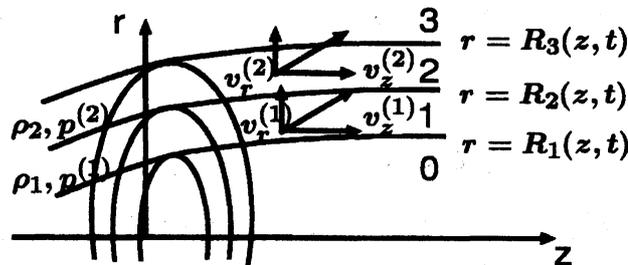


図 1: 2層円環形液体シート

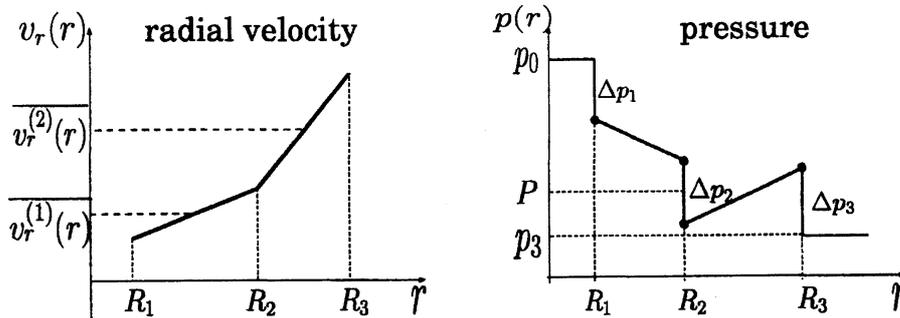


図 2: 速度分布関数  $v_r(r)$  及び圧力分布関数  $p(r)$

- $v_z$  は  $r$  方向 (シートの厚さ方向) に一定である。  $v_z^{(i)}(r, z, t) = v_z^{(i)}(z, t)$
- $v_r^{(i)}, p_i$  の  $r$  方向の分布形は一次関数

$$v_r^{(i)}(r, z, t) = \frac{v_r^{(i)}(R_{i+1}) + v_r^{(i)}(R_i)}{2} + \frac{v_r^{(i)}(R_{i+1}) - v_r^{(i)}(R_i)}{R_{i+1} - R_i} \left( r - \frac{R_{i+1} + R_i}{2} \right)$$

$$p^{(i)}(r, z, t) = \frac{p^{(i)}(R_{i+1}) + p^{(i)}(R_i)}{2} + \frac{p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i)}{R_{i+1} - R_i} \left( r - \frac{R_{i+1} + R_i}{2} \right)$$

これらの方程式は1層の場合と良く似ている。しかし2層では  $r = R_2$  で界面を共有しているために界面の位置座標を表す物理量が一つ減っている。また境界面での表面張力による圧力差から決まる圧力分布を決めるとき、1層の場合にはこの値と薄膜近似の仮定のみで圧力分布の関数形を決める事ができるのに対して、2層の場合には図2に示したように、圧力分布の関数形は境界条件から  $R_i$  での圧力を決めただけでは決定することができず、第1層と第2層での圧力分布の傾きに当たる量を与えなければならない。そのために中心界面の圧力を表す  $P(z, t)$  を導入する。これを中心界面での内側の層での圧力と外側の層での圧力の平均値とみなす。これが新たな物理量として加わることになる。

$$P(z, t) = \frac{1}{2} \left( p^{(1)}(R_2) + p^{(2)}(R_2) \right) \quad (9)$$

$P$  を用いると各界面での圧力は

$$p^{(1)}(R_1) = p_0 - \Delta p_1, \quad p^{(1)}(R_2) = P + \frac{\Delta p_2}{2} \quad (10)$$

$$p^{(2)}(R_2) = P - \frac{\Delta p_2}{2}, \quad p^{(2)}(R_3) = p_3 + \frac{\Delta p_2}{2} \quad (11)$$

となる。基礎方程式を簡単にするために物理量  $f$  ( $f = v_z^{(i)}, v_r^{(i)}, p^{(i)}$ ) に対し厚さ方向に平均化された量  $\bar{f} = \int_{R_i}^{R_{i+1}} f r dr / \int_{R_i}^{R_{i+1}} r dr$  を定義する。すると薄膜近似の仮定の下での平均量は

$$\bar{v}_z^{(i)}(z, t) = v_z^{(i)}(z, t) \quad (12)$$

$$\bar{v}_r^{(i)}(z, t) = \frac{1}{2} (v_r^{(i)}(R_{i+1}) + v_r^{(i)}(R_i)) + \frac{1}{6} \frac{R_{i+1} - R_i}{R_{i+1} + R_i} (v_r^{(i)}(R_{i+1}) - v_r^{(i)}(R_i)) \quad (13)$$

$$\bar{p}^{(i)}(z, t) = \frac{1}{2} (p^{(i)}(R_{i+1}) + p^{(i)}(R_i)) + \frac{1}{6} \frac{R_{i+1} - R_i}{R_{i+1} + R_i} (p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i)) \quad (14)$$

となる。これらの平均量  $\bar{v}_z^{(i)}, \bar{v}_r^{(i)}, \bar{p}^{(i)}$  及び  $\Delta p^{(i)} = p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i)$ ,  $\Delta v_r^{(i)} = v_r^{(i)}(R_{i+1}) - v_r^{(i)}(R_i)$  を用いて基礎方程式を書き直すことにより、 $v_z^{(1)}, v_z^{(2)}, v_r^{(1)}, v_r^{(2)}, \Delta v_r^{(1)}, \Delta v_r^{(2)}, R_1, R_2, R_3$

と界面における各層の圧力  $p^{(2)}(R_3), p^{(2)}(R_2), p^{(1)}(R_2), p^{(1)}(R_1)$  で書かれた 2 層円環シートのモデル方程式が得られる。

この方程式を時間発展方程式の形で書くと以下ようになる。

$$\frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial t} + v_z^{(i)} \frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(R_{i+1}^2 - R_i^2)}{2} p^{(i)} \right) + \frac{1}{\rho_i} \frac{2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)} \left( \frac{\partial R_{i+1}}{\partial z} p^{(i)}(R_{i+1}) - \frac{\partial R_i}{\partial z} p^{(i)}(R_i) \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial t} + v_z^{(i)} \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)} \left( p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i) \right) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial t} &= -v_z^{(1)} \frac{\partial R_1}{\partial z} + \overline{v_r^{(1)}} - \left( \frac{1}{2} + \frac{(R_2 - R_1)}{6(R_2 + R_1)} \right) \Delta v_r^{(1)} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} &= -(v_z^{(1)} + v_z^{(2)}) \frac{\partial R_2}{\partial z} + \frac{1}{2} (\overline{v_r^{(1)}} + \overline{v_r^{(2)}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{(R_2 - R_1)}{6(R_2 + R_1)} \right) \Delta v_r^{(1)} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{(R_3 - R_2)}{6(R_3 + R_2)} \right) \Delta v_r^{(2)} \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} &= -v_z^{(2)} \frac{\partial R_3}{\partial z} + \overline{v_r^{(2)}} + \left( \frac{1}{2} - \frac{(R_3 - R_2)}{6(R_3 + R_2)} \right) \Delta v_r^{(2)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_r^{(2)}} - \overline{v_r^{(1)}} &= (v_z^{(2)} - v_z^{(1)}) \frac{\partial R_2}{\partial z} \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} - \frac{(R_2 - R_1)}{6(R_2 + R_1)} \right) \Delta v_r^{(1)} + \left( \frac{1}{2} + \frac{(R_3 - R_2)}{6(R_3 + R_2)} \right) \Delta v_r^{(2)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Delta v_r^{(1)} = -\frac{\frac{R_2 - R_1}{2} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z} + \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \overline{v_r^{(1)}}}{\frac{1}{2} - \frac{(R_2 - R_1)^2}{(R_2 + R_1)^2}} \quad (19)$$

$$\Delta v_r^{(2)} = -\frac{\frac{R_3 - R_2}{2} \frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial z} + \frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \overline{v_r^{(2)}}}{\frac{1}{2} - \frac{(R_3 - R_2)^2}{(R_3 + R_2)^2}} \quad (20)$$

ここで (18) 式を  $t$  で微分すると、各量の時間微分の間の関係式が得られる。各量の時間微分は  $P$  を含んでいるため、これは  $P$  の時間微分を含まない空間方向に関する 2 階の変数係数常微分方程式を与えることになる。

### 3 2 層液体シートでの固有モードとその不安定成長率

得られた方程式を線形解析することで、2 層液体シートの上に生じる波の固有モードとその成長率を調べることができる。とくに代表的な場合として  $R_{20} = 1.0$ ,  $R_{30} - R_{20} = R_{20} - R_{10} = 0.1$ ,  $\sigma_{01} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 1.0$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1.0$ ,  $\frac{\sigma_{01}}{\sigma_{12}} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{12}} = 1.0$ ,  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1.0$  の場合の線形安定性解析の結果を図 3 に擾乱の波数  $k$  を横軸、成長率を縦軸にとって示した。参考のために、1 層 ( $\sigma_{12} = 0$ ) の場合の安定性解析の結果も併せて示している。最も成長率の大きいのは反対称モードであり、2 番目は対称モードである。これは 1 層の場合と同様である。そしてもうひとつの最も成長率が小さいモード (“内部モード”) が現れる。これは外側と内側の界面が同方向に変位しているのに対し、中心界面が逆方向に大きく変位しているようなモードである。どのようなパラメータ領域でも反対称モードが支配的であった。また、内部モードの成長率は最も小さいことがわかった。図 4 にこれらのモードを模式的に示した。

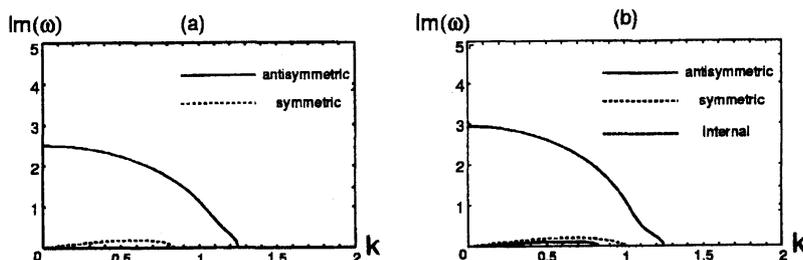


図 3: 時間不安定の線形安定性解析 (a): 1層, (b): 2層

## 4 数値計算の結果

### 4.1 数値計算法

得られた方程式 (15)–(20) を元にして数値計算を行なった。時間方向は刻み幅を  $\Delta t = 10^{-3}$  とし 4 次の Runge-Kutta 法と同様に解いた。空間方向は周期境界条件を仮定し 2 次の中心差分で離散化し、線形安定領域の計算では系の大きさを  $L = 4$  (格子点数  $N = 128$ )、線形不安定領域の計算では系の大きさを  $L = 16$  (格子点数  $N = 512$ ) とした。これらの計算においては各時間での中心界面での圧力の平均値  $P$  は各時間ステップごとに求める必要があるが、これは常微分方程式を離散化して  $N$  行  $N$  列の連立方程式に帰着させて解く。このことは 1 層の場合と異なり 2 層の場合では系の大きさを大きくすると  $P$  を求める計算量が増大してしまうために現実的には系の大きさをあまり大きくはできないということを意味している。

また以下の解析では物理量の基準として  $v_{\text{ref}} = \sqrt{2\sigma_{01}/\rho_1 R_{20}}$ ,  $p_{\text{ref}} = R_{20}/\sigma_{01}$ ,  $t_{\text{ref}} = \sqrt{2\sigma_{01} R_{20}/\rho_1}$  をとり、これを用いてその他の物理量を無次元化している。パラメータとしては 2 層の密度比  $\rho_2/\rho_1$ , 表面張力の比  $\sigma_{12}/\sigma_{01}, \sigma_{23}/\sigma_{12}$ , 各層の初期厚さの比  $(R_{30} - R_{20})/(R_{20} - R_{10})$  がある。

### 4.2 線形安定領域における固有モードの時間発展

反対称モード、対称モード、内部モードのそれぞれについて線形安定領域における各固有モードの形状の時間発展の様子を図 5 に示した。系の大きさは  $L = 4$  ととり格子点の数は  $N = 128$  で離散化している。定常解は  $v_z = 0, v_r = 0, R_{10} = 0.95, R_{20} = 1.0, R_{30} = 1.05$  の場合であり、パラメータの値は線形安定性解析の際の代表的な場合と同じで 2 つの層でのパラメータが一致するようにした。初期値は、系の大きさと同じ波長の線形解として得られる各固有モードを擾乱として加えたものを用いている。擾乱の振幅は定常状態でのシートの厚さの 10% とした。図 5 では横軸に  $z$



図 4: 2層液体シートでの固有モード (a): 反対称モード, (b): 対称モード, (c): 内部モード

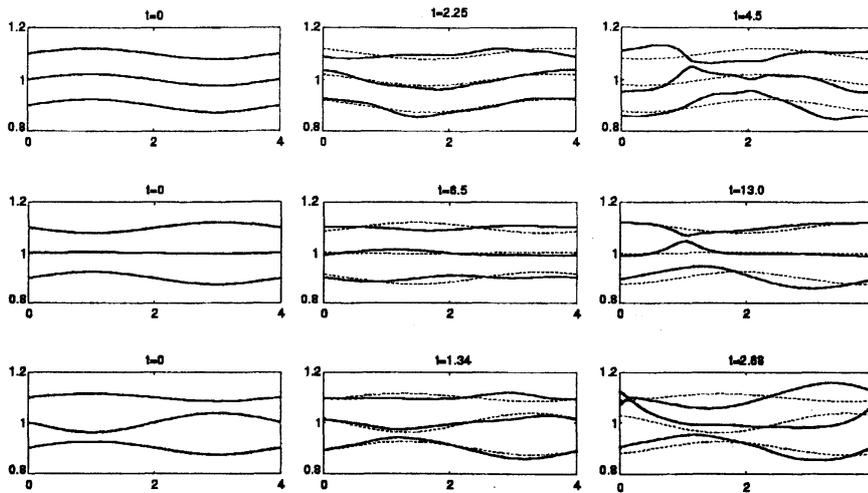


図 5: 線形安定領域での時間発展: 上段: 反対称モード, 中段: 対称モード, 下段: 内部モード

軸, 縦軸に  $r$  軸をとっており, 各段がそれぞれの固有モードを初期値とした場合に対応し, それぞれの段ごとに左の図が初期値, 真中の図が中間状態, 右の図が最終状態となるように時間発展の様子を示している。実線が非線形効果を取り入れた計算, 破線が線形理論による計算の結果である。また表の上に無次元化された時刻を記している。

非線形効果を取り入れた場合に反対称モード, 対称モードは長時間の計算後にシートの厚さが 0 になってしまい計算を続行できなくなる。この状態は 1 層シートの場合に報告されているのと同様であり, シートの崩壊の一種と考えられる。また 2 層に特有の内部モードについてもシートの厚さが 0 になって崩壊することがわかる。特に外側の界面が大きく変形し, それによって厚さが局所的に薄い領域が形成され, そのような場所で厚さが 0 になることがわかる。線形理論の場合にはこのような崩壊はみられない。

パラメータを変化させて計算した場合も, これまで計算した限りでは厚さが 0 になるときは外側の層の厚さが 0 になって崩壊する場合が全てであった。

また崩壊に至る時間についてみると, 1 層の場合と同様に対称モードの方が反対称モードよりも長い。内部モードについては図の場合は反対称モードよりも早い崩壊時間を示している。これは内部モードの場合, 擾乱振幅を同じにした場合, その初期形状において最小厚さが反対称, 対称モードよりもかなり小さくなることによるもので最小厚さを同程度にすると, やはり反対モードの場合の崩壊時間が最も短くなることがわかった。

### 4.3 線形不安定領域における固有モードの時間発展

線形不安定領域における各固有モード形状の時間発展の様子を図 6 に示した。定常解や, パラメータの値は線形安定の場合と同様とした。ここでは系の大きさは  $L = 16$  ととり, 格子点の数を  $N = 512$  として離散化している。この場合には, シートの最も内側の界面の半径が 0 になることによってシートが崩壊することがわかる。またシートの内側の界面の半径が 0 になるような崩壊点近くでの形状は, 初期の擾乱がどのモードであっても反対称モードと同じような形状であり, 内側の層がより厚くなっている。すなわち対称モードや内部モードの場合においても崩壊点の近くで

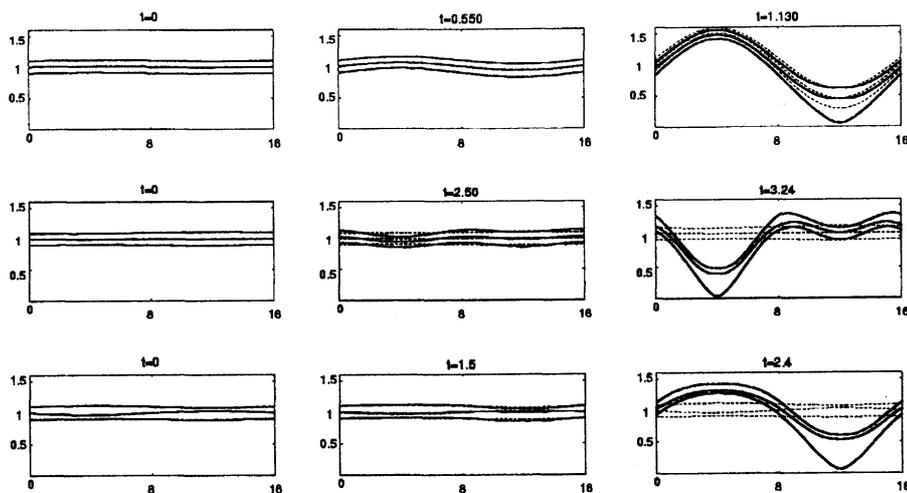


図 6: 線形不安定領域での時間発展: 上段: 反対称モード, 中段: 対称モード, 下段: 内部モード

は, 早い段階で反対称モードに近い形への変形が起こっている。これは反対称モードの成長率が他のモードに対して支配的であるためと考えられる。

崩壊点と半波長離れた場所での形は初期値のモードによって異なった形を示す。対称モードではこのパラメータでは全体に半分の波長の反対称モードが重なったような形であり, 内部モードの場合でも曲率が反対称モードのものよりも曲率が小さい形になっている。

崩壊に至る時間については, 線形安定の場合と同様に反対称モードの場合が最も短く, ついで内部モード, 対称モードの順になっている。これはシートの半径が 0 になるような崩壊ではどのモードにおいても反対称モードが励起されているため, 反対称モードと最も形が違う対称モードの場合が反対称モードが成長するのに時間がかかるためだと思われる。

#### 4.4 パラメータの違いによる時間発展の変化

パラメータを変化させて, 時間発展の様子がどう変わるかを調べた。その結果, 大きくわけて 3 つの崩壊のパターンがあることが分かった。まず一つめは最も内側の界面の半径が 0 になる場合で, これは図 6 のように線形不安定の場合に見られたものであり線形不安定の場合には多くのパラメータ領域でこのパターンが見られる。二つめは図 5 のように外側の層の厚さが 0 になる場合で, 上の線形安定の場合に見られたものであり線形安定なパラメータ領域ではこのパターンが多くみられる。もうひとつのパターンを図 7 に示した。これは線形不安定な反対称モードの場合の密度比を変化させて外側の層の密度を内側の層の密度の 100 倍にしたものであるが, 外側の層の変位が局所的に急激に増大しているような場合になっている。このような場合は, 外側の層で液滴が形成されるような場合に対応すると思われる。また, 2 つめの場合の一種として, 2 箇所ではほぼ同時に外側の層の厚さが 0 になるような場合の例が図 8 である。ここでは線形安定な反対称モードの場合で表面張力係数の値が内側から外側へ向かって 5 倍ずつ大きくしている。今までの計算では, 内側の層の厚さが 0 になるような場合は見られていない。

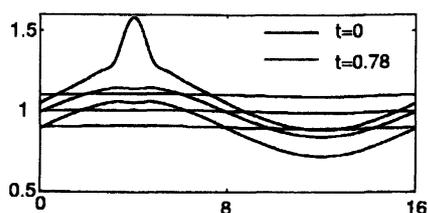


図 7:  $\rho_1/\rho_2 = 100$ , 反対称モード (線形不安定)

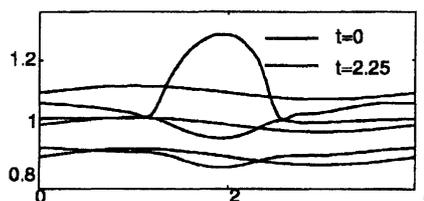


図 8:  $\sigma_{12}/\sigma_{01} = \sigma_{23}/\sigma_{01} = 5.0$ , 反対称モード (線形安定)

## 5 まとめ

2層円環形液体シートに薄膜近似の方法を用いて非線形効果を取り入れたモデル方程式を導出し、数値計算によって解析した。2層円環形シートにおいて新たに内部モードが現れるが、この成長率は対称モードや反対称モードに比べてかなり小さいことがわかった。また2層円環形シートではパラメータが多く存在する。2つの層のパラメータを変えた場合、特定のパラメータ領域では1層シートでは見られないような振舞いの変化が見られた。

今後はさらにパラメータの変化による時間発展の様相を体系的に調べる必要がある。また薄膜近似の手法を擾乱の空間発展に適用することを興味深いと考えられる。

## 参考文献

- [1] W. A. Sirignano and C. Mehring, "Review of theory of distortion and distintegration of liquid streams" *Prog. Energ. Comb. Sci.* (2000), 609 and references therein.
- [2] H. B. Squire, "Investigation of the instability of moving liquid film" *Brit.J.Appl.Mech.* 4 (1953), 167.
- [3] G. D. Crapper, N. Dombrowski and G. A. D. Pyott, "Kelvin-Helmholtz wave growth on cylindrical sheets" *J.Fluid Mech.* 68 (1975), 497.
- [4] J. H. Dumbleton and J. J. Hermans, "Capillary Stability of a Hollow Inviscid Cylinder" *Phys.Fluids* 13 (1970), 12.
- [5] T. Yoshinaga and K. Kotani, Lect.RIMS, Kyoto Univ.(2000),28 [in Japanese]
- [6] C. Mehring and W. A. Sirignano, "Axisymmetric capillary waves on thin annular liquid sheets" *Phys.Fluids* 12(2000), 1417.
- [7] R. H. Rangel and W. A. Sirignano, *Phys.Fluids*A3(1991),2392.
- [8] J. I. Ramos, "Annular Liquid Jets: Formulation and Steady State Analysis" *ZAMM* 72(1992), 565.
- [9] J. M. Kendall, "Experiment on annular liquid jet instability and on the formation of liquid shells" *Phys. Fluids* 29(1986), 2086.