

量子カオスと半古典論

首藤 啓

東京都立大学 大学院理学研究科
shudo@phys.metro-u.ac.jp

1. カオス系の半古典論の有効性と限界

量子論にカオスがどう顕在化するか? という問題を考えるとき, 半古典論は今のところ考えられ得るもっとも有効かつ唯一の解析手段である. たとえば, 離散スペクトルをもつ量子系では, 対応する古典系が十分強いカオスにあるとき, そのスペクトルの統計的性質がランダム行列のそれに一致することが予想されている (Bohigas-Giannoni-Schmit 予想). この問題へのアプローチにも, 量子論と古典論との橋渡しとして半古典論が使われる. ここでいう半古典論とは, たとえば, 経路積分で表される遷移振幅

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int \cdots \int \mathcal{D}(x(t)) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\dot{x}, x, t) \right\} \quad (1)$$

を, その最低次の寄与である古典軌道の和によって与えることを指す:

$$K^{sc}(x_2, t_2; x_1, t_1) = \sum_{\gamma} \mathcal{A}_{\gamma} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\gamma} \right\}. \quad (2)$$

ここで, (2) の右辺の和 γ は, 初期条件 ($t = t_1$ で $x = x_1$), 終条件 ($t = t_2$ で $x = x_2$) を与えた上でそれらを結ぶ古典軌道をあらわす. $\mathcal{A}_{\gamma}, S_{\gamma}$ は各軌道に付随する振幅因子, および古典作用である. 経路積分の表式 (1), その半古典近似 (1) とともにシンボリックに表現したものである. 詳細は省略するが, このように, 作用汎関数に対する変分条件 $\delta S = 0$ を満たす停留点と, その周りの最低次の揺らぎまで考慮した近似をここでは半古典近似という. その近似は, 停留点のまわりの揺らぎがおのおの独立であるときにおいて有効であると考えられる. 短時間の時間推進プロパゲータ (2), あるいは, 跡公式であれば, 短い周期軌道に関しては, カオス系であっても, この前提条件が満たされていると考えても良い. しかし, 長時間, 長周期になるとその保証はない. なぜならば, 系がカオスを示すときには, プロパゲータ (1) の鞍点条件を満たすような解, すなわち, 半古典プロパゲータ (2) に寄与する古典軌道の数は時間と共に指数関数的に増大し, 古典解間の独立性が破れる可能性が出てくるからである. つまり, 系がカオスであることによって, 半古典近似の妥当性に大きな問題が発生する. (古典的な意味で) カオスがカオスたる所以は, 長時間極限ではじめて意味が出てくるものであることを思い出すと, 量子と古典の対応関係を議論する出発点である半古典近似が, ごく短い時間範囲でしか有効でない可能性があるとする, それは由々しき問題である. もしそうであれば, 当然, それを基にしたすべての議論は「絵に描いた餅」になる.

いま考えている半古典近似は, 定常位相近似, あるいは鞍点法の最低次の項を用いる近似であり, その誤差の正確な評価は一般には難しい. (もちろん, オーダーとしての評価は, 通常 WKB 法で議論されるように, プランク定数に関する展開の次数から見積もられる. しかし, 漸近展開の最低次に関する誤差評価をそれ以上に正確に与えることは一般に難しい.) これまでのところ, この問題については, いくつかの具体例に対して調べられているものの [1, 2, 3, 4, 6, 7], 共通の同意が得られているとは言い難い.

本稿では, 以下の3つの観点から, 半古典近似が破綻する具体例を呈示し, この問題を再考してみたい. まず, 2節では, 動的局在現象を示す量子系において半古典論が破綻する様子を

みる。動的局在は、量子-古典の対応が崩れる典型的な現象である。このような量子性が強く顕在化する状況において半古典論をテストことは、半古典論の有効性と限界を知る上で有用な情報を提供する。3節では、多角形のビリヤード問題における半古典論の破綻例を示す。多角形ビリヤード台上の古典論では、指数関数的な不安定性を示さないにもかかわらず、一般的には、混合性・エルゴード性を示すことが予想されている [8]。この系の量子準位統計のユニバーサリティクラスに関する新しい予想があるが [9]、これらの議論の出発点も半古典論である。しかし、3節で示すように、この系の（最低次のみを考慮した）半古典跡公式は正しい量子論を再現しない。このことは、少なくとも最も短いエネルギースケールでの統計則（最近接レベル分布など）を半古典論をもとに説明することの困難さを示唆している。第4節では、カオス系の量子トンネル効果を議論する。量子トンネル効果も、動的局在現象と同じように、古典論には存在しない典型的な量子効果のひとつであり、その意味で、もっとも素朴なレベルでの半古典論では記述できない。しかし、用いる半古典論を複素領域に拡張することにより、「古典論にはない量子効果を古典論で再現する」ことができるようになる。半古典論を複素領域に拡張することで得る最も大きな恩恵は、半古典プロパゲータに寄与する（複素）古典軌道間の関係をより精密に知ることができるようになることである。半古典近似の展開を最低次で止めず、高次まで続けていった場合にも避けられない半古典論の限界と、より正確な誤差評価は、複素領域に広げた漸近展開理論を用いてはじめて可能になる。この点について最後に簡単に触れる。

2. 半古典論と純量子論的效果 I

跡公式を含む、さまざまな半古典論の出発点である時間領域の半古典論を考える。カオス系の半古典論では、エネルギー領域の半古典論（Gutzwiller 跡公式）を考えることが多いが、エネルギー領域の半古典論には、無限和の収束性の問題と、半古典的な近似の2つの問題が混在しており一般に状況は複雑である。カオス系における半古典近似の限界と妥当性を議論するためには、半古典論の出発点である時間領域の半古典論に立ち戻る必要がある。時間領域の半古典論では、その適用時間を有限に限るならば、先の半古典論プロパゲータ (2) に寄与する古典軌道は常に有限個であり、跡公式にあるような無限和の収束の問題を考える必要はない。

ここでは特に、動的局在効果を起こす系の半古典近似の有効性と限界を考える。動的局在効果とは、円筒位相空間上で与えられる標準写像 (standard mapping) など、開放系に見られる位相空間上での局在現象のことである [10]。具体的には、以下の激力振動子系 (=写像系) で典型的に見られる：

$$H(p, \theta, t) = \frac{p^2}{2} + V(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad (3)$$

ポテンシャル関数として $V(\theta) = \sin \theta$ を選ぶと、いわゆる標準写像 (standard mapping) になる。ここでは、区分的に2次的なポテンシャル

$$V(\theta) = K \{ \theta - (2n + 1) \}^2 / 2 \quad (4)$$

$(2n\pi \leq \theta \leq 2(n + 1)\pi; n \text{ integer})$

を用いる。

写像系では、時間発展が離散的であることを反映して、経路積分表示された量子プロパゲータ (1) の汎関数積分は多重積分に置き換わる（写像系のプロパゲータの構成については [11] などを参照されたい）。しかし、その半古典論は、多重積分に対する停留位相近似（あるいは、

鞍点近似)を施すことによって得られる点では本質的に連続時間のもとと変わらず、カオス系で直面する困難を共有する。すなわち、系がカオスを示すと、半古典プロパゲータに寄与する古典軌道は、時間ステップと共に指数関数的に増大し、寄与する古典軌道の独立性の仮定は危なくなる。古典軌道のまわりの揺らぎの独立性が崩れるタイムスケールに関しては、既に多くの議論がある。もっともナイーブな評価は、初期のラグランジュアン多様体が引き延ばしと折れ畳みのダイナミクスを経て、寄与するブランチ間に干渉が発生する時間、いわゆる Ehrenfest time ($\sim \log \hbar^{-1}/\lambda$, ただし λ は系のリアプノフ数)である。この素朴な予想は、パイこね変換などの簡単な写像系で調べられたが、実際には、予想された、 $\log \hbar^{-1}/\lambda$ のタイムスケールを越えて有効であることが指摘された [1, 3]。その理由は、[5]でも考察されているが、寄与する古典軌道の独立性は、位相空間上の寄与古典軌道間の距離ではなく、(2)の位相のなかの古典作用の差によって決まることによると考えられる。作用の差は、単純に、位相空間上のブランチ間の距離ではなく、ブランチと多様体とが囲む扇型領域の面積で与えられる。その結果、半古典論が有効である時間スケールは、その扇型領域の時間変化を評価しなければならない。簡単な考察から、このブランチと多様体が囲む面積は時間が経ってもオーダー1であることがわかり [5]、半古典論破綻の理由として挙げられるナイーブな議論は必ずしも当たらないことになる。しかし、この問題はまだはっきりとした決着が付いておらず、いくつかの数値的な検証が行われているに過ぎないのが現状である。

ここでは、区分線型ポテンシャルをもつ写像系 (3) における半古典論の有効性について調べた計算結果を以下で示す。この計算は、もともとは、動的局在を半古典論が再現可能か否か? という問題意識のもとに行われたものである [4, 5]。しかし、その計算の途上、動的局在の半古典論による再現可能性と、半古典論自身の有効性との間には非常に微妙な関係があることが明らかになった。もう少し正確に言うと、半古典論の有効な時間スケールと動的局在が起り始める時間スケールとは拮抗しており、古典論が潜在的にもつ「軌道間相関」によって半古典動的局在が起り始めるちょうどその時間スケールで半古典論自身が破綻する、というものである。詳しくは、文献 [5] を参照していただきたいが、両者の時間スケールがほぼ拮抗してあらわれることには必然性があると思われる。標語的に言うならば、「古典的な拡散と量子的な局在が明確に識別できるくらいの時間スケールで半古典論は破綻する」ということになる。

半古典論が破綻する事例として、半古典波動関数の規格化定数の時間変動の様子を図 1 に示そう。純粋な量子論は、確率保存の要請からユニタリ性を保持し、一方、古典論も自らのダイナミクスのなかに、Liouville の定理というかたちでユニタリ性が保たれる機構をもっている。一方、半古典プロパゲータには、アприオリにユニタリ性を保証するものはない。もちろん、半古典プロパゲータに寄与する軌道の位相が完全にランダムで互いに打ち消し合い、実質的には、半古典論が古典と同じように振る舞う時間スケール内では、半古典的なユニタリ性が古典論のそれによって保証される、という事情はあるが、それを越えた時間スケール、つまり、動的局在が起り始め、量子論が古典論と解離しはじめたあとでは、ユニタリ性が保持される機構はどこにも準備されていない。実際、規格化定数は多くの場合、図 1 に示すように時間と共に指数関数的に増大してしまう。つまり、局在を起こしたあとの長時間の半古典論は完全に破綻するのである。規格化定数が指数関数的に爆発する理由は、もともと半古典プロパゲータに寄与する軌道が、時間と共に指数関数的に増えることを反映したもので (しかし、その増大の指数は、必ずしも系のリアプノフ数とは一致しない)、半古典近似による個別の軌道の誤差が、時間と共に指数関数的に累積する結果として解釈できる。

このような破綻を起こす前までの半古典プロパゲータを multiplicative に掛け合わせることで動的局在は再現できる、といった主張も、最近なされている [12]。しかし、これは半古典論

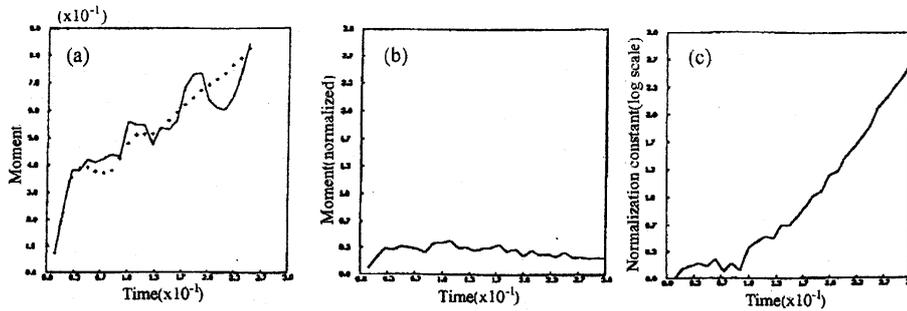


図 1: (a) 古典論 (+印), 及び量子論 (実線) のモーメント ($\langle p^2 \rangle$) の時間変化. (b) 半古典論を用いて得られたモーメント ($\langle p^2 \rangle$) の時間変化. (c) 半古典論の波動関数の規格化定数の時間変化.

と量子論の計算をハイブリッドに使い分けることで可能になっただけであって、長時間の半古典近似が破綻することを救うものではない。さらに、文献 [4, 5] で明らかにされているように、半古典プロパゲータに寄与する古典軌道は、動的局在を再現するための「種」としての軌道間相関を潜在的にもっている。従って、それらを multiplicative に掛け合わせることで動的局在が再現されること自体は不思議ではない。

区分線型な系では、ポテンシャル関数に不連続点がある。このため、半古典近似を施した際、不連続点における回折の効果からくる誤差が、オーダーとして $\sqrt{\hbar}$ となり、不連続点がない滑らかなポテンシャルの場合に比較して大きい。このことから、半古典論が破綻する時間スケールが早くなっている可能性もあるが、一方、滑らかなポテンシャルの場合には、Lagrange 多様体上の折れ曲がり点上で caustics があらわれ、caustics 上の発散による誤差累積の問題が出てくる。後者の場合に関する半古典論の限界に関しても、前述のナイーブな議論を超える詳しい解析はいまのところない。

3. 半古典論と純量子論的效果 II

この節では、多角形ビリヤード系における半古典論の有効性を考察する。2次元平面上の多角形を境界とするようなビリヤード問題では、長方形、正三角形、頂角が 30° - 60° - 90° の直角三角形および 45° - 45° - 90° の直角二等辺三角形のみが完全可積分 (Liouville-Arnold の意味で) であり、それ以外の多角形はすべて非可積分であることが知られている。しかし、多角形ビリヤード問題では、境界が区分的に直線であることから、局所的な意味での軌道の分離が起きず (角のみ例外)、系の力学系なエントロピー (KS エントロピー、トポロジカルエントロピーなど) はゼロとある。特に、すべての頂角が、有理数 $\times \pi$ から成るような多角形ビリヤードは「擬可積分系」と呼ばれる。擬可積分な多角形ビリヤードでは、一般に種数 (genus) が 2 以上の平坦計量をもつような多ハンドル面上の流れになる。さらに、正 n 多角形 ($n \geq 5$)、底角が $\pi/2n$ の二等辺三角形、底角にひとつが π/n の直角三角形は、Veech によってその性質が詳しく調べられている [13]。以下で例として用いる多角形もこのクラスに属する。

さて、2次元平面ビリヤード系に対する量子論の固有方程式は、ヘルムホルツ方程式 ($\Delta + k_0^2$) $\psi_n(x, y) = 0$ に他ならない。双曲的ビリヤード系と同様、多角形ビリヤードの固有値に対し

て、半古典近似のもとで以下の跡公式が導出される [14] :

$$d(k^2) = \frac{A}{4\pi} + \frac{A}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{8\pi^3 k}} \sum_{\gamma} \frac{a_{\gamma}}{\sqrt{L_{\gamma}}} \cos(kL_{\gamma} + (\alpha_{\gamma} - \frac{1}{4})\pi). \quad (5)$$

ここで、 A はビリヤード台の面積、 L_{γ}, a_{γ} は、ビリヤード台上の周期軌道 γ の長さ、および、その周期軌道が掃く面積である。多角形ビリヤード上では、すべての周期軌道は、1-パラメタ属をなすが、 a_{γ} は、その1-パラメタ属が開いた (unfolded) 平面上で掃く面積である。さらに、 α_{γ} は、周期軌道 γ が、境界と衝突する回数であり、双曲的ビリヤード系の場合のマスロフ指数に対応するものである。和 \sum_{γ} は、双曲的ビリヤードの跡公式同様に、すべての周期軌道に対する和をあらわす。多角形ビリヤード系では、系がカオスにならないことを反映して、周期軌道の数は、その長さに対して高々代数的にしか増大していかないことが証明されている (たとえば、[8] を参照されたい)。とくに、almost integrable と呼ばれるクラス、すなわち、多角形の台が、上記で挙げた可積分な多角形ビリヤードを組み合わせて作られるようなビリヤード台では、周期軌道の数はその長さの2乗でしか増大していかないことが知られている。これは可積分な多角形ビリヤードと同じ増大率である。

以下では、正三角形を2つつないでできた菱形を境界とする擬可積分ビリヤード系に対して、半古典跡公式を適用した結果を示す。この系の固有値問題は、菱形の短い対角線に対して奇パリティをもつ固有空間と偶パリティをもつ固有空間に分解されるが、奇パリティをもつ固有関数は、短い対角線上でその値をゼロにするものであることから、正三角形内の固有関数と全く同じものになる。つまり、奇パリティの部分空間に属する固有値・固有関数は、完全可積分な古典ビリヤード系に対応するものであり、ここでの興味の対象外である。対応する古典系が擬可積分になるのは、偶パリティをもつ固有関数空間である。その場合に対して、半古典跡公式 (5) を検証する。

先にも述べたように、この系は、Veech のビリヤードと呼ばれる、擬可積分の中でもさらに特別なクラスに属している。導出の詳細は省略するが、この系では、種数2に対応した2枚の平面を用意し、その間の行き来を記述する写像を構成することにより、周期軌道を解析的に求めることができる [15]。

なお、奇パリティ部分空間に対応する周期軌道スペクトルも、当然求めることができ、最終的な表式上では直ちには見えないが、両者の差は、半古典跡公式 (5) の中に出てくる位相 α_{γ} の違いのみにあられる。したがって、周期軌道の長さに対する増大率のような粗い量に関しては違いはなく、可積分系に対応する周期軌道スペクトルと擬可積分系に対応するそれとは非常に微妙な差しかない。ところが、この周期軌道スペクトルを用いて半古典跡公式 (5) をテストすると、図2に示すように、その有効性には大きな違いがあらわれる。可積分状態に対応する半古典跡公式は、正しい量子準位を再現するのに対して、擬可積分系の固有値は、半古典跡公式では正しく再現されない。

この理由を考えるには、図3のように、ビリヤード台を広げた (unfolded) 面での擬可積分系での流れを描くと分かり易い。菱形のビリヤード台上の流れを平面に広げると、図のように、線分の障壁が周期的に並んだような平面上の流れになる。線分に軌道がぶつかると、軌道はそこで反射される。一方、可積分系ではトーラス上の流れになるため、このような障壁はあらわれない。つまり、擬可積分と完全可積分系、あるいは奇パリティ状態と偶パリティ状態との違いは、広げた平面上では障壁の有無となってあらわれる。障壁の端点近傍を横切る軌道は、端点をまたいで右側を通るか左側を通るかで分離が起き、このことが擬可積分系を特徴付ける。端点が存在することによる特異性は、量子論では「回折」の効果となって現れる。半古典跡公式 (5)

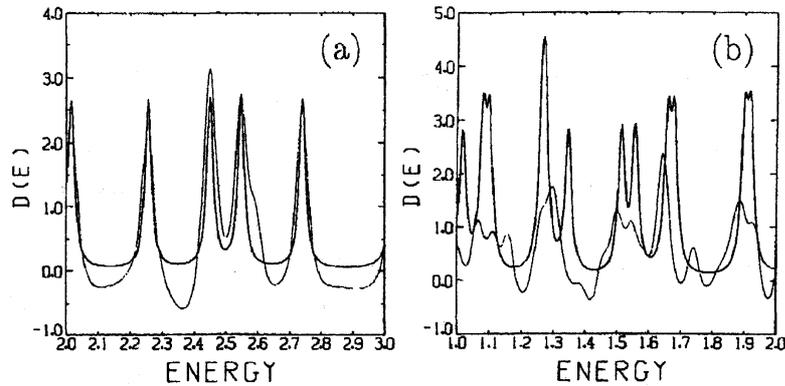


図 2: 半古典論から得られる状態密度 (細線), および量子論の状態密度 (太線). それぞれ, (a) 奇パリティ (可積分ビリヤード) 状態, (b) 偶パリティ (擬可積分ビリヤード) 状態に対するもの.

を導出する際に考慮されたのは, 1-パラメタ属をつくる周期軌道だけであり, その1-パラメタ属が端点によって分離されることによる回折の効果はまったく考慮されていない (対する可積分系では, ビリヤード台を平面に広げた際, 障壁が存在しないので回折も問題にならない). 回折の効果は, 半古典論の枠内では, いま考えている最低次の近似に対してより高次の効果である. したがって, 少なくとも多角形ビリヤードのように古典論の流れに不連続性をもつような系では, 高次の半古典論を考えることが避けられないことをこの数値計算結果は示している.

最近, 多角形ビリヤード系の準位統計の普遍則が議論されるようになった [9]. 冒頭で述べたように, 準位統計の普遍則を, 対応する古典論と結びつけて議論するには半古典論が用いられる. 準位統計を問題にする際, もっとも考えやすいのは, エネルギー準位の 2 点相関関数

$$d(\epsilon) = \left\langle d\left(E + \frac{\epsilon}{2}\right) d\left(E - \frac{\epsilon}{2}\right) \right\rangle, \quad (6)$$

である. ここで, $E = k^2$ で, 右辺の平均 $\langle \cdot \rangle$ は, 平均の準位間隔よりも十分大きく, かつ, 考えているエネルギー E よりも十分小さいようなエネルギー幅で取る [16] (半古典極限での議論を行うので, 考えるエネルギー自体は十分大きいことに注意). この 2 点相関関数は, 半古典近似のもとで, いわゆる周期軌道から得られる形状因子,

$$K_2(\tau) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \frac{2\pi}{d} A_{\gamma_1} A_{\gamma_2} \left\langle e^{i(S_{\gamma_1}(E) - S_{\gamma_2}(E))} \right\rangle \delta\left(\frac{T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2}}{2} - 2\pi\hbar d\tau\right), \quad (7)$$

のフーリエ変換で与えられる. 左辺の 2 重和は, 周期軌道 γ_1, γ_2 に対する和であり, $S_{\gamma_i}, T_{\gamma_i}$ はそれぞれ対応する古典作用, および周期, また, d は平均準位密度を表す. Bogomolny らは, ひとつの角度が $\pi/2n$ で与えられる直角三角形 (= Veech のクラスの擬可積分ビリヤード) に対して, この形状因子の $\tau = 0$ での値が以下になることを示した [17]

$$K_2(\tau) = \frac{n + \epsilon(n)}{3(n-2)} \quad \text{ただし, } \epsilon(n) = 0 \quad (8)$$

ここで, n が偶数のとき $\epsilon(n) = 0$, n が偶数で 3 で割り切れないとき $\epsilon(n) = 2n$ が偶数で 3 で割り切れるとき $\epsilon(n) = 6$ である. これは, ポアソン分布 ($K_2(\tau) = 1$) とランダム行列理論の

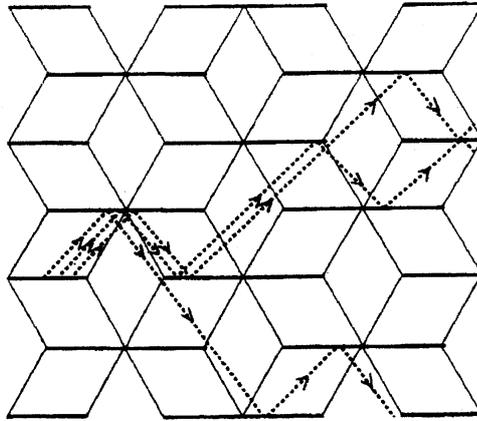


図 3: 菱形ビリヤード台 (頂角が 60°) の unfolded plane とその上の典型的な軌道. 軌道は, 太線分に衝突すると反射され, それ以外では直進する.

GOE(Gaussian Orthogonal Ensemble) ($K_2(\tau) = 0$) との中間的な値を取る. このことは, 多角形ビリヤードの準位統計の数値計算結果 [18] ともしお矛盾がなく, Bogomolny らは擬可積分系のレベル統計は, ポアソン分布でもウィグナー分布でもない, その中間にある普遍的な分布になることを主張している [9, 17]. しかしその一方で, ここで見たように, 半古典軌道公式は回折効果によって破綻する. もちろん, 形状因子に対する Bogomolny らの結果は, $\tau = 0$ すなわち, エネルギーの最も長い range にわたる相関に関する性質であり, 一方, 図 2 で見たものは, 個々のエネルギー準位という最も小さいエネルギースケールに関する話であることから, 直接の比較はできない. しかし, 古典位相空間内で測度ゼロの特異点が, 回折効果として量子論に与える影響は大きな問題として残る. さらに, 例えば, 2 節で扱った区分線型写像系でも, 写像のポテンシャルが不連続な箇所では, 多角形ビリヤードと同様, 古典論の流れに不連続点をつくる. この系の場合, 不連続点をもつことに加えて, 系が双曲性をもち真にカオスを発生することから, 多角形ビリヤードに比べて技術的にも原理的にも半古典論がより困難な問題が予想される.

4. 半古典論と純量子論的效果 III

次に, カオス系のトンネル効果と半古典論の問題を議論する. トンネル効果は, 古典論に対応物のない純粋な量子効果である. 一方, これまで議論してきた半古典論では, 最初の段階では, プロパゲータへの寄与としては実の古典論しか考えないことになっている. そこでまず, この枠組でどこまでトンネル効果を記述することができるか否かを考えてみよう. (2) の和に寄与する各項には, 古典軌道とその周りの展開の 2 次までの揺らぎが考慮されている. つまり, 実古典軌道の周りの揺らぎの及ぶ $\sqrt{\hbar}$ 程度の幅の滲みだしまでは量子効果を再現することができる. しかし, 例えば, トーラス領域とカオス領域とが位相空間に共存するような場合, トーラス領域に置かれた初期状態からはじめた量子波束は, 初期のトーラス領域から十分離れたカオ

ス領域、あるいは、別のトーラス領域にもトンネル効果を介して遷移することができる。このような、古典的に異なる不変集合間の量子的遷移（動的トンネル効果と呼ばれる）は、明らかに、古典軌道のまわりの微少揺らぎでは表現することはできない [19]。通常の古典軌道、すなわち、実の古典軌道のみを用いた半古典論では、このような一般の非可積分系（カオスとトーラスが混在している）のトンネル効果を記述するには限界がある。原理的には、半古典近似の次数を上げていけば、より広範囲のトンネル効果を表現できる可能性もあるが（そのことを詳しく確かめた研究はほとんどない）、素朴に考えて、トーラス領域しか動き回らない古典軌道のまわりの高次の揺らぎだけでカオス領域へのトンネル遷移が記述されるとは到底思えない（おそらく、その前に、展開が発散し始めるのではないか？）

半古典論の枠内で、非可積分系のトンネル効果を記述するもっとも自然な方法は、古典軌道を実数の領域から複素の領域へ拡張することであろう。その有効性は、既に様々な系で確認されているが [19, 20, 21]、ここでは、複素領域に拡張された半古典論における（系が非可積分であることに由来する）2つの大きな未解決問題に言及するに留める。

その第一は、半古典論に出てくる古典力学についてである。複素領域に拡張した半古典論（以下、複素半古典論）では、プロパゲータ (2) などに対する寄与古典軌道として複素の古典軌道が出てくる。しかしながら、複素の古典力学は、これまでのところ、少なくとも物理現象を記述する手段として研究の対象とされたことはほとんどなく、その観点からはこの問題は発展途上にある。かりに、離散的な時間発展をする写像系に話を限ったとしても、力学系として比較的性質のわかっているのは、多項式をポテンシャルにもつような系だけである。幸い、90年代に入ってから、多変数複素関数論の手法の開発と並行して Hénon 写像族と呼ばれる多項式自己同型写像のクラスに関しては、いくつかの基本定理ともいえるべき重要な結果が得られており [22, 23]、トンネル効果の理解にもひじょうに有用であることがわかってきている [20]。しかし、物理的には是非とも明らかにされなければならない、コンパクトな位相空間をもつような状況設定での複素力学系はよく調べられていない。ましてや、離散写像ではなく、時間連続のハミルトニアン系では、系統的な解析はほとんど皆無に等しい [24]。

また、トンネル効果の関連してとくに重要な問題は、KAM トーラスとカオスが混在するような非双曲系の複素力学である。面積保存のシンプレクティック写像で、KAM トーラスとカオスが混在する状況については、高次元複素力学系の一般論からまだあまり研究が進んでいない。Last KAM トーラスの崩壊、という観点から、KAM トーラスの複素拡張とその限界（自然境界の発生）が議論された時期があったが [25]、複素力学系との関連についてはよくわかっていない。これらの問題は、近可積分系の半古典量子化条件をいかに与えるか？ということからも非常に重要と思われる。位相空間の自己相似性、トーラス領域とカオス領域の境界にある「淀み領域」など、近可積分系固有の事情を考慮しない解析は、近可積分系の量子論の理解としては不満足なものである。（カオス領域とトーラス領域とがまったく独立なものであるとし、それぞれには、それぞれの半古典論、すなわち、トーラス領域には、EBK 量子化、カオス領域には、跡公式を適用する、という考え方はあまりに素朴過ぎる）。しかしながら、異なる不変集合（実面上の）の間まで立ち上った議論は既存の半古典論にはまだない。これを補うものとして、近可積分系の複素力学系の研究はその手がかりを与えるものとして期待される。

カオス系の複素半古典論を考える上で、いまひとつの重要な問題は、高次元のストークス現象の問題である。実の半古典論を実行する際には、たとえば、半古典論プロパゲータ (2) に寄与する軌道は、与えられた始状態と終状態を結ぶすべての（実）古典軌道であった。しかし、半古典論を複素領域に拡張すると、たとえ鞍点条件を満足する解であっても、そのすべてが半古典プロパゲータ (2) に寄与するとは限らない。これは、漸近展開の理論で古くから知られるス

トークス現象の結果であり、複素領域に拡張した結果はじめて登場する。

ストークス現象については、対象が漸近展開、すなわち発散級数であったことから、長らく厳密な数学の対象とはなりにくく、ごく最近まで、現象論的な説明しか与えられていなかった。しかし、近年、ポレル総和法にもとづいた完全 WKB 解析の理論が進み [26, 27]、従来、厳密な解析の対象でなかった漸近展開にきちんとした数学的な裏付けを与えることが可能になってきた。

そのような状況のなか、青木-河合-竹井らによって、高階の微分方程式（ここでいう高階とは、3階以上という意味）に対する完全 WKB 解析が整備されつつあり [28]、それにもとづいたカオス系の複素半古典論にあらわれるストークス現象の解析が可能になりつつある [30]。高階の微分方程式では、2階の微分方程式には存在しなかった新しいストークス線があらわれ、従来のストークス線と新しいストークス線を合わせた「ストークス幾何」から大域的な解の接続の情報を得る、という方法論が確立されつつある。与えられたストークスグラフ（従来のストークス線と新しいストークス線を合わせたすべてのストークス線から成るグラフ）から、いかにストークス幾何を決定するか？という点については、完全最急降下法の理論が開発され [31]、より完全な処方箋を与えるに至っている。しかし、カオス系の複素半古典論については、カオスのダイナミクスがストークスグラフにどう反映されるか？という点が本質的な問題として入ってくるため問題は難しい。これについては、先に挙げた、Hénon 写像について解析が進みつつあるが [30]、力学系の性質（例えば、カオスを発生させる馬蹄型力学）が、ストークス線のグラフとどう関連付けられるか？より具体的には、任意の時間ステップでのストークス幾何が、力学系のどのような情報を用いて書き下されるか？といった問題はまだ明らかになっていない。

ストークス幾何を決定することは、鞍点（いまの場合、古典軌道）のあいだの大域的なつながりを決定することに他ならないが、これは、2節で述べた、動的局在の問題などでもあらわれる「軌道間相関」として広く捉えることもできる。もし、半古典プロパゲータ (2) に寄与する古典軌道相互にいかなる相関も存在しなければ、たとえ半古典論が長時間にわたって有効であったとしても、半古典論は動的局在を表現することはできない。半古典跡公式の場合にも、系が離散的なスペクトルをもつための必要条件として同様の軌道間相関が予言されるが [16]、いずれの場合も、古典論が量子論に「化ける」（拡散せず局在する、or 連続スペクトルではなく離散スペクトルをもつ）とき古典系に要請される相関である。半古典論プロパゲータに寄与する複素軌道の取捨選択も、大域的な古典解の接続の情報（＝ストークス幾何）から個々の軌道の寄与・非寄与を決定する手続きとみなせば、ストークス幾何も、カオス系の大域的な軌道間相関のひとつの表現とみることができる。

5. 結語

カオス系の量子力学の理解には、半古典論は欠くことのできない。しかし、本稿で見てきたように、カオス系の半古典論はそれ自身に大きな困難をかかえている。その困難は、もともと発散級数、漸近展開でしかなく、その適用範囲を十分コントロールできない WKB 理論を、さらにカオス系に適用しようとするところからくる。ここでは、その困難のいくつかの側面を見てきたが、呈示された問題群が、果たして技術的な問題に留まるものなのか、それとも、カオス系の量子・古典の対応がもつ原理的な問題と深く関わってくるものなのか、重要なポイントであるにも関わらず、いまのところ判然としないままになっている。

アーノルドの猫写像（トーラス上の群同型写像）、定負曲率面上の測地流の問題など、半古典近似が厳密な場合（展開の高次の項が出てこないで、最低次で切れてしまう）はともかく、

WKB exact でない場合の一般のカオス系での「量子化」は果たして可能なものなのか？もっとも悲観的なシナリオは，“カオス系の量子論は，量子化された系を書き下すしか表現しようがなく，他の情報に還元することはできない”ということになるが [29]，もしそうであればそれはいったい何を意味するのか。こういった疑問は，量子カオスの研究の中から出てきた最も重要な問題のひとつと思われるが，この点を巡っての議論も残念ながらまだ少ない。

著者には，4節で触れた（紙数の都合上詳細は一切省略したが），完全 WKB 解析がこういった問題にアプローチすること可能な現在のところ唯一の方法であるように思われる。何度か触れたように，漸近展開では，その誤差項を評価することが困難であることが多い。しかし，完全 WKB 解析の一つの流れに位置づけられる「超漸近展開法」の中では，展開の剰余項の評価なども与えることが出来る場合もあり，定量的な観点からも有望である。また，4節で述べたように，カオス系の半古典論が問題にしなくてはならない，高次元のストークス現象も，完全 WKB 解析の枠組を用いるときちゃんと定義することができ，かつ，その有効な処方箋も与えることができる [30]。古典カオスの理論と比較して，量子カオスの問題をきちんと定式化された形として呈示しにくいのは，ここで述べたような半古典論の難しさがあることが大きな要因となっているが，その意味で，「完全に理解可能な」「厳密にわかる」toy model をつくるのが大事な作業と言える。

参考文献

- [1] S. Tomsovic and E.J. Heller, Phys. Rev. Lett. **67**, 664 (1991).
- [2] P. Boasman, Nonlinearity, **7**, 485 (1994).
- [3] M. Saraceno and A. Voros, Physica D **79**, 206 (1994).
- [4] A. Shudo and K. Ikeda, Prog. Theor. Phys. **116**, 283 (1994).
- [5] 首藤啓, 池田研介 物性研究 **59**, 757 (1993).
- [6] F.M. Dittes, E. Doron, and U. Similansky, Phys. Rev. E **49**, R963 (1994).
- [7] L. Kaplan, Phys. Rev. E **58**, 2983 (1998).
- [8] E. Gutkin, Physica D, **19**, 311 (1986).
- [9] E. B. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit, Phys. Rev. E **59**, R1315 (1999).
- [10] G. Casati, B.V. Chirikov, F.M. Izrailev and J. Ford, in *Stochastic Behaviors in Classical and Quantum System* (Springer, N.Y. 1979), p. 334; B.V. Chirikov, F.M. Izrailev and D.L. Shepelyansky, Soc. Sci. Rev. Sect. **C2**, 209 (1982).
- [11] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* (Wiley Inter-Science, New York, 1989).
- [12] L. Kaplan, Phys. Rev. Lett. **81**, 3371 (1998).
- [13] W. A. Veech, Invent. Math. **97**, 553 (1989).
- [14] R.J. Richens and M.V. Berry, Physica D, **2**, 495 (1981).
- [15] A. Shudo Phys. Rev. A **46**, 809 (1992).
- [16] M.V. Berry, Proc. Roc. S. London, **400**, 229 (1985).

- [17] E. Bogomoluy, O. Giraud, and C. Schmit, *Commun. Math. Phys.* **222**, 427 (2001).
- [18] A. Shudo and Y. Shimizu, *Phys. Rev. E* **47**, 54 (1993).
- [19] A. Shudo and K. S. Ikeda, *Phys. Rev. Lett.* **74** 682 (1995); *Physica D* **115**, 234 (1998).
- [20] A. Shudo, Y. Ishii and K.S. Ikeda, *J. Phys. A* **35**, L225 (2002).
- [21] T. Onishi, A. Shudo, K. S. Ikeda, and K. Takahashi, *Phys. Rev. E* **68**, 056211 (2003).
- [22] E. Bedford and J. Smillie, *Invent. Math.* **103**(1991)69; *J. Amer. Math. Soc.* **4**(1991)657; *Math. Ann.* **294**(1992)395; E. Bedford M. Lyubich and J. Smillie, *Invent. Math.* **112**(1993)77.
- [23] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, " *Holomorphic dynamics*" (Cambridge Univ. Press, 1999).
- [24] K. Takahashi and K. S. Ikeda, *Found. Phys.* **31**, 177 (2001); *J. Phys. A* **36**, 7953 (2003).
- [25] J.M. Green and I.C. Percival, *Physica D*, **3**, 530 (1981); I.C. Percival, *Physica D*, **6**, 67 (1982).
- [26] A. Voros, *Ann. Inst. H. Poincare, A* **39**, 211(1983).
- [27] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in *Special functions* (Springer, New York, 1991), p. 1; 河合隆裕, 竹井義次, 『特異摂動の代数解析』(岩波書店, 1998) .
- [28] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, in *Méthodes résurgentes, Analyse algébrique des perturbations singulières*, L. Boutet de Monvel ed. p. 69 (1994); T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, *Asian J. Math.* **2**, 625(1998).
- [29] A. Voros, *J. Phys. A* **21**, 685 (1987).
- [30] A. Shudo and K.S. Ikeda, *Stokes geometry for quantized Hénon map*. to be published.
- [31] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, *J. Math. Phys.* **42**, 3691 (2001).