

# A Sufficient Condition for Non-Existence of Symbolic Representation for Discrete Dynamical Systems

Atsuro Sannami

Department of Computer Sciences

Kitami Institute of Technology

(三波 篤郎 - 北見工業大学 情報システム工学科)

## 1 Symbolic representation

力学系の構造をどのように表現したら良いのか? というのは一つの問題ではあるが, 今のところ, 記号力学系に対応させる, というのが, 標準的であると同時に, ほとんど唯一の方法と言えるかもしれない.

記号力学系によって, その構造が見事に表現できた例としては, Axiom A 微分同相写像と 1 次元写像の 2 つが挙げられる. Axiom A 微分同相写像はマルコフ分割を持ち, それによって non-wandering set 上の dynamics は, finite type subshift と有限対 1 の対応を持つ. 1 次元の multi-modal map に関しては, critical point で区間を分割することにより orbit の itinerary representation が得られ, wandering interval や sink の basin などの部分を除けば, 力学系的に重要な部分の構造は, 基本的には記号力学系によって表現される [dMvS].

2 次元以上であって, さらに uniformly hyperbolic ではない微分同相写像ではどうなのか? ということが大きな問題となる. これについては, 特に Hénon map を中心として, いくつかの試みがなされている [BW], [CGP], [CP], [dC], [GK], [GKM], [SDM]. 特に horseshoe map ではない場合の, 軌道構造の記号力学系による表現については, 次のような結果が挙げられる.

- Davis-MacKay-Sannami [DMS] では, 面積保存の Hénon map が, horseshoe とはならないような, いくつかのパラメータ区間におい

て hyperbolic structure を持ち, その dynamics が Markov shift に  
よって完全に記述できるということが示されている. その議論は数学  
的な証明ではないが, 安定多様体と不安定多様体の configuration に  
基づいた, hyperbolicity を持つためのメカニズムが提案され, それ  
によって得られるマルコフ分割から計算される周期点の数と Biham-  
Wenzel の方法によって計算される周期点の数が周期 20 まで完全  
に一致するという, 極めて確実性が高いと思われる証拠を提示して  
いる.

- Wang-Young は, Hénon type map が 1 次元写像に十分に近い時,  
positive measure のパラメータ値において, non-uniformly hyper-  
bolic attractor を持ち, さらにその上において, subshift による有  
限対 1 の symbolic 表現が可能であることを示した [WY].
- Lozi map に関しては, 石井豊氏が数学的に厳密な “pruning front  
theory” を構築し, dynamics の完全な symbolic representation を  
与えた [Ish].

なお, これら以外の Hénon map に関する多く結果については [S] 参照.  
一般に, Hénon map あるいは Hénon type map に関して symbolic な表  
現を与えることは非常に困難である. その主な理由としては, hyperbolic  
ではない場合, 安定多様体と不安定多様体が複雑に絡みあい, いたるところに  
homoclinic tangency かあるいはそれに非常に近い状態が現れる  
からである.

もう一つ異なるタイプの困難は, いわゆる KAM region に現れる. 面積  
保存の Hénon map は, 広い範囲のパラメータ値で楕円型周期点を持  
ち, その回りでは invariant circle が収束している. このような状況は,  
symbolic 表現可能性とは相容れないように思われる.

ここでの目的は, まさにそのことを示すことである. 主定理を述べるた  
めに, いくつかの定義をしておこう.

**Definition 1 (1)**  $\Sigma_k = \{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{Z}}$  とする. すなわち  $\Sigma_k$  は  $k$ -  
symbol の両側無限列全体である. その位相は離散位相の積であり,  
従って Tychonoff の定理より  $\Sigma_k$  はコンパクトになる.

- (2) Shift map  $\sigma : \Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$  を  $\sigma(x)_i = x_{i+1}$  と決める. ここで,  $x = (x_i) \in \Sigma_k$  である.
- (3)  $\sigma$ -不変な  $\Sigma_k$  の閉部分集合  $\Lambda$  に  $\sigma$  を制限したもの, すなわち  $\sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda$  を **subshift** という.
- (4)  $X$  をコンパクト距離空間とし,  $f : X \rightarrow X$  を位相同型写像とする. ある **subshift**  $\Lambda \subset \Sigma_k$  と, ある連続な全射  $\pi : \Lambda \rightarrow X$  があり  $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$  が成り立つ時,  $f : X \rightarrow X$  は **symbolic extension** あるいは **symbolic representation** を持つという. またこの場合,  $f : X \rightarrow X$  は  $\sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda$  の **factor** であるという.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\sigma} & \Lambda \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

- (5)  $p \in X$  に対し  $Orb(p)$  は  $p$  の軌道を表す. すなわち,

$$Orb(p) = \{ f^n(p) \mid n \in \mathbf{Z} \}$$

- (6) 距離空間  $(X, d)$  の部分集合  $A, B$  に対して, それらの間の距離を

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\}$$

と決める. これはいわゆる部分集合のハウスドルフ距離と言われているものであり,  $A, B$  がコンパクトの場合は,  $A = B \Leftrightarrow d_H(A, B) = 0$  である.

次がここでの主定理である.

**Theorem**  $f$  をコンパクト距離空間  $X$  からそれ自身への位相同型写像とし,  $p \in X$  を  $f$  の周期点とする.  $Orb(p)$  の部分集合ではない  $f$ -不変な閉集合の列  $\{C_i\}$  で,  $\lim_{i \rightarrow \infty} d_H(C_i, Orb(p)) = 0$  となるものが存在するならば,  $f$  の **symbolic extension**  $\pi : \Lambda \rightarrow X$  で  $\pi^{-1}(Orb(p))$  が有限集合となるようなものは存在しない.

特に、この定理の状況において、有限対 1 の symbolic extension は存在しない。証明は次のセクションで与える。

この定理の statement において、 $\pi^{-1}(\text{Orb}(p))$  が有限集合、という部分を取り去ってしまうと、そのような命題は成立しない。セクション 3 では、あるコンパクト距離空間上の位相同型写像  $f$  で、あるコンパクトな不変集合が収束しているような不動点  $p$  を持ち、同時に symbolic extension を持つようなものの例を述べる。もちろん、 $p$  の factor map による逆像は無限集合である。

この定理はもともと、KAM region を持つような面積保存写像をモデルとしているものであり、実際にそのような微分同相写像に適用すると次のようになる。まず、Moser の定理 [M] より、もし、平面上の面積保存  $C^4$ -微分同相写像が楕円型周期点を持ち、そこでの固有値が 4 次までの resonance を持たず、さらに Birkhoff normal form の第一係数が non-zero ならば、invariant circles がその周期点に収束している。そのような楕円型周期点は **安定** と呼ばれる。我々の定理より、

**Corollary 1**  $f$  を平面上の領域  $D$  上の面積保存  $C^4$ -微分同相写像とし、 $p \in D$  を  $f$  の楕円型周期点とする。  $\Omega$  は  $f$ -不変コンパクト集合で、 $p$  とその回りの *non-wandering points* を含むようなものとする。

もし、 $p$  の固有値が 4 次までの resonance を持たず、さらに Birkhoff normal form の第一係数が non-zero ならば、 $f$  の symbolic extension  $\pi: \Lambda \rightarrow \Omega$  で、 $\pi^{-1}(\text{Orb}(p))$  が有限集合となるようなものは存在しない。

この corollary を言い換えると次のようになる。

**Corollary 2**  $f$  を領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上の面積保存  $C^4$ -微分同相写像とし、 $\Omega(f)$  を  $D$  上の  $f$  の *non-wandering set* とする。もし  $f|_{\Omega(f)}$  が symbolic extension を持つならば、任意の安定な楕円型周期点の factor map による逆像は無限集合である。

Hénon map  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  とは, 次の式で定義される  $\mathbb{R}^2$  あるいは  $\mathbb{C}^2$  の多項式自己同型写像である.

$$H(x, y) = (-by + a - x^2, x)$$

Hénon map は, non-trivial な dynamics を持つ最も単純な非線形の微分同相写像であり, 特に horseshoe map の生成過程を含んでいる. Jacobian は constant に  $b$  であり, 従って特に  $b = 1$  ならば, 面積及び向きを保つ写像である. この場合, 簡単な計算から,  $-1 < a < 3$  となる  $a$  に関して, Hénon map は elliptic な不動点  $p_e$  を持つことがわかる. Mora-Romero の計算から [MR],  $a$  が  $(-1, 3)$  に含まれていてさらに以下の7つの値のどれでもなければ,  $p_e$  の固有値は4次の resonance を持たず, Birkhoff normal form の第一係数は non-zero であることがわかる.

**Corollary 3**  $H(x, y) = (-y + a - x^2, x)$  を  $\mathbb{R}^2$  又は  $\mathbb{C}^2$  上の Hénon map とする. もし  $a \in (-1, 3)$  が次の7つの値のどれでもなければ, non-wandering set 上において, 不動点の逆像が有限集合となるような symbolic extension は存在しない.

$$\left\{ 0, \frac{5}{4}, \frac{9}{16}, \frac{1 \pm \sqrt{15}}{4}, \frac{1}{2} \pm \sqrt{2} \right\}$$

特にこの場合, Hénon map は有限対1の symbolic extension を持たない.

もし面積保存 Hénon map が楕円型周期点  $p$  を持てば,  $a$ -パラメーター空間上のある区間があって, その区間上のパラメーターでは  $p$  を連続的に延長した安定な楕円型周期点を持つと予想される. Duarte の定理から [D], もし  $C^\infty$  面積保存微分同相写像がホモクリニック接触を持てば, 面積保存微分同相写像全体の空間の中での十分小さい摂動によって, Birkhoff normal form の第一係数が non-zero となるような楕円型周期点を持つようにできる. これらのことから, 次のことが予想される.

**Conjecture Horseshoe** にくらでも近いパラメーターにおいて, Hénon map は安定な楕円型周期点を持ち, 従って, 有限対 1 の symbolic representation を持たない.

## 2 定理の証明

このセクションでは, 定理の証明を与える.

$f$  をコンパクト距離空間  $X$  からそれ自身への位相同型写像とする.  $p \in X$  を  $f$  の周期点とし,  $\{C_i\}$  を  $Orb(p)$  の部分集合ではない  $f$ -不変閉集合の列で,  $\lim_{i \rightarrow \infty} d_H(C_i, Orb(p)) = 0$  となるものとする.

背理法で証明する. ある  $k$  と  $\Sigma_k$  の closed shift-invariant subset  $\Lambda$ , そして連続な全射  $\pi: \Lambda \rightarrow X$  で,  $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$  でありさらに  $\pi^{-1}(Orb(p)) = P$  が有限集合となるものが存在したと仮定する.

$P \subset \Lambda$  は  $\sigma$ -invariant な有限集合なので, 有限個の周期点から成る.

$$D_n = \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} C_i}$$

とおくと, これらはコンパクトな  $f$ -不変集合の減少列であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(D_n, Orb(p)) = 0$$

である. 従って,  $\bigcap_n D_n \neq \emptyset$  であり,

$$\bigcap_n D_n \subset Orb(p)$$

である.  $E_n = \pi^{-1}(D_n)$  とおくと,  $\{E_n\}$  はコンパクト  $\sigma$ -invariant set の減少列であり, 従って,  $\bigcap_n E_n \neq \emptyset$  であって,

$$\bigcap_n E_n = \pi^{-1}\left(\bigcap_n D_n\right) \subset P$$

である.

$P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  とおく.  $m_j$  を  $\alpha_j$  の最小周期とし,  $M$  を  $\{m_j\}$  のある公倍数とする.

$$W = \bigcup_{j=1}^N \{ \text{all the segments of } \alpha_j \text{ of length } 2M \}$$

とおく.  $\alpha_j$  の最小周期は  $m_j$  なので,  $W$  の任意の要素は, ある  $\alpha_j$  の長さ  $m_j$  のセグメントを  $2M/m_j$ -回並べたものである.  $\alpha_j$  の長さ  $m_j$  のセグメントの個数は  $m_j$ -個なので,  $W$  の要素の個数は有限個である.

各  $C_i$  は  $Orb(p)$  の部分集合ではないので,  $D_n$  上のある点  $x_n$  で  $x_n \notin Orb(p)$  となるものがある.  $\pi^{-1}(Orb(p)) = P$  であるから  $\pi^{-1}(x_n) \cap P = \emptyset$  である.  $\pi^{-1}(x_n)$  上の点の一つとり, それを  $\gamma_n$  とすると,  $\gamma_n \in E_n$  であり, 任意の  $i \in \mathbf{Z}$  について  $\sigma^i(\gamma_n) \notin P$  である.

**Lemma 1**  $\gamma_n$  の長さ  $2M$  のセグメントで  $W$  に含まれないものが存在する.

**証明:** 背理法で示す.  $\gamma_n$  の長さ  $2M$  の全てのセグメントが  $W$  に含まれていると仮定する.  $\gamma_n$  の長さ  $2M$  のセグメントをひとつとり, それを  $s$  とする. 仮定から  $s \in W$  である.  $s$  はある  $\alpha_j$  のある  $2M$ -セグメントと一致する. このセグメントは,  $\alpha_j$  の  $m_j$ -セグメントを  $2M/m_j$ -回並べたものである. ここで  $m$ -セグメントとは, 長さ  $m$  のセグメントのことである.  $M$  は  $m_j$  の倍数であるから,  $s$  の右半分と左半分は全く同じ  $M$ -セグメントである.

$s$  の右半分と左半分から始めて,  $\gamma_n$  を  $M$ -セグメントの列に分割する. 言い換えると,  $\gamma_n$  を  $M$ -セグメントの列であると見なすのだが,  $s$  の右半分と左半分の  $M$ -セグメントがその一部となるようにするのである. このような  $M$ -セグメントの列を見てゆくと, どこかに必ず  $s$  の半分とは一致しないものが存在する. なぜなら, もし全ての  $M$ -セグメントが  $s$  の半分と一致するなら,  $\gamma_n$  は  $\alpha_j$  のあるシフトとなってしまう,  $\gamma_n \in P$  でなければならなくなるが,  $\gamma_n \notin P$  であるから, それはあり得ない. さて,  $s$  の半分とは一致しない  $M$ -セグメントの中で,  $s$  に最も近いものをとると, ある  $\gamma_n$  の  $2M$ -セグメント  $s'$  で, 右半分と左半分が異なるものが存在することになる.

$s'$  は  $W$  には含まれない. なぜなら  $W$  の全ての元は, 右半分と左半分とが同じだからである.  $W$  に含まれない  $2M$ -セグメントが存在することになり,  $\gamma_n$  の全ての  $2M$ -セグメントが  $W$  に含まれるという仮定に矛盾する.  $\square$

この lemma から,  $\gamma_n$  のある  $2M$ -セグメントで,  $W$  に含まれないものが存在する.  $E_n$  は  $\sigma$ -不変だから, 必要ならば適当にシフトすることにより,  $\gamma_n(0) \cdots \gamma_n(2M-1)$  が  $W$  に含まれないと仮定してよい. すなわち, 次の lemma が成り立つ.

**Lemma 2** 任意の  $n$  に対し, ある  $\gamma_n \in E_n$  で,  $\gamma_n(0) \cdots \gamma_n(2M-1)$  が  $W$  に含まれないものが存在する.

長さ  $2M$  の word は有限個しかないので,  $W$  には含まれない, 長さ  $2M$  の word  $s_0$  で, 無限個の  $n$  に対して  $\gamma_n(0) \cdots \gamma_n(2M-1) = s_0$  となるものがある. そのような  $n$  だけを抜き出すことにより, 任意の  $n$  に対して  $\gamma_n(0) \cdots \gamma_n(2M-1) = s_0$  であるとして良い. 次の cylinder set

$$C(s_0) = \{ \alpha \in \Sigma_k \mid \alpha(0) \cdots \alpha(2M-1) = s_0 \}$$

を考える. これはコンパクトである.  $E'_n = E_n \cap C(s_0)$  とおくと,  $\{E'_n\}$  は non-empty なコンパクト集合の減少列であり, 従って,

$$E_\infty = \bigcap_n E'_n$$

は空集合ではない. これは矛盾である. なぜなら,  $E_\infty \subset C(s_0)$  であって  $E_\infty \subset \bigcap_n E_n \subset P$  であるが, 一方  $P \cap C(s_0) = \emptyset$  でなければならないからである.  $\square$

### 3 ある例

このセクションでは, あるコンパクト距離空間からそれ自身への位相同型写像であって, symbolic extension を持ち, 同時に, 不動点とそれに収束する不変閉集合の列を持つようなものの例を示す. 当然, factor map によるその不動点の逆像は無限集合である.

$\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  を 2-symbols full-shift とする. 0 と 1 の有限長の word  $A = a_0 \cdots a_n$  に対して,  $A^\infty \in \Sigma_2$  は,  $a_0$  を 0-position として  $A$  を並べ



てできる, 次のような両側無限列を表すとする.

$$\cdots a_0 \cdots a_n \cdot a_0 \cdots a_n a_0 \cdots a_n \cdots$$

また, 0 と 1 の有限長の word で, その中心に dot を持つようなもの  $B = a_{-n} \cdots a_{-1} \cdot a_0 \cdots a_{n-1}$  に対して,  $B^\infty \in \Sigma_2$  は,  $a_0$  を 0-position として  $B$  を並べてできる, 次のような両側無限列とする.

$$\cdots a_{-n} \cdots a_{-1} a_0 \cdots a_{n-1} a_{-n} \cdots a_{-1} \cdot a_0 \cdots a_{n-1} a_{-n} \cdots a_{-1} a_0 \cdots a_{n-1} \cdots$$

$\Sigma_2$  における列  $\{p_n\}$  を次のように決める.

$$\begin{aligned} p_1 &= (10)^\infty, & p_2 &= (10.11)^\infty, & p_3 &= (10111010)^\infty, \\ p_4 &= (10111010.10111011)^\infty, \\ p_5 &= (10111010101110111011101010111010)^\infty, \dots \end{aligned}$$

これらは, 不動点の 2 冪分岐によって発生する周期  $2^n$  の周期点に相当するものである.  $\{p_n\}$  はある列  $p$  に収束する.  $\Lambda = \overline{\text{Orb}(p)}$  はシフト不変な閉集合である.  $X = \Sigma_2 / \Lambda$  を  $\Lambda$  を 1 点に同一視して得られる商位相空間とし,  $\pi: \Sigma_2 \rightarrow X$  を自然な射影とする.

$n > m \geq 1$  の時, 任意の  $i \in \mathbb{Z}$  に対して  $d(\sigma^i(p_n), p_m) \geq 1/2^m$  であるから,  $d_H(\Lambda, p_m) \geq 1/2^m$  である. 従って, 任意の  $n \geq 1$  に対して  $p_n \notin \Lambda$  であることがわかる. ここで,  $\Sigma_2$  における距離は標準的な,

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha(i) - \beta(i)|}{2^{|i|}}$$

としている.

$X$  上の距離  $\bar{d}$  を次のように定義する.  $\alpha, \beta \in \Sigma_2$  に対して,

$$\bar{d}(\pi(\alpha), \pi(\beta)) = \min\{d(\alpha, \beta), d(\alpha, \Lambda) + d(\beta, \Lambda)\}$$

これが  $X$  上の距離になり,  $p$  が連続となることは, 定義に沿って確かめることによりわかる.

位相同型写像  $f: X \rightarrow X$  を, シフト写像から誘導されるもの, すなわち,

$$f(\pi(\alpha)) = \pi(\sigma(\alpha)) \quad \text{for } \alpha \in \Lambda$$

として定義すると,  $f$  は symbolic extension を持ち, そして同時に, 閉不変集合  $\{\text{Orb}(\pi(p_n))\}$  が  $f$  の不動点  $\pi(\Lambda)$  に収束している.

## References

- [BW] O.Biham, W.Wenzel, *Unstable periodic orbits and the symbolic dynamics of the complex Hénon map*, Phys.Rev.A(3) 42 (1990), No.8, 4639–4646.
- [CE] P.Collet, J.P.Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Progress in Physics 1, Birkhauser (1980).
- [CGP] P.Cvitanović, G.Gunaratne, I.Procaccia, *Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors*, Physical Review A, Vol.38, No.3 (1988), 1503–1520.
- [CP] F.Christiansen, A.Poloti, *Symbolic encoding in symplectic maps*, Nonlinearity 9 (1996), 1623–1640.
- [dC] A. de Carvalho, *Pruning fronts and the formation of horseshoes*, Ergd.Th. & Dyn.Sys. 19(1999), 851–894.
- [D] P.Duarte, *Abundance of elliptic isles at conservative bifurcations*, Dynam. Stability Systems 14 (1999), No.4, 339–356.
- [DMS] M.J.Davis, R.S.MacKay, A.Sannami, *Markov shifts in the Hénon family*, Physica D 52 (1991), 171–178.
- [dMvS] W.de Melo, S.van Strien, *One-dimensional dynamics*, Springer Verlag (1993).
- [GK] P.Grassberger, H.Kantz, *Generating partitions for the dissipative Hénon map*, Phys.Lett.A 113 (1985), 235–238.
- [GKM] P.Grassberger, H.Kantz, U.Moenig, *On the symbolic dynamics of the Hénon map*, J.Phys.A 22 (1989), No.24, 5217–5230.
- [Ish] Y.Ishii, *Towards a kneading theory for Lozi mappings. I: A solution of the pruning front conjecture and the first tangency problem*, Nonlinearity 10 (1997), 731–747.

- [LM] D.Lind, B.Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press (1995).
- [M] J.Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of Mathematics Studies, No. 77. , Princeton University Press (1973).
- [MR] L.Mora, N.Romero, *Moser's invariant curves and homoclinic bifurcations*, Dynam. Systems Appl. 6(1997), no.1, 29–41.
- [R] W.L.Reddy, *Lifting expansive homeomorphisms to symbolic flows*, Mathematical Systems Theory, Vol.2 (1968), 91–92.
- [S] 三波篤郎, *Hénon map について (第2版)* , (1998年度力学系勉強会講演資料 : <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~nami/dyn-ml/old-symp/1998toyama/>)
- [SDM] D.Sterling, H.R.Dullin, J.D.Meiss, *Homoclinic bifurcations for the Hénon map*, Physica D 134 (1999), 153–184.
- [WY] Q.D.Wang, L.S.Young, *Strange attractors with one direction of instability*, Comm.Math.Phys. 218(2001), 1–97.

Atsuro Sannami

Department of Computer Sciences

Kitami Institute of Technology

Kitami, 090-8507, JAPAN

sannami@cs.kitami-it.ac.jp